Bulletin de méthodologie sociologique

Bulletin of sociological methodology

95 | 2007
July

Sensibilité du chaos aux conditions extérieures

Jean-François Gazeau

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/bms/437>

ISSN : 2070-2779

Éditeur

Association internationale de méthodologie sociologique

Édition imprimée

Date de publication : 1 juillet 2007

Pagination : 68-76

ISSN : 0759-1063

Référence électronique

Jean-François Gazeau, « Sensibilité du chaos aux conditions extérieures », *Bulletin de méthodologie sociologique* [En ligne], 95 | 2007, mis en ligne le 01 juillet 2010, consulté le 01 mai 2019. URL : <http://journals.openedition.org/bms/437>

Ce document a été généré automatiquement le 1 mai 2019.

© BMS

Sensibilité du chaos aux conditions extérieures

Jean-François Gazeau

- 1 Les sciences humaines tendent à rechercher, dans un corpus de données quantitatives relatif à une population, les relations qui lient les variables (à expliquer) avec d'autres variables (explicatives). Le fait de modéliser les processus étudiés consiste à mettre en équation de telles relations avec leur poids respectif. En postulant que les mêmes circonstances produisent les mêmes effets, cela permet de simuler des évolutions prévisibles selon la variation de tel ou tel paramètre ingrédient, voire de généraliser les résultats observés sous forme de recette (modèle) sociale.
- 2 Les mathématiques du chaos (Stewart, 1999), tout en perturbant le bel ordonnancement déterministe des équations mathématiques, offrent l'opportunité de considérer l'aléa (le non prévisible) comme possible résultat d'un processus déterministe. La tentation est alors grande de transposer le propos aux processus sociaux où l'aléa, loin d'être négligeable, est un peu la bête noire ingérable des sociologues, la question étant de savoir faire le partage entre « tout est écrit d'avance » (les jeux sont déjà faits), et « tout est possible encore » (à chacun de faire son jeu).

Un exemple d'application

- 3 C'est donc à bon escient qu'un auteur a entrepris d'évaluer les parts respectives du déterminisme (social) et de l'aléa dans la première insertion professionnelle (Tchibozo, 2002). L'hypothèse de l'interférence entre déterminisme et aléatoire (et stratégie des acteurs) dans un processus social est en effet très séduisante et même parfaitement plausible, à un âge où presque tous les possibles sont peut-être encore ouverts.
- 4 L'idée majeure de l'auteur est que des écarts initiaux (en l'occurrence, au sortir de l'école) très faibles tendent à s'amplifier au fil du temps, et qu'ainsi, il suffirait de bien *sentir* ces écarts initiaux pour en quelque sorte prévoir les différences à terme, ou que, à l'inverse,

des écarts à terme étaient contenus, peut-être de façon insoupçonnée, dans les conditions de départ.

- 5 Pour ce faire, l'auteur invoque un processus de récurrence, repris de Stewart, dans lequel le terme actuel s'exprime à partir du terme précédent, de la forme $x_{t+1} = kx_t(1-x_t)$. Le paramètre k est une constante d'environnement dont la valeur est nécessairement strictement positive et égale ou inférieure à 4 ; les variables x et z sont de même strictement positives et inférieures à 1, faute de quoi la fonction serait nulle définitivement.
- 6 Les écarts d'évolution de deux (groupes d') individus X et Z sont ainsi mesurés au moyen de leur formule respective $x_{t+1} = kx_t(1-x_t)$ et $z_{t+1} = kz_t(1-z_t)$ sachant que les valeurs initiales x_0 et z_0 sont très voisines.
- 7 Un premier graphique de l'article (graphique 1) représente la série des écarts absolus issus de ces deux processus, où le paramètre k est fixé à 4. L'écart reste faible avant d'exploser vers la 15^{ème} itération. Un second graphique fait la même mesure avec k fixé à 1, et dans ce cas l'écart initial est anéanti en assez peu d'itérations (graphique 2).

Graphique 1 :

Graphique 2 :

Discussion de l'observation

- 8 En dépit des effets inverses dû au jeu différentiel de k , approché seulement par ces deux exemples, l'auteur persiste dans l'idée que des écarts initiaux même faibles s'amplifient et donc que les différences observées à terme sont sensibles aux conditions initiales. Mais là n'est pas la seule faiblesse du propos.
- 9 Nous nous proposons précisément ici de discuter l'argumentaire de l'auteur avant d'examiner dans le détail le fonctionnement du processus invoqué, tant il semble que les

mathématiques du chaos, au moins sous la forme et dans l'exposé des motifs qui en sont faits, soient inappropriées dans la démonstration.

- 10 Dans un premier temps, l'amplification de l'écart initial n'est pas continue, et lors de certaines étapes du processus la « valeur absolue » de l'écart observé est même voisine de zéro, comme si, alors, les situations étaient aussi voisines qu'au départ (nous raisonnons ici avec $k = 4$).
- 11 De plus, l'usage des valeurs absolues des écarts pour mesurer l'amplification d'un écart initial au fil des étapes successives est curieux. L'amplification suppose que chaque écart observé est plus grand et de même sens que l'écart précédent. Or il n'en est rien ; les écarts sont le plus souvent négatifs, quel que soit d'ailleurs le sens de l'écart initial, comme si les écarts initiaux amenaient parfois des différences, amplifiées ou non, de sens contraire (graphique 3).

Graphique 3 :

- 12 Enfin, la valeur des écarts est tout aussi imprévisible lorsque l'écart initial est plus conséquent, sauf qu'il est imprévisible dès la première itération. C'est d'ailleurs ce que l'on voit sur le graphique précédent dès lors que l'on considère n'importe quelle itération comme point de départ de l'observation, ou comme le montre le graphique 4.

Graphique 4 :

- 13 Dans un second temps, on doit soulever deux questions de méthode. En fait, il y a autant de chances de trouver des écarts (ou des absences d'écart) entre deux processus à la même itération qu'au sein d'un même processus (où l'écart initial est par définition strictement nul) lors d'itérations i et j différentes (cf. graphique 5), d'où un certain doute quant à la pertinence des comparaisons à même itération et à celle de l'amplification des écarts initiaux. Compte tenu de la discordance entre le champ d'application (l'insertion), où l'on observe généralement les situations acquises à délais égaux après un événement initial, et le champ théorique du processus, où l'on évalue les écarts à la même $n^{\text{ième}}$ itération, peut-on indifféremment comparer au bout de deux ans X , un CDI toujours en

poste dans son premier boulot acquis dès la 1^{ère} itération, à Z, un précaire qui se trouve à son 10^{ème} petit boulot alternant avec autant de stages, ou X à son début de poste et Z au bout de deux ans ?

Graphique 5 :

- 14 Ainsi, sauf effet particulier du seul facteur extérieur, un écart initial n'a aucune valeur prédictive quant à l'écart observé à la n ème itération. Dans de telles conditions, il est illusoire de tester la sensibilité aux conditions initiales dans un processus récurrent de cette forme, sans analyser le rôle de k , et de ses éventuelles variations au fil du processus étudié.

Fonctionnement du processus

- 15 En fait, au-delà de l'apparente imprévisibilité (quand k l'autorise) des variations de valeur entre les itérations n et $n+1$, on observe une relative régularité par période de 2 itérations, mais qui n'est pas systématique. Par définition, lors de l'itération $n+1$, le processus récurrent met dans x la valeur $y = f(x)$ obtenue à l'itération précédente n . On peut donc représenter l'évolution du processus dans un repère orthonormé à deux dimensions : elle y dessine une spirale de section rectangulaire aux spires plus ou moins enchevêtrées (graphique 6).

Graphique 6 :

- 16 Dans cette spirale, les sommets nord-ouest et sud-est figurent chaque nouvelle itération ; les autres sommets, qui correspondent à la transformation de $f(x)$ en x en vue de l'itération suivante, se trouvent sur la diagonale partant de l'origine. Ainsi, d'une façon générale, lors de deux itérations consécutives (c'est-à-dire au bout d'un demi-tour environ), le processus franchit la diagonale et conduit à des situations diamétralement opposées, et toutes les deux itérations (c'est-à-dire au bout d'un tour environ), le processus revient du même côté et passe par des coordonnées assez voisines de celles obtenues au passage précédent. Hormis cet effet de pendule, les valeurs prises à chaque itération sont imprévisibles et la spirale paraît enfler ou désenfler librement.
- 17 Mais il n'en est pas toujours ainsi, et la spirale décrite ci-dessus ne correspond qu'à une certaine plage de valeurs de k . Et il en est une autre pour lesquelles le processus fonctionne différemment.
- 18 Considérons le foyer F de la parabole illustrant l'univers de $f(x) = kx(1-x)$ et l'intersection I entre la parabole et la diagonale de l'origine. Les coordonnées du foyer sont $0,5$ et $k/4 - 1/4$; les coordonnées du point d'intersection sont $1 - 1/k$ et $1 - 1/k$. Le point G est le point de la parabole de même ordonnée que F . (cf. graphiques 7a et 7b, pour la discussion géométrique, et les graphiques 8a et 8b pour les formes de spirales associées).
- 19 Le partage entre les deux modes de fonctionnement se fait quand le foyer et l'intersection sont de même ordonnée, c'est-à-dire quand k vaut 3.
- 20 Lorsque k est égal ou inférieur à 3, le foyer F est aussi ou moins élevé que l'intersection I et la fonction $f(x)$ est convergente vers une limite qui vaut l'ordonnée de I . Cette propriété explique d'ailleurs que le facteur $k = 1$, entre autres sur la plage de 0 à 3, écrase d'éventuelles différences initiales, quelles que soient leur ampleur, entre 2 processus parallèles.

- 21 Trois cas de figure se présentent :
- 22 $k \leq 1$: les valeurs de $f(x)$ sont continûment inférieures à x et, tendant vers zéro, dessinent un escalier par le dessous de la diagonale.
- 23 $1 < k \leq 2$: les valeurs de $f(x)$ sont continûment supérieures à x et, tendant vers 1, dessinent un escalier par le dessus de la diagonale.
- 24 $2 < k \leq 3$: Les valeurs de $f(x)$ sont contenues entre un maximum S d'ordonnée $= k \cdot 1/2 \cdot 1/2$, et un minimum S' , quand x vaut S , d'ordonnée $= (k/4)^{2*}(4-k)$. Compte tenu de la forme du segment SS' , Toute valeur de x renvoie un $f(x)$ inférieur au $f(x)$ précédent qui devient lui-même un x inférieur au précédent x . Les valeurs successives de $f(x)$ oscillent ainsi autour de 1 et tendent vers 1 par effet d'attraction : elles dessinent alors une spirale en entonnoir.

Graphique 7a :

Graphique 7b :

Graphique 8a : (250 itérations) Graphique 8b : (250 itérations)

Graphique 9 :

- 25 Lorsque k est supérieur à 3, le foyer est plus élevé que l'intersection I. Les valeurs de $f(x)$ sont encore contenues entre le maximum S et le minimum S' définis précédemment. Mais, compte tenu de la forme de la parabole, les oscillations autour de I ne sont plus de rigueur : elles sont libérées de l'attraction de I, et peuvent « rebondir » du même côté de I lors de deux itérations successives. Dès lors, le processus se débride et la spirale devient folle et, sans valeur-limite, elle est sans fin ; elle est d'autant plus folle que l'espace de liberté dévolu aux variations de x ou de $f(x)$ augmente plus que proportionnellement avec k (cf. Graphique 9).

Conclusion

- 26 Ainsi, le processus récurrent, qualifié de déterministe chaotique, est soit déterministe soit chaotique, et sa qualité, à k donné, ne se transmute pas au fil des itérations. Les propriétés qui lui étaient supposées dans l'article de 2002 ne concernaient qu'une plage réduite des valeurs de k . Cette partialité n'élude d'ailleurs pas la difficulté des itérations utilement comparables (de même rang, ou à délai égal ?).
- 27 C'est dire que les modèles mathématiques purs ne se transposent pas sans précaution dans le domaine des sciences humaines et sociales. Il ne suffit sans doute pas de (croire) savoir que les systèmes instables, près du chaos, ont des résultats très différents pour des conditions initiales presque identiques ; en effet, des systèmes parfaitement chaotiques peuvent se stabiliser en réglant k , quelles que soient les conditions initiales. D'où cette discussion de géométrie qui permet de circonscrire plus précisément le phénomène et d'en dévoiler les ressorts finalement assez mal connus.
- 28 Un cas particulier ne laisse pas d'inquiéter, celui où k vaut 1 ; car, si k représente un facteur extérieur, par exemple une politique publique de réduction des inégalités, le succès est assuré avec une valeur qui, neutre dans la multiplication, équivaut à l'absence de politique publique.

- 29 Si le même processus peut converger ou diverger plus ou moins à foison du seul fait d'un facteur extérieur, c'est que la zone du point de rupture entre divergence et convergence est sensible : si ce facteur représente quelque chose de l'ordre d'une volonté, le risque est grand de déboucher sur un résultat contraire, faute de bien caler le facteur k .
- 30 Autrement dit, des processus institutionnels et sociaux, bardés des lois, directives et réglementations déterministes, orientées vers la convergence, la cohésion sociale par exemple, peuvent être le faux-nez de processus de même forme mais en réalité paramétrés façon chaotique ; à l'inverse, d'autres processus orientés vers la libéralisation ou la déréglementation, peuvent être le faux-nez de processus paramétrés façon verrouillage. Certains discours excellent dans cet art du camouflage de leurs (mauvaises) intentions ou de leur manque de savoir-faire.
-

BIBLIOGRAPHIE

Ian Stewart (1999), *Dieu joue-t-il aux dés ? Les mathématiques du chaos*, Flammarion, Paris.

Guy Tchibozo (2002), « Mesurer la sensibilité aux conditions initiales dans les processus individuels de première insertion professionnelle : proposition de procédure et application », *Bulletin de Méthodologie Sociologique (BMS)*, n. 74, avril, pp. 33-52.

RÉSUMÉS

En employant l'exemple fourni par Guy Tchibozo dans le *BMS* (n. 74, 2002), l'auteur utilise des méthodes de simulation pour étudier les résultats de diverses conditions initiales pour le modèle étudié, montrant que les résultats peuvent être chaotiques ou stables en relation avec le choix de certains paramètres.

Sensitivity of Chaos to External Conditions: Using the example provided by Guy Tchibozo in the *BMS* (n. 74, 2002), the author uses simulation methods to study the results of various initial conditions for the model, showing the the results can be chaotic or stable depending to specific parameters.

INDEX

Keywords : Model Parameters, Simulation in Sociology, Stability, Unstable and Chaotic Results

Mots-clés : Paramètres du modèle, Résultats non stables ou chaotiques, Simulation en sociologie, Stabilité

AUTEUR

JEAN-FRANÇOIS GAZEAU

CMH-CNRS-EHESS-ENS, jean-francois.gazeau@ens.fr