L'annuaire du Collège de France

Cours et travaux

118 | 2020

Annuaire du Collège de France 2017-2018

Géométrie asymptotique du groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe libre

Camille Horbez

Electronic version

URL: <https://journals.openedition.org/annuaire-cdf/16579>

DOI: 10.4000/annuaire-cdf.16579

ISBN: 978-2-7226-0572-5

ISSN: 2109-9227

Publisher

Collège de France

Printed version

Date of publication: 30 December 2020

Number of pages: 708-709

ISBN: 978-2-7226-0516-9

ISSN: 0069-5580

Electronic reference

Camille Horbez, "Géométrie asymptotique du groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe libre", *L'annuaire du Collège de France* [Online], 118 | 2020, Online since 01 April 2021, connection on 22 August 2022. URL: <http://journals.openedition.org/annuaire-cdf/16579> ; DOI: <https://doi.org/10.4000/annuaire-cdf.16579>

All rights reserved

GÉOMÉTRIE ASYMPTOTIQUE DU GROUPE DES AUTOMORPHISMES EXTÉRIEURS D'UN GROUPE LIBRE

Camille HORBEZ

Chargé de recherche à l'université d'Orsay

Mots-clés : géométrie asymptotique, automorphismes, groupe libre, géométrie

Cycle de quatre leçons données les 10, 17, 24 et 31 janvier 2018 (fondation Claude-Antoine Peccot), disponibles en audio et vidéo sur le site internet du Collège de France : <https://www.college-de-france.fr/site/cours-peccot/guestlectureur-2017-2018.htm>.

Soit $n \geq 2$, soit F_n un groupe libre de rang n , et soit $\text{Out}(F_n)$ le groupe de ses automorphismes extérieurs, c'est-à-dire le quotient de $\text{Aut}(F_n)$ par son sous-groupe distingué formé par les conjugaisons. Depuis les travaux fondateurs de Culler et Vogtmann en 1986, l'étude du groupe $\text{Out}(F_n)$ s'effectue par des méthodes géométriques, *via* l'étude de son action sur plusieurs espaces, au rang desquels on peut mentionner l'*outre-espace* de Culler et Vogtmann, ainsi que plusieurs espaces à courbure négative qui lui sont reliés. L'objectif de ce cours a été de présenter quelques résultats récents obtenus sur le groupe $\text{Out}(F_n)$ *via* l'étude de la géométrie de ces espaces et de la dynamique de l'action de $\text{Out}(F_n)$.

Lors de la première séance, j'ai présenté la définition de l'*outre-espace*, comme espace d'actions libres et simpliciales du groupe libre F_n sur des arbres simpliciaux métriques. J'en ai décrit une compactification, comprise grâce aux travaux successifs de Culler et Morgan, Paulin, Cohen et Lustig, Bestvina et Feighn, qui s'identifie à un espace d'actions dites « très petites » de F_n sur des arbres réels, auxquels on pense comme à des dégénérescences d'arbres simpliciaux. J'ai par ailleurs présenté quelques phénomènes de courbure négative dans ces espaces, en esquissant notamment une démonstration de l'hyperbolicité du complexe des scindements libres, qui peut être défini naturellement comme une complétion simpliciale de l'*outre-espace*.

La deuxième séance fut consacrée à la classification des sous-groupes de $\text{Out}(F_n)$. J'y ai notamment présenté une démonstration – reposant sur l'étude de la dynamique de $\text{Out}(F_n)$ sur les espaces mentionnés ci-dessus – de l'*alternative de Tits* pour $\text{Out}(F_n)$, théorème dû originellement à Bestvina, Feighn et Handel : pour tout sous-groupe H de $\text{Out}(F_n)$, soit H contient un sous-groupe abélien d'indice fini, soit H contient un sous-groupe libre non abélien. Au cours de la démonstration, j'ai également donné une preuve d'un autre résultat de classification des sous-groupes de $\text{Out}(F_n)$ essentiellement dû à Handel et Mosher : pour tout sous-groupe H de $\text{Out}(F_n)$, soit H contient un élément *complètement irréductible*, soit un sous-groupe d'indice fini de H fixe la classe de conjugaison d'un facteur libre propre de F_n . Ici, un élément de $\text{Out}(F_n)$ est dit *complètement irréductible* si aucune de ses puissances

non triviales ne fixe la classe de conjugaison d'un facteur libre propre de F_n ; ce sont en un sens les automorphismes génériques de F_n .

Lors de la troisième séance, j'ai présenté des phénomènes de rigidité pour le groupe $\text{Out}(F_n)$, analogues en un sens aux résultats de rigidité de Mostow, Prasad et Margulis pour les réseaux en rang supérieur. Un théorème dû à Khramtsov et indépendamment à Bridson et Vogtmann énonce que pour tout $n \geq 3$, le groupe $\text{Out}(\text{Out}(F_n))$ est trivial, autrement dit tout automorphisme de $\text{Out}(F_n)$ est intérieur. Ce résultat a été généralisé par Farb et Handel, qui ont montré que tout isomorphisme entre sous-groupes d'indice fini de $\text{Out}(F_n)$ est la restriction de la conjugaison par un élément de $\text{Out}(F_n)$. J'ai présenté une nouvelle preuve géométrique de ce théorème obtenue récemment en collaboration avec Richard D. Wade ; un point clé dans l'argumentation est un théorème de Bridson et Vogtmann qui énonce que toutes les symétries simpliciales de l'outre-espace viennent de l'action de $\text{Out}(F_n)$. J'ai conclu cette troisième séance en présentant un autre théorème de rigidité dû à Bridson et Wade : tout morphisme d'un réseau en rang supérieur tel $\text{SL}(m, \mathbb{Z})$ avec $m \geq 3$ vers $\text{Out}(F_n)$ est d'image finie. J'ai expliqué comment ce théorème peut être retrouvé à partir d'un résultat de Haettel qui énonce que de tels réseaux ne peuvent pas agir de manière non élémentaire par isométries sur un espace hyperbolique.

Enfin, la quatrième séance fut consacrée à une propriété concernant la géométrie asymptotique du groupe $\text{Out}(F_n)$, obtenue en collaboration avec Mladen Bestvina et Vincent Guirardel : le groupe $\text{Out}(F_n)$ est *moyennable à l'infini*, ce qui entraîne que $\text{Out}(F_n)$ et ses sous-groupes satisfont la conjecture de Novikov issue de la K-théorie. La notion de moyennabilité est une notion centrale en géométrie des groupes, et celle de moyennabilité à l'infini en est une généralisation naturelle : un groupe G est *moyennable à l'infini* s'il admet une action topologiquement moyennable sur un espace compact K , autrement dit si l'on peut associer continûment à tout point de K une suite de mesures de probabilités sur G de manière asymptotiquement équivariante.