



Annuaire du Collège de France

Cours et travaux du Collège de France

108 | 2008
Annuaire du Collège de France 2007-2008

Variétés de Hecke des groupes unitaires et représentations galoisiennes

Résumé des conférences du Collège de France (2007-2008)

Gaëtan Chenevier



Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/annuaire-cdf/286>

DOI : 10.4000/annuaire-cdf.286

ISBN : 978-2-7226-0136-9

ISSN : 2109-9227

Éditeur

Collège de France

Édition imprimée

Date de publication : 1 décembre 2008

Pagination : 919-920

ISBN : 978-2-7226-0082-9

ISSN : 0069-5580

Référence électronique

Gaëtan Chenevier, « Variétés de Hecke des groupes unitaires et représentations galoisiennes », *L'annuaire du Collège de France* [En ligne], 108 | 2008, mis en ligne le 24 juin 2010, consulté le 08 novembre 2024. URL : <http://journals.openedition.org/annuaire-cdf/286> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/annuaire-cdf.286>

Le texte et les autres éléments (illustrations, fichiers annexes importés), sont « Tous droits réservés », sauf mention contraire.

M. Gaëtan CHENEVIER

Chargé de recherches au CNRS

Variétés de Hecke des groupes unitaires et représentations galoisiennes

Soient E un corps de nombres, p un nombre premier, S un ensemble fini de premiers de E (contenant ceux divisant p), et G_S le groupe de Galois d'une extension algébrique maximale de E non ramifiée hors de S . Nous nous intéressons à l'espace analytique p -adique X_d paramétrant les représentations (semi-simples) de G_S de dimension d et à coefficients p -adiques. Un sous-ensemble dénombrable naturel Z de X_d est donné par les représentations dites « géométriques », qui apparaissent (à torsion près) dans la cohomologie étale des variétés projectives lisses sur E , et la question s'est posée de comprendre ce lieu. En 1995, Gouvêa-Mazur et Coleman ont démontré que pour $E = \mathbb{Q}$, l'ensemble Z est Zariski-dense dans certaines composantes connexes de X_2 (qui sont des boules ouvertes de dimension 3). L'objectif du cours est d'étudier le cas de la dimension supérieure, notamment la contribution de la partie Z_u de Z provenant des variétés de Shimura associées aux groupes unitaires sur \mathbb{Q} . Nous supposons pour cela que E est un corps quadratique imaginaire (dans lequel p est décomposé) et que toutes les représentations en jeu satisfont de plus une condition d'auto-dualité. Le théorème principal est alors que Z_u est Zariski-dense dans certaines composantes de X_3 (qui sont des boules ouvertes de dimension 6). Nous développons de plus un ensemble de résultats permettant de « minorer » l'adhérence de Zariski de Z_u en toutes les dimensions d , et nous étudions un analogue de ces questions pour le groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p .

Le cours s'est composé de quatre séances de deux heures chacune, dont nous décrivons maintenant brièvement le contenu.

D'après les travaux de nombreux auteurs, aux points de Z_u sont associées des représentations automorphes pour divers groupes unitaires à d variables attachés à E/\mathbb{Q} ; la première partie du cours a consisté en une analyse des congruences modulo une puissance de p entre celles-ci. Nous travaillons avec des groupes unitaires U dont les points réels sont compacts, et l'objectif est d'étendre à ces derniers les résultats sur les familles p -adiques de formes modulaires obtenus par Hida, Coleman et Coleman-Mazur dans le cadre du groupe GL_2 sur \mathbb{Q} . Pour un tel groupe U , nous définissons ce qu'est une « représentation automorphe p -adique de pente finie » et nous démontrons que l'ensemble de ces dernières forme un espace analytique p -adique naturel : la « variété de Hecke » de U . Cet espace, disons noté $Y_d(U)$, est d'équi-dimension d . Il peut être vu comme une interpolation p -adique d'une partie du spectre automorphe (discret) de U . En effet, à chaque paire (Π, \mathcal{R}) formée d'une représentation automorphe Π de U telle que Π_p est non ramifiée, et d'un « raffinement » \mathcal{R} de Π_p (essentiellement, un ordre total sur les valeurs propres de la classe de Langlands de Π_p), est associé un point dit « classique » de $Y_d(U)$; les points classiques sont Zariski-denses dans $Y_d(U)$.

Lorsque nous savons associer aux représentations automorphes de U les représentations galoisiennes prédites par Langlands et Arthur (par exemple quand $d \leq 3$ ou sous certaines hypothèses locales), nous obtenons par interpolation un morphisme $Y_d(U) \rightarrow X_d$, qui se trouve être quasi-fini. Il envoie les points classiques de $Y_d(U)$ dans Z_u , mais son image, disons notée F_d , est assez complexe. En effet, l'espace X_d est de dimension $\frac{d(d+1)}{2}$ en général alors que $Y_d(U)$ est de dimension d ; de plus, en chaque point x de Z_u qui est l'image d'un point classique de $Y_d(U)$ passe en général $d!$ branches de F_d , correspondant aux différents choix de raffinements associés aux antécédents de x dans $Y_d(U)$. Il en résulte que F_d admet une structure de type fractal. L'objet analogue dans le cadre de GL_2 avait été mis en évidence par Gouvêa et Mazur, qui lui ont donné le nom de « fougère infinie » (que l'on reprendra pour F_d) pour en illustrer cet aspect.

La seconde partie du cours a constitué en l'étude de F_d . L'objectif est de comprendre les positions relatives des différentes branches de la fougère F_d au voisinage d'un point x de Z_u comme plus haut. Le résultat principal est que sous une condition purement locale en p de « généricité » sur x que nous définissons, la somme des espaces tangents des différentes branches de F_d en x est de dimension au moins $\frac{d(d+1)}{2}$; nous en déduisons les résultats annoncés au premier paragraphe. Pour démontrer cet énoncé, nous étudions tout d'abord la restriction au groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p de la famille p -adique naturelle de représentations de G_S portée par $Y_d(U)$. Ses propriétés s'interprètent de manière naturelle à l'aide de la théorie des (φ, Γ) -modules et de la notion de représentations « triangulines » (Colmez), qui permettent notamment de comprendre le pendant galoisien des « raffinements » intervenus plus haut. En dimension 2, ces résultats sont dus à Kisin et Colmez; les généralisations nécessaires à la dimension supérieure présentées dans le cours sont un travail en commun avec Joël Bellaïche. Ceci étant fait, nous nous ramenons à démontrer un énoncé purement local, concernant la théorie des représentations cristallines de Fontaine : « Toute déformation à l'ordre un d'une représentation cristalline générique est combinaison linéaire de déformations triangulines ».

À la fin du cours, nous avons illustré nos résultats par un exemple explicite de composante de X_3 attachée au carré symétrique de la courbe elliptique $X_0(19)$.
