La Lettre à Huygens

Explication de texte

Claude Merker

Electronic version

URL: <http://journals.openedition.org/ccibp/1182>

DOI: 10.4000/ccibp.1182

ISSN: 2493-7460

Publisher

Centre international Blaise Pascal

Printed version

Date of publication: 1 January 2016

ISBN: 978-2-84516-758-2

ISSN: 0249-6674

Electronic reference

Claude Merker, « La Lettre à Huygens », *Courrier du Centre international Blaise Pascal* [Online], 38 | 2016, Online since 30 March 2020, connection on 31 March 2020. URL : <http://journals.openedition.org/ccibp/1182> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/ccibp.1182>

This text was automatically generated on 31 March 2020.

Centre international Blaise Pascal

La Lettre à Huygens

Explication de texte

Claude Merker

- 1 Comment Pascal a-t-il eu l'idée de comparer les *lignes* (les longueurs) de toutes sortes de roulettes à des lignes d'ellipses ?
- 2 La première des trois figures de la *Lettre II*, à Huygens, qui réduit la question à un problème de cercle, par le moyen d'un faisceau de droites, autrement dit grâce à un objet projectif, peut nous suggérer cette vision des choses : un problème de roulette, ordinaire ou généralisée, bien réduit par ce grand simplificateur et grand organisateur de la pensée qu'est Pascal, est toujours un problème de cercle, or cette réduction, déjà opérée dans la *Lettre I* (Les sept traités de roulette) prend ici une coloration projective, et d'un point de vue projectif, cercle et ellipse sont équivalents. Finalement, terminer avec une ellipse en partant d'une roulette qui, au fond, n'est jamais qu'un cercle, n'est pas si étonnant.
- 3 Contrairement au cercle et à l'ellipse, connus depuis l'Antiquité, la roulette est une courbe du XVII^e siècle. Sa définition concrète, celle que donne Pascal au début de l'*Histoire de la roulette*, dit tout, et en termes agréables :

La roulette est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente ; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car elle n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé ; supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane¹.

Le feu P. Mersenne, Minime, fut le premier qui la remarqua, environ l'an 1615, en considérant le roulement des roues : ce fut pourquoi il l'appela *La Roulette*. Il voulut ensuite en reconnaître la nature et les propriétés, mais il n'y put pénétrer².

- 4 Telle est la définition de la roulette ordinaire, celle pour laquelle le chemin parcouru au sol – la base – après un tour complet sera exactement la longueur de la roue ; mais il y a aussi les roulettes généralisées de Roberval, reprises par Pascal, celles dont la roue roule régulièrement moins qu'elle n'avance, et celles dont la roue avance moins qu'elle ne roule. La base des premières, qualifiées d'allongées, est plus grande que la circonférence du cercle générateur – la roue –, et vice-versa pour les secondes, qualifiées d'accourcies.
- 5 La *Lettre I*, à Carcavi, fort longue, traite magistralement des problèmes de roulette ordinaire : longueur et aire de la roulette, volume obtenu en faisant tourner la roulette autour de son axe ou de sa base, surfaces courbes délimitant ces volumes, centres de gravité de tous ces objets géométriques ; ces grandeurs s'expriment alors en fonction de grandeurs « connues » depuis l'Antiquité, aire du cercle, de la sphère, volume de cette dernière, etc. Les méthodes générales, l'extrême articulation de la *Lettre I* la font considérer comme le premier traité de calcul intégral³.
- 6 La *Lettre II*, à Huygens, fort courte, généralise un des problèmes de la *Lettre I*. Elle traite par une méthode unifiée, de la ligne des trois roulettes, ordinaire, allongée, accourcie. La ligne d'une quelconque de ces roulettes se voit égalée à une ligne pas plus « connue », celle d'une ellipse⁴. Bien sûr, toutes les ellipses n'ont pas la même forme, contrairement aux cercles ; une infinité d'ellipses ont la même longueur, et tout l'art consistera à donner précisément la forme d'une ellipse solution, c'est-à-dire ses axes, en fonction de ce qui caractérise la roulette : le rayon de la roue et le degré d'écart à la roulette ordinaire, bien sûr, mais surtout en fonction du cheminement démonstratif que prend Pascal ici.
- 7 On qualifiera le mouvement d'une roulette ordinaire de roulement sans glissement, les roulettes allongées glissent, et les accourcies patinent, régulièrement.
- 8 Ces quelques pages de Pascal sont d'une densité rare, même chez lui. On y retrouve son goût pour la généralité : subsumer des problèmes distincts par un angle d'approche unique ; n'en dire pas trop pour laisser les lecteurs actifs ; déployer un art d'agréer dans un texte mathématique qui a priori n'est guère fait pour plaire. Les trois figures sur lesquelles tout repose méritent d'être observées avec soin, non seulement pour leur

lien organique, mais encore pour le soin avec lequel ont été pensées les lettres qui servent à noter les points. Je pense qu'il est nécessaire de reproduire ces figures-là qui pourraient être dues à la collaboration du graveur Abraham Bosse et du mathématicien⁵, car toute tentative de les rendre plus claires ne pourra que les assombrir. Elles sont un support fort utile au texte, en effet il advient plusieurs fois qu'elles disent ce que le texte d'un rare laconisme passe complètement sous silence⁶. Cet article propose de voir en détail ce que fait Pascal dans la *Lettre II*, en mettant l'accent sur la logique interne des dessins et du propos, ainsi que sur les calculs que Pascal ne fait parfois qu'effleurer. Le mode d'exposition, le sens de l'essentiel, la manière de noter et de varier les infinitésimaux, la beauté souveraine des figures, tout cela est propre à Pascal : personne n'écrit comme lui sur des sujets semblables⁷.

Architecture de la *Lettre à Huygens*

Les trois figures

- 9 Il y a trois figures pour cette *Lettre II*, notées Fig. 41, Fig. 42, Fig. 43 dans les planches⁸. La figure 41, plane, change une somme d'éléments de la roulette qui représente sa longueur en une autre somme, très pascalienne, qui ne fait intervenir que le cercle générateur, et un point noté H précisant comment elle est généralisée. La figure 42, spatiale, est le support d'un lemme général. Elle représente un cylindre dont on devine que c'est lui, bien coupé par un plan, qui fournira l'ellipse requise. La figure 43 est plane, mais destinée à être mentalement spatialisée. Elle assure le passage de la figure 41, née de l'expression repensée du requis, à la figure 42 qu'elle particularise pour fournir la solution. Les trois figures de Pascal forment donc un système. Regardons-les un peu plus précisément, tout en laissant provisoirement de côté les quatre démonstrations qui calculent avec des éléments infiniment petits, et concentrons-nous sur leur architecture d'ensemble.

La première figure, ou Fig. 41

- 10 Dans cette figure 41, le demi-cercle est découpé "en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points M" puis les points B sont définis comme les intersections des parallèles à la base passant par M avec la roulette. Pascal suppose que

les divisions de la circonférence [sont en si grand nombre que la somme de ces droites BB (lesquelles sont les sous-tendantes de la roulette) ne diffère de la courbe de la roulette que d'une ligne moindre qu'aucune donnée⁹.

- 11 Nous voyons là que Pascal prend ses distances avec la classique méthode d'exhaustion : pas de double encadrement, et un langage qui ressemble fort à celui, futur, des limites. Le point H est situé sur le diamètre FC, il est défini par :

$$\frac{GF}{GH} = \frac{\text{demi-circonférence}}{\text{base demi-arche}} = \frac{\text{arc CF}}{AF}$$

- 12 Si la roulette est ordinaire, H est en F, sur le cercle, donc. Si la roulette est allongée, H est à l'extérieur du cercle, d'autant plus loin que la roulette comporte plus de glissement puisque celui-ci représente en quelque sorte l'excès de la base sur la circonférence de la roue. Inversement si la roulette est accourcie, H est intérieur au cercle.
- 13 Pascal montrera, juste avant de passer à la figure 42, que le cas *H intérieur* se ramène au cas *H extérieur*, ceci par une figure fort ingénieuse qu'il ne donne pas, qu'il décrit seulement¹⁰. Cette figure que les lecteurs peuvent dessiner eux-mêmes réalise le projet unificateur annoncé au début.

Je n'ai qu'une seule méthode pour la dimension des lignes de toutes sortes de roulettes ; en sorte que, soit qu'elles soient simples, allongées ou accourcies, ma construction est toujours pareille, en cette manière. [etc.]

- 14 En remarquant la similitude de chaque "triangle" infinitésimal BOB avec le triangle de côtés finis HGM (MBO alignés) correspondant, Pascal transforme la connaissance du requis, à savoir *la somme des BB*, en celle de *la somme des HM MM*¹¹.
- 15 Il suffira de connaître la somme des HM MM pour H extérieur au cercle générateur pour connaître la longueur de toutes les sortes de roulettes allongées et accourcies puisque le cas des accourcies se ramène au cas des allongées. Le cas de la roulette ordinaire, c'est-à-dire le cas où H est sur le cercle, est aussi réglé par la connaissance de cette même somme ; cependant la construction spatiale que Pascal va donner incessamment pour achever le calcul échouera pour la roulette ordinaire, mais ce n'est pas grave puisque ce cas particulier a déjà été traité dans la *Lettre I*¹².
- 16 Pascal a réussi une double généralisation, ce par l'intermédiaire d'une de ces sommes qui lui appartiennent en propre (sommes de lignes multipliées par des infinitésimaux géométriques attenants). C'est le but du discours mathématique lié à cette première figure.
- 17 Arrive alors la conclusion, qui résume la métamorphose de la somme initiale en une somme pascalienne du même genre que celles qui ont fait le succès du *Traité de la roulette*¹³.

Donc la courbe multipliée par le rayon est égale à la somme des représentantes HM (multipliées chacune par les petits arcs MM) ; mais le rayon est donné ; donc, si la somme des HM est donnée, la courbe le sera aussi.

Donc toute la difficulté de la dimension des roulettes est réduite à ce problème :

La circonférence d'un cercle donné étant divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux, et ayant mené des droites d'un point quelconque donné dans le plan du cercle à tous les points de division, trouver la somme de ces droites.

- 18 Une remarque : quand Pascal parle de "la somme de ces droites", il sous-entend "multipliées chacune par les petits arcs MM". Il en est toujours ainsi, le mot *somme* inclut obligatoirement l'idée d'une telle multiplication. Cette abréviation du discours,

et d'autres semblables, conséquences de la liberté des définitions, ont été très précisément mises en place dans le premier traité de la *Lettre I*.

- 19 En résumé : la connaissance de la ligne d'une roulette quelconque revient à celle de la somme des HM MM pour des M en nombre indéfini, également répartis sur la roue, et pour H extérieur à la roue. Voilà donc le faisceau de segments HM , de sommet H , chargé de mission pour résoudre le problème. On peut effacer la roulette, le couple (roue, point H à l'extérieur) suffit désormais.

La deuxième figure, ou Fig. 42

- 20 Une fois la connaissance de la ligne de la roulette rendue équivalente à celle de la somme des HM MM , Pascal construit la deuxième figure, Fig. 42 ; on voit apparaître un cercle AB ¹⁴, des HL , avec L décrivant le demi-cercle AB , faisant penser aux HM avec M décrivant le demi-cercle FC , sur la première figure. Un coup d'œil rapide au texte de Pascal nous dit que cette somme des HL LL n'est autre que la surface du cylindre représenté¹⁵ (son quart, mais peu importe pour le moment), seul susceptible, semble-t-il, de faire apparaître une ellipse si on le coupe par un plan bien choisi.
- 21 L'idéal serait de transformer la première figure en la spatialisant par un relèvement de H , au-dessus du point F , perpendiculairement au plan du cercle FC ; la somme cherchée conduirait au cône de sommet H , puis au cylindre, représentés dans cette deuxième figure, et tout ne serait plus qu'une affaire d'achèvement de calcul.
- 22 Mais comme en témoignent les lettres qui ont changé, le cercle AB (Fig. 42) et le cercle FC (Fig. 41) ne sont pas les mêmes, le relèvement n'a pas eu lieu au-dessus du point F de la première figure pour l'excellente raison que les HM ne conserveraient pas leur longueur dans cette transformation. Il faut garder en mémoire ce fait, cet écueil qui est à la base de tout le dispositif des trois figures.
- 23 En résumé : la somme des HL LL (de la figure 42) est égale au quart de la surface du cylindre caractérisé par sa base, le cercle AC (ou $2AB$) ; sa hauteur, HA ; son axe, HB . C'est ce que dit le *Lemme*, raison d'être de la figure 42. Pour le moment on ne voit pas comment rattacher la somme des HM MM cherchée, qui est plane, à cette somme spatiale des HL LL , malgré une ressemblance formelle certaine.

La troisième figure, ou Fig. 43

- 24 Tout l'art de Pascal a été d'inventer une troisième figure qui fera que la deuxième puisse s'appliquer à la première, autrement dit que l'on puisse installer dans l'espace la première, ou une sœur presque jumelle.
- 25 C'est au prix d'un changement de cercle que le relèvement pourra avoir lieu, sans changer les longueurs des segments HM. Seuls les petits arcs de cercle, éléments infinitésimaux clés de tout le calcul de l'infini pascalien, vont subir une transformation. Cette transformation est innocente, car elle n'est qu'une proportionnalité.
- 26 Voici donc comment Pascal contourne la difficulté par une troisième figure, la plus compliquée des trois, déroutante de plus, par ses notations, puisque son cercle AB ne peut pas être le cercle AB de la deuxième figure, et qu'il en est de même a priori pour les segments HL.
- 27 Voici l'énoncé de la Proposition pour laquelle cette figure 43 a été créée :
- PROPOSITION
- Soit maintenant (fig. 43) le point H donné dans le plan du cercle ALB, et hors le cercle, et soient menées les HL aux points L des divisions égales.
- Je dis que leur somme [la somme des HL LL] est égale à la surface d'un cylindre oblique.
- 28 Il est question d'un cylindre oblique, la figure 43 a donc sûrement pour mission de faire passer de la figure 41 à la figure 42. D'ailleurs, elle est presque la réunion de Fig. 41 et de Fig. 43, en effet :
- 29 – elle recèle Fig. 41 stricto sensu : $\Sigma HL LL$ est la somme requise ; au nom des lettres près, c'est exactement $\Sigma HM MM$ de Fig. 41, et ce changement du nom des lettres ne comporte aucune difficulté ;
- 30 – en revanche, la manière qu'a Fig. 42 de se cacher dans Fig. 43 est subtile ; Pascal a dû fabriquer deux nouveaux points et élever une perpendiculaire au plan au-dessus du premier point, et surtout il s'est livré à quelques acrobaties notationnelles déconcertantes au premier abord.

- 31 Ainsi Pascal construit un premier point V, défini en fonction des données initiales par :
- 32 $BV^2 = BA^2 + 2 AB AH$, puis un deuxième point O qui n'est plus dans le plan du cercle AB.
 Soit aussi élevée VO perpendiculaire au plan du cercle, et soit prise BO égale à BH,
 et soient menées toutes les droites OI (aux points où les droites BL coupent la
 circonférence BIV) : je dis que chaque droite OI est égale à chaque droite HL¹⁶.
- 33 C'est l'imagination qui se charge de voir VO perpendiculaire au plan du cercle, car le
 dessin de la figure est à deux dimensions.
- 34 Bien sûr, la cause finale des points V, O et I est cette égalité entre OI et HL, et l'avantage
 est que OI est dans l'espace.
- 35 En résumé : Il y a un nouveau cercle VB, découpé en un nombre indéfini de petits arcs
 II, chaque I étant obtenu à partir du L du cercle AB de telle sorte que B, L, I soient
 alignés. Les petits arcs II sont donc tous égaux entre eux, comme l'étaient les petits arcs
 LL dessinés sur le cercle AB. Les points V et O ont été définis par des égalités
 algébriques fabriquées exprès pour garder la longueur des HL, tout en passant dans
 l'espace afin de pouvoir appliquer le *Lemme* de la figure 42. À ce stade là Pascal n'a pas
 encore parlé d'ellipse, mais elle ne peut être ailleurs que tapie dans la figure 42.
- 36 Avec ce relèvement décalé par rapport au cercle initial, Pascal a gagné car la somme des
 HL LL est la somme des OI II, à une proportionnalité près, et cette dernière somme est
 exactement du ressort du *Lemme* de la figure 42, en imaginant O (de la figure 43) en
 place de H (de la figure 42) ; V (de la figure 43) en place de A (de la figure 42) ; B restant
 le même.
- 37 Il faudra se souvenir des trois égalités internes à cette figure 43 :
 BO = BH
 HL = OI
 VO = AH
- 38 La première est définitionnelle, pour O, la seconde est le but de l'opération, la troisième
 est parfaitement non-dite par Pascal, et je ne sais comment on peut terminer le calcul
 des axes de l'ellipse sans s'être aperçu, au préalable, par les bienfaits du hasard, que
 VO = AH¹⁷.
- 39 À propos de ce non-dit, tout se passe, à mon sens, comme si Pascal nous disait : « Prenez
 les figures, regardez-les, faites des calculs simples en plus de ceux que j'indique, vous
 allez bien voir où je veux en venir, et vous aurez le plaisir de l'avoir vu vous-mêmes ». J'ai
 envie de dire que c'est la seule façon de se repérer dans ce savant dédale laconique,
 dans lequel les figures explicitent à plusieurs reprises les silences du texte¹⁸.
- 40 En résumé : la troisième figure est là pour créer des OI dans l'espace égaux aux HL du
 plan, OI = HL, chacun au sien, on a changé de cercle pour passer dans l'espace en
 conservant la longueur des HL. La somme des HL LL, celle que l'on veut calculer, devient
 la somme des OI II qui va pouvoir être prise en charge par la figure 42 du *Lemme*, afin de
 s'égaliser à la surface du cylindre. Il faut alors penser le cercle AB de la deuxième figure
 comme étant le cercle VB de la troisième, celui sur lequel se déploient les I. Comme la
 troisième figure comporte aussi un cercle AB, nécessairement autre, il paraît prudent
 de renommer les points de la deuxième figure, quand on y transporte la troisième...
 mais attendons la suite qui réserve quelques surprises à ce propos.

Les grandes lignes de la démonstration finale des axes

- 41 La connaissance de la longueur cherchée, la somme des *BB* de la roulette généralisée a été réduite à la connaissance de la somme des *HM MM* (ces deux sommes sont les mêmes au rayon de la roue près). C'est la raison d'être de la figure 41.
- 42 La connaissance de la somme des *HM MM* a été réduite à celle de la somme des *OI II* (à une constante près), avec *O* dans l'espace comme expliqué ci-dessus. C'est la raison d'être de la figure 43 de mettre la somme requise, celle des *HL LL*, sous une forme qu'accepte la figure 42.
- 43 La figure 42 entre alors en scène pour dire que cette somme est la surface d'un cylindre « oblique » élevé sur un cercle. Ce cylindre coupé par des plans perpendiculaires à son axe va tout de suite donner naissance à un cylindre de même surface, « droit » cette fois, mais dont la base est une ellipse (rien n'est jamais parfait). À l'avant-dernière page de la *Lettre II*, dans la *Conclusion*, alors qu'on l'avait complètement oubliée, l'ellipse vient de faire son apparition¹⁹.
- 44 Un cylindre élevé obliquement sur un cercle a même surface que le cylindre droit élevé sur la section plane perpendiculaire à l'axe. La section est une ellipse, l'aire de ce deuxième cylindre est évidemment égale à la longueur de sa base (l'ellipse) multipliée par sa hauteur (l'axe du premier cylindre).
- 45 Il ne reste plus qu'à préciser l'ellipse en question en la reliant à la roulette généralisée donnée. Ce qui caractérise une ellipse ? Son grand axe, et son petit axe. Ce qui caractérise la roulette ? Le rayon de sa roue, et quelque chose qui dise son degré d'écart à l'ordinaire : la position de *H*, autrement dit une expression qui fait intervenir à la fois la base et la circonférence de la roue :
- En suivant cette méthode, on trouvera le calcul des deux axes de l'ellipse, dont la courbe se compare à celle d'une roulette donnée. [...]
- Soit fait comme la circonférence du cercle générateur à cette même circonférence plus la base de la roulette, ainsi le diamètre du cercle à une autre droite ; cette droite soit le grand demi-axe d'une ellipse.
- 46 Cet énoncé nous fait connaître le grand demi-axe comme quatrième proportionnelle dans une proportion dont trois termes sont donnés. Un nouveau rapport donne la moitié du petit axe :
- Soit fait comme la circonférence plus la base à la différence entre la circonférence et la base, ainsi le grand demi-axe à l'autre demi-axe.
- 47 Enfin Pascal égale l'arche de la roulette à la demi-ellipse qu'il vient de préciser en fonction des données, demi-ellipse qui est une sorte d'arche, si l'on veut :
- La moitié de la courbe de l'ellipse qui aura ces deux demi-axes sera égale à la courbe de la roulette entière, et les parties aux parties.
- 48 Voilà, le but est atteint..., énoncé du moins, car Pascal ne nous dit rien sur la manière de calculer ces axes. Il a juste écrit, en parlant du "calcul des deux axes de l'ellipse" :
- Le voici tel que je le fis envoyer à beaucoup de personnes au commencement de septembre, en Angleterre, à Liège, et ailleurs, et entre autres à Monsieur de Roberval, à Monsieur de Sluze, et quelque temps après à Monsieur de Fermat.
- Or le calcul des axes ne figure nulle part, on ne le trouve dans aucune correspondance, à défaut de le trouver ici... Il n'y a même pas d'indication géométrique pour exhiber ces axes. Donc quand Pascal dit qu'il a fait envoyer le "calcul des deux axes de l'ellipse", il faut entendre par là « le résultat du calcul ». Pourtant il a nécessairement effectué des constructions géométriques menant à un

calcul pour obtenir les formules explicitant les axes, et tout cela est plus long que d'autres calculs algébriques que Pascal a pris la peine d'écrire. Le style elliptique pascalien atteint ici un sommet inégalé dans ses autres écrits mathématiques.

Remarque

- 49 Les axes de l'ellipse, tels que vient de les dire Pascal, étaient lisibles sur la figure 41, tout au début, donc. Lisibles, mais non-dits. Les voici :
- Grand demi-axe = 2 HC
 - Petit demi-axe = 2 HF
- 50 Ces égalités sont très faciles à vérifier ²⁰, mais il est paradoxal de voir que les axes de l'ellipse figuraient déjà, d'avance, et de manière patente sur la première figure, sans que Pascal n'en dise rien. Il vaut mieux une deuxième fois, à l'instar de l'égalité $VO = AH$, s'en être rendu compte au préalable, car les axes vont apparaître sous cette forme, 2 HC, 2 HF, à la fin du calcul. Ce que l'on va voir dans le paragraphe suivant.

La démonstration finale des axes en calculs

- 51 Ce paragraphe peut être considéré comme une annexe, dont la place ici est justifiée par la proximité avec ce qui vient d'être dit. Il est destiné à ceux des lecteurs qui veulent avoir vraiment le calcul des axes, en quelque sorte le finale du concerto, mais après tout, on peut aussi bien faire confiance à Pascal qui n'a pas jugé bon de nous obliger à lire par le menu des intermédiaires démonstratifs.
- 52 Suivons l'ordre de Pascal, assez précis pour commencer, jusqu'à ce que l'auteur nous abandonne. Il s'agit de calculer $\Sigma HL LL$ (qui est $R/2$ fois la longueur de l'arche de la roulette, cf. Fig. 41), et $OI = HL$, O et I , redisons-le, ont été fabriqués tout exprès dans la figure 43.
- Donc la somme des OI est la même que la somme des HL , (si on les multiplie chacune par les mêmes petits arcs) ; mais la somme des OI (multipliée par les petits arcs II , lesquels sont égaux entre eux, puisque les arcs LL le sont par l'hypothèse) est égale au quart de la surface d'un cylindre oblique, par le lemme, puisque VO est perpendiculaire au plan du cercle BIV .
- 53 Mot-à-mot : $(\Sigma OI) II = (\Sigma HL) II$ ($OI = HL$, but de la figure 43).
- 54 Mais $\Sigma OI II$ est le quart de la surface du cylindre bâti obliquement sur le cercle 2 VB, cylindre dont l'axe est OB , et la hauteur OV , c'est ce que dit le lemme, exactement, par simple transposition des lettres.
- 55 Écrivons ainsi cette égalité en précisant à l'intérieur de la parenthèse les éléments qui caractérisent le cylindre :

$$\Sigma OI II = 1/4 \text{ Surf. cyl. (cercle 2 VB ; axe OB ; hauteur OV).}$$

Donc la somme des HL , multipliée par les mêmes arcs II , est égale au quart de la même surface. Donc la somme des HL , multipliée par les petits arcs LL , est aussi égale à une surface d'un cylindre oblique proportionnée à l'autre.

- 56 Précisons cette proportion :

$$\Sigma HL LL = (\Sigma HL II) \times \frac{LL}{II} = \frac{1}{4} \frac{AB}{BV} \times \text{Surf. Cyl. (cercle 2 VB ; axe OB ; hauteur OV).}$$

puisque le rapport LL/II , constant, est celui des rayons des deux cercles. Il s'agissait juste de changer d'élément infinitésimal, de passer de II à LL . Les données et l'inventivité de Pascal ont mené à un cylindre oblique dont la base est un cercle.

- 57 Il revient au même de multiplier le rayon du cercle par AB/BV ou de multiplier la surface du cylindre par ce même coefficient, toutes choses restant égales par ailleurs, on a donc :

$$\Sigma HL LL = \frac{1}{4} \text{ Surf. Cyl. (cercle } \frac{AB}{BV} \times 2 VB ; \text{ axe } OB ; \text{ hauteur } OV)$$

$$\Sigma HL LL = \frac{1}{4} \text{ Surf. Cyl. (cercle } 2 AB ; \text{ axe } OB ; \text{ hauteur } OV) .$$

- 58 Autrement dit, puisque nous n'avons pas quitté la figure 43, la somme des $HL LL$ est le quart de la surface d'un cylindre oblique bâti sur le cercle de diamètre $2 AB$, d'axe OB , et de hauteur OV . Ce cylindre est franchement irréel, ses éléments de construction sont épars (sa hauteur n'est pas à la verticale de A), tout est disloqué pour un bref instant. Il faudrait dire : un cylindre bâti sur un cercle de diamètre égal à $2 AB$, dont l'axe est égal au segment OB et dont la hauteur est égale au segment OV .

- 59 Mais, puisque nous n'avons pas quitté la figure 43, la somme des $HL LL$ est le quart de la surface d'un cylindre oblique bâti sur le cercle de diamètre $2 AB$, d'axe HB , et de hauteur AH , en effet il faut se souvenir que, dans cette figure 43, OB est égal à HB , et VO est égal à AH . Finie la désarticulation. Nous sommes arrivés à cette expression remarquable du cylindre exprimé dans la géométrie de la figure 43 :

$$\Sigma HL LL = \frac{1}{4} \text{ Surf. Cyl. (cercle } 2 AB ; \text{ axe } HB ; \text{ hauteur } AH)$$

- 60 Remarquable, en effet, car ce sont justement les lettres de la figure 42 ! Il n'y a besoin de changer aucune lettre, le cercle AB avait disparu, remplacé par le cercle de diamètre VB , pour garder les longueurs dans le passage du plan à l'espace, et voilà que, à la faveur d'un coefficient placé devant la surface du cylindre, le cercle de diamètre AB fait un retour (Pascal est un prestidigitateur). Après cet escamotage-réapparition digne du cinéma de Méliès (nous aurions juré que les cercles AB des figures 42 et 43 ne pouvaient pas être les mêmes, ils ne le sont pas géométriquement, mais « tout se passe comme si », grâce à une proportionnalité apparue en cours de calcul), le cercle VB qui apparaissait incontournable (et qui l'est en effet pour amorcer la démonstration) a disparu corps et biens des calculs ; Pascal a eu bien raison, *a posteriori*, si déroutant que ce soit, de nommer les cercles comme il l'a fait.

- 61 Ce cylindre « oblique » coupé par des plans perpendiculaires à son axe va tout de suite donner naissance à un cylindre de même surface, « droit » cette fois, mais dont la base est une ellipse. Pour la première fois, à l'avant-dernière page de la *Lettre*, alors qu'elle en est le sujet²¹, l'ellipse fait son apparition :

Conclusion

De toutes lesquelles choses il s'ensuit que la somme des *représentantes* HM (fig. 41), étant égale à la surface d'un cylindre oblique, elle sera par conséquent égale au rectangle qui a pour hauteur l'axe du cylindre oblique, et pour base la courbe de l'ellipse engendrée dans la surface du cylindre oblique par le plan perpendiculaire à l'axe. Or, la même somme des *représentantes* est déjà montrée égale à la courbe de la roulette multipliée par le rayon du cercle générateur. Donc la courbe de la roulette, multipliée par le rayon, est égale à la courbe d'une ellipse multipliée par l'axe d'un cylindre oblique donné. [...] Ce qu'il fallait démontrer.

- 62 On se souvient qu'il faut multiplier $\Sigma HL LL$ par $2/R$ pour obtenir la longueur de l'arche entière de la roulette, ainsi :

$$\text{Longueur roulette} = \frac{2}{R} \Sigma HL LL = \frac{1}{2R} \times (\text{longueur de l'ellipse-section}) \times HB,$$

puisque l'axe du cylindre oblique devient la hauteur du cylindre droit. Voilà l'égalité simple qui relie la courbe de la roulette entière (l'arche) à la courbe d'une ellipse. Il ne reste plus qu'à faire connaître par ses axes l'ellipse en question. Je dis que l'ellipse-section a pour petit axe AC' (C' sur IC , tel que AC' soit perpendiculaire à IC , C' n'est pas noté sur la figure), et pour grand axe AC , le diamètre du cercle sur lequel est élevé le cylindre oblique. Bien sûr, ce n'est pas la position géométrique de AC' et de AC'' qui compte ici, mais leur longueur.

- 63 Que AC' soit l'un des deux axes est évident, puisque AC' est perpendiculaire à l'axe du cylindre. Pour voir que AC est l'autre axe, mener le rayon BC'' perpendiculaire à AB , alors BC'' est perpendiculaire à deux droites du plan ABH (à savoir, AB , par définition de C'' , et AH , car AH est perpendiculaire à toutes les droites du plan de base ; en réalité, C'' n'est autre que T car T est le milieu de l'arc AC ²²) ; BC'' , perpendiculaire à deux droites du plan ABH , est perpendiculaire à toute droite de ce plan, donc à BH , cela suffit pour que 2 fois BC'' , i.e. AC , soit le grand axe de l'ellipse-section. Le rapport des deux est le quotient (triangles semblables) de HA par HB .

- 64 En résumé, voici les deux axes de l'ellipse visibles dans la figure clé qu'est la figure 42 :

- 65 Grand axe = AC ,

$$\text{Petit axe} = AC \times \frac{HA}{HB} \text{ (c'est } AC').$$

- 66 Ce qui nous permet d'écrire plus précisément :

$$\text{Longueur roulette} = \frac{HB}{2R} \times \text{long. ellipse (grand axe } AC ; \text{ petit axe } AC \times \frac{HA}{HB}) .$$

- 67 Bien qu'on ne connaisse pas de formule pour la longueur d'une ellipse, il est certain que multiplier la longueur d'une ellipse par un coefficient revient à multiplier ses deux axes par ce même coefficient, ainsi on peut faire entrer $HB/2R$ à l'intérieur de la parenthèse et écrire :

$$\text{Longueur roulette} = \text{long. ellipse (grand axe } AC \times \frac{HB}{2R} ; \text{ petit axe } AC \times \frac{HA}{HB} \times \frac{HB}{2R}) .$$

Comme $AC = 4R$, il vient :

Longueur roulette = long. ellipse (grand axe $2HB$; petit axe $2HA$).

Traduite en lettres de la figure 41, l'égalité s'écrit :

Longueur roulette = long. ellipse (grand axe $2HC$; petit axe $2HF$).

- 68 Une fois le coefficient devant la longueur de l'ellipse rentré dans les axes, la figure 42 se retire, elle a joué son rôle ; nous sommes dans la figure 41, et nous découvrons avec stupéfaction que les axes étaient là, sous nos yeux, à notre plus total insu, car Pascal n'en avait soufflé mot. Mais Pascal veut égaler l'arche de la roulette, non pas à une ellipse, comme le fait le calcul, mais à une demi-ellipse, comme c'est logique, puisque c'est une demi-ellipse qui a une forme d'arche ; il faut donc prendre l'ellipse double, donc celle dont les *demi-axes* sont $2HC$ (le grand demi-axe) et $2HF$ (le petit demi-axe).

- 69 Ce n'est pas sous cette forme que Pascal exprime les deux demi-axes, citons-le à nouveau :

Soit fait comme la circonférence du cercle générateur à cette même circonférence plus la base de la roulette, ainsi le diamètre du cercle à une autre droite ; cette droite soit le grand demi-axe d'une ellipse. Soit fait comme la circonférence plus la base à la différence entre la circonférence et la base, ainsi le grand demi-axe à l'autre demi-axe.

- 70 Vérifions que le grand demi-axe donné par Pascal est bien 2 HC. Pascal affirme :

$$\frac{2\pi R}{2\pi R + \text{Base}} = \frac{2R}{\text{Grand demi-axe}}$$

et on sait (discours de la figure 41) que l'égalité de définition de H est :

$$\frac{2\pi R}{\text{Base}} = \frac{GF}{GH}$$

- 71 L'identité entre le grand demi-axe et 2 HC est presque évidente car :

$$\text{si } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{alors } \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma}{\gamma + \delta} ,$$

en vertu de quoi,

$$\text{si } \frac{2\pi R}{\text{Base}} = \frac{2GF}{2GH} \quad \text{alors } \frac{2\pi R}{2\pi R + \text{Base}} = \frac{2GF}{2GF + 2GH}$$

ou encore :

$$\frac{2\pi R}{2\pi R + \text{Base}} = \frac{2R}{2HC}$$

- 72 En comparant avec la première égalité, celle qu'énonce Pascal pour le grand demi-axe, selon Pascal, qui n'a jamais dit comment il l'avait trouvée, on voit que ce grand demi-axe est bien 2HC. On trouverait pareillement que le petit demi-axe est bien 2HF, mais il est temps de s'arrêter.

Le calcul de l'infini à la manière de Pascal : les "petits arcs"

- 73 Il y a quatre démonstrations mettant en jeu des éléments infiniment petits, qui sont tous dans cette *Lettre* des « petits arcs nés d'une subdivision de l'arc en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points... »

Similitude entre deux séries de triangles de nature différente

- 74 Tout au début, sous l'égide de la figure 41²³, “[la roue est divisée] en un nombre indéfini d’arcs égaux aux points M”, puis Pascal mène des parallèles à la base qui coupent la roulette en B. La roulette se voit ainsi divisée en un nombre indéfini de divisions inégales aux points B. Pascal confond alors l’arc BB et la sous-tendante (la corde) BB, comme on fait au XVII^e siècle, et suppose, dans un langage étonnamment prémonitoire que :

Les divisions de la circonférence sont en si grand nombre que la somme de ces droites BB ne diffère de la courbe que d’une ligne moindre qu’aucune donnée.

- 75 On remarque l’aspect à la fois potentiel et actuel de cette subdivision en un nombre indéfini (actualité) et en si grand nombre que... (potentialité).
- 76 La roue roule, le point C initial (le clou) engendre les points B de la roulette (voir ci-dessus, au début, ce que dit Pascal décrivant la roulette à la suite de Mersenne), et pour chaque position de la roue, MB recoupe cette position de roue en O.
- 77 Le point H défini par

$$\frac{\text{demi-circonférence}}{\text{base demi-arche}} = \frac{GF}{GH}$$

- 78 exprime la manière dont la roulette s’écarte de l’ordinaire, celle qui roule sans glisser, pour laquelle la base FA serait exactement la longueur arc CF de la roue. Ce qui nous intéresse ici, c’est que ce rapport se retrouve pour chaque avancée, même infinitésimale, de la roue, c’est-à-dire que l’on a aussi le rapport

$$\frac{\text{arc BO}}{\text{portion de parallèle OB}} = \frac{GF}{GH}.$$

- 79 En remplaçant GF par son égal GM, cette égalité exprime que les triangles infinitésimaux de côtés (arc BO, portion de parallèle OB, BB) et les triangles finis de côtés (GM, GH, HM) sont semblables, chacun au sien, puisque les angles en O et en G sont égaux (angles à côtés perpendiculaires ; la portion de parallèle OB est perpendiculaire à GH, et l’arc BO est perpendiculaire à GM, car l’arc BO est l’arc MM translaté). On a alors l’égalité

$$\frac{\text{arc BO}}{GM} = \frac{BB}{HM}.$$

- 80 et BB est “représenté” par HM puisqu’ils sont dans le rapport constant (les arcs BO étant égaux à MM)

$$\frac{MM}{GH}.$$

Il arrivera que toutes ces droites [les HM] seront entre elles comme les sous-tendantes BB de la roulette, c’est pourquoi je les appelle les *représentantes*²⁴.

- 81 Les *représentantes* HM sont des segments finis harmonieusement répartis sur un objet géométrique familier, le cercle, elles remplacent agréablement ces cordes

infinitésimales BB de roulette dont les relations géométriques internes ne sautent pas aux yeux.

- 82 En faisant les produits en croix, on a l'égalité $R \times \Sigma BB = \Sigma HM MM$ qui réduit le problème de roulette à un problème de cercle. Cette réduction a été obtenue grâce à la similitude d'une collection de triangles infinitésimaux à une autre collection de triangles de côtés finis, chacun à chacun.
- 83 Pascal a employé un triangle caractéristique dans un lemme célèbre du *Traité des sinus du quart de cercle* (le troisième traité de la *Lettre I*). Ici il s'agit d'une extension de l'idée de triangle caractéristique car tout bouge quand le nombre de subdivisions augmente, tandis que le « triangle caractéristique » au sens strict devient de plus en plus petit, mais reste semblable à un triangle fixe.

H extérieur ou H intérieur, c'est la même chose

- 84 Le résultat de Wren²⁵ a tout de suite été traduit par Pascal dans son langage propre, tout de suite été généralisé à toutes les sortes de roulettes par une méthode unifiée, et il reste encore une unification à faire, savoir : le cas du point extérieur englobe le cas du point intérieur.

Et si on résout ce problème quand le point donné est au dehors, il sera résolu en même temps quand le point est au dedans.

Car s'il y a deux cercles concentriques, dont les circonférences soient divisées chacune en un nombre indéfini d'arcs égaux la somme des droites menées d'un point quelconque de la grande circonférence à tous les points de division de la petite sera la même que la somme des droites menées d'un point quelconque, pris dans la petite circonférence, à tous les points de division de la grande. Et chacune des droites d'une multitude sera égale à chacune des droites de l'autre multitude, parce qu'elles sont les bases de triangles égaux et semblables. Et ainsi la somme des unes sera égale à la somme des autres, pourvu qu'elles soient multipliées par les mêmes arcs. Mais si on entend qu'elles soient multipliées chacune par les arcs auxquels elles se terminent, alors la somme de celles qui sont menées aux divisions de la grande circonférence sera à la somme des autres comme la grande circonférence est à l'autre, ou comme le grand rayon au petit. Et ainsi, si la somme des unes est donnée, la somme des autres le sera aussi, les deux cercles étant donnés.

- 85 Pascal ne donne pas de figure, laquelle est très facile à faire.

- 86 H est intérieur à la roue : le cercle de rayon GF avec les lettres de la première figure ; Pascal trace un deuxième cercle, de rayon GH. En appelant N les points équi-répartis sur le petit cercle et M ceux du grand, comme sur le dessin, chaque droite FN est égale à chaque droite HM, chacune à la sienne, non tracées pour ne pas surcharger le dessin. F joue le rôle de point extérieur au petit cercle, lequel joue le rôle de roue auxiliaire.
- 87 Mot-à-mot voici ce que dit Pascal, sachant que MM/NN est le rapport du grand rayon au petit :

$$\begin{aligned} HM &= FN \\ \sum HM \cdot MM &= \sum FN \cdot MM \\ \sum HM \cdot MM &= \sum FN \cdot NN \times \frac{MM}{NN}, \\ \sum HM \cdot MM &= \sum FN \cdot NN \times \frac{FG}{GH}. \end{aligned}$$

- 88 Le second membre de la dernière égalité sera connu, dès lors qu'on saura résoudre le problème pour un point extérieur, donc le requis sera connu après avoir lu la *Lettre II*.
- 89 La seconde égalité est un fugitif intermédiaire de calcul pour éviter d'écrire $\sum HM = \sum FN$, égalité entre deux infinis, purement formelle et explicitement interdite par le formalisme pascalien. Mais multiplier FN par MM est artificiel et tout rentre dans l'ordre à la troisième égalité, où les segments sont "multipliés chacun par les arcs auxquels ils se terminent".

L'égalité du *Lemme*, sous l'égide de la figure 42

- 90 Dans la figure 42, il y a trois séries de "petits arcs" et un foisonnement d'égalités : les LL, sur le cercle AB, essentiellement à imaginer, puisque deux L seulement sont représentés ; les MM sur le cercle AC de rayon double, trois M sont notés et l'un des trois a deux noms, M et T ; les NN sur le cercle du haut. Tous les LL, tous les MM, tous

les NN sont égaux entre eux ; de plus $LL = MM = NN$. Pascal précise ce que sont les L au début de cette figure du *Lemme* :

Soit le cercle donné ALB, (fig. 42), dont la circonférence soit divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux en L.

et considère, sans doute, que la figure est assez parlante pour dire comment M et N se déduisent de L. S'il est évident que N se déduit de M en suivant la génératrice, il ne ressort pas immédiatement de la figure que M se déduit de L par le fait que l'angle LBM est droit. Pascal ne le mentionne qu'à la fin pour les besoins de la démonstration, en passant, comme si cela allait de soi.

- 91 On remarque que, lorsque L est en A, M est en T, point qui marque la moitié du demi-cercle AC ; que, quand L est en B, M est en C, puisque LB est alors la tangente en C.
- 92 Donc, quand les L se répartissent sur le demi-cercle AB, les M se répartissent en le même "nombre indéfini" sur le quart de cercle TC, donnant lieu à une profusion d'égalités :

Mais les arcs MM sont égaux tant entre eux qu'aux arcs LL [...]

- 93 Vrai, puisque la longueur d'un demi-cercle est la même que celle d'un quart de cercle de rayon double, et qu'on subdivise en « le même nombre indéfini d'arcs égaux ». L'égalité entre MM et LL va tout de suite servir dans la preuve du *Lemme* qui énonce que :

La somme des droites HL, multipliées chacune par chaque petit arc LL, est égale au quart de la surface du cylindre oblique, qui aura pour base le cercle AMC, dont le rayon sera de AB, et pour axe la droite HB, menée à l'autre extrémité du diamètre AB.

- 94 Sur la tangente en M (la touchante), on abaisse la perpendiculaire NO, qui est la hauteur du parallélogramme infinitésimal NNMM. Ces parallélogrammes composent, comme dit Pascal, la surface oblique IVTC qui n'est autre que le quart du cylindre entier. Chacun des parallélogrammes a pour surface NO MM (imaginer MM vraiment très petit, plus que sur la figure MM et O sont alors alignés) et Pascal montre que $HL = NO$, de par l'égalité des triangles HLB et NOM. On se souvient que $LL = MM$, et du coup,

$$\Sigma HL LL = \Sigma NO MM$$

- 95 c'est-à-dire le quart de cylindre.
- 96 Le *Lemme* est donc démontré moyennant l'égalité des triangles HLB et NOM qui découle de :
- 97 – $HB = NM$, de par la correspondance entre N et M le long d'une génératrice
- 98 – Angle en B = Angle en M, car BL est parallèle à OM, BM étant leur perpendiculaire commune ; HB est parallèle à NM, c'est la structure d'un cylindre)
- 99 – Angle en L = Angle en O = un droit (car l'Angle en O est droit par définition de O, et BL est perpendiculaire à HL, puisque perpendiculaire aux deux droites AL et HA du plan AHL).

- 100 Plusieurs remarques :

- 101 – La figure est faite pour représenter un parallélogramme MMNN avec M et M infiniment proches, mais ce n'est pas ce qu'elle fait. Deux points M infiniment proches seraient à la fois sur le cercle et sur sa tangente en M (la droite MO) ; le point O, lui, est à distance finie de M sur la tangente, à un endroit où la tangente ne coïncide plus du tout avec le cercle. Pour un point M dessiné « très près » du point M de tangence, les

trois points M, M et O seraient alignés, mais la figure ne serait plus lisible ; Pascal a donc dessiné les points M trop distants, le prix à payer, c'est que M, M et O ne sont plus alignés, mais qu'il faut les penser tels, autrement dit, imaginer le deuxième point M sur le cercle avant que la tangente ne s'en sépare. On a ici affaire à une *vraie* représentation, si l'on entend par là *différente d'une simple copie*, en ce sens que le dessin est partiellement déconnecté de la réalité. La logique veut que la courbe coïncide étroitement avec la tangente, le dessin l'interdit, sous peine de confusion.

- 102 – Des deux termes de l'égalité qui constitue le *Lemme*

$$\Sigma HL LL = \Sigma NO MM$$

seul le deuxième représente une aire géométrique visible sur la figure, le premier est abstrait, il ne représente rien de visible, il faudrait lui faire subir des transformations pour le voir géométriquement. Le cas est fréquent chez Pascal, et cela peut même aller très loin, comme lorsque Pascal, écrit Dominique Descotes, « n'hésite pas à traiter en mêmes termes de sommes d'arcs, de carrés, de cubes et de carrés-carrés d'arcs. De telles constructions cessent d'être soumises aux limites de la géométrie naturelle²⁶. »

- 103 – Cette démonstration qui jongle avec les infiniment petits géométriques témoigne de l'aisance de Pascal avec ces êtres qui défient la logique, qu'on ne peut pas vraiment représenter, car ou bien c'est faux (MM existe, et peut donc toujours être encore plus petit et ce que l'on en dit n'est vrai qu'approximativement), ou bien c'est juste (MM s'évanouit, mais il n'y a plus rien sur quoi raisonner : par exemple pour qu'un morceau de courbe se confonde vraiment avec la tangente, il faut qu'il n'existe plus...) Tout le monde manie cette contradiction apparente au XVII^e siècle sans faire d'erreur, mais plus particulièrement un esprit habitué à réfléchir à l'infini, et à distinguer l'esprit de géométrie de l'esprit de finesse en mettant plus haut le second. La géométrie infinitésimale sur ses débuts est à mon sens le royaume de l'esprit de finesse.

Voyage des petites portions d'un cercle à l'autre, leur autonomie

- 104 Dans la figure 43, il y a aussi trois séries de *petits arcs*, les LL, les II, les ZZ. Ne nous occupons que des LL et des II²⁷. Les LL sont sur le cercle AB, qui est la roue de la figure 41 installée dans la figure 43 ; les II sont sur le cercle VB qui, rappelons-le, est le substitut de la roue admissible dans la figure 42. Les *petits arcs* LL et II sont liés par un rapport de proportionnalité :

$$LL = II \times \frac{AB}{BV}$$

- 105 On se souvient de l'égalité HL = OI (OI dans l'espace, voir le paragraphe dédié à la figure 43). En vertu de quoi Pascal écrit plus bas ce qui se traduit mot-à-mot par l'égalité :

$$\Sigma OI II = \Sigma HL II = \Sigma HL LL \times \frac{LL}{II}$$

- 106 (voir les deux premières citations du paragraphe dédié au calcul des axes) qui donne $\Sigma HL LL$ via la figure 42, c'est le but de toute l'opération, bien sûr, mais ce qui m'intéresse ici, c'est l'écriture $\Sigma HL II$ "donc la somme des HL multipliée par les mêmes arcs II" dit Pascal etc. Généralement les sommes pascaliennes, ces sommes d'éléments géométriques finis multipliés par des éléments infinitésimaux qui naissent de la division d'une ligne en un nombre indéfini de... ont toujours la forme $\Sigma OA AA$ ou $\Sigma OA OO$, mais pas $\Sigma OA TT$ où T n'est ni O ni A... Il y a une sorte de délocalisation

étrange à séparer les HL de leurs infiniment petits naturels et de les multiplier par les II qui ne sont pas attenants. Comme si, en langage leibnizien, on rencontrait une « somme de $f(z)dt$ ». C'est un signe de l'autonomie des "petites portions" pascaliennes (qui sont toujours dans la *Lettre II* issues d'un arc de cercle, c'est-à-dire des "petits arcs").

Il y a un véritable concept de différentielle chez Pascal

- 107 En quoi consiste la spécificité du calcul de l'infini chez Pascal, *son timbre propre* dirait Bourbaki²⁸ ? Au XVII^e siècle, tout le monde remet en cause, ou du moins aménage, la méthode d'exhaustion beaucoup trop lourde, devant l'afflux des nouvelles « fonctions » (logarithme, roulette, conchoïde, etc) ; méthode des indivisibles avec une dimension de moins que les objets à calculer de Cavalieri, empilements de rectangles à épaisseur infinitésimale de Roberval ou Torricelli, calcul avec des proportions d'apparence euclidienne, audacieusement étendues à l'infini, de Wallis, etc.
- 108 Le *timbre propre* à Pascal est profond, Pascal dégage une idée, l'idée de différentielle ; ce n'est pas à dire que les autres, notamment Roberval²⁹, ne fassent figurer dans leurs calculs des éléments que nous lisons aujourd'hui comme des différentielles, mais c'est Pascal qui dégage l'idée de "petites portions", qui les nomme, les considère pour elles-mêmes. Cela se trouve dans le premier traité de la *Lettre I* : les "petites portions" y sont définies de manière générale comme naissant de la subdivision (en un nombre indéfini de parties égales aux points...) d'une droite (assimilable à notre axe des x ou des y) ou d'une courbe générale (pas seulement un cercle, comme c'est le cas dans la *Lettre II*). Les "petites portions" donnent alors lieu à tout un système d'abréviation clairement formulé – et Pascal s'y connaît en matière de définition de nom –, ainsi qu'à de multiples illustrations. Au terme de la *Lettre à Carcavy*, Pascal aura fait part à ses lecteurs d'un vrai concept de différentielle (géométrie)³⁰.
- 109 Toutes ces "petites portions" pascaliennes que nous lisons aujourd'hui, à la fois justement et abusivement, comme des *ds*, des *dx* ou des *dy* donnent lieu à des échanges ; par exemple, on l'a vu dans cette *Lettre à Huygens*, les LL deviennent des II dans la démonstration sous l'égide de la figure 43 ; par exemple aussi, plus signifiant, dans le *traité des trilignes*, le deuxième de la *Lettre I*, toutes les propositions générales sont des égalités de "sommés" écrites avec des "petites portions" nées de lignes différentes, anachroniquement : *dx* dans le premier membre, *dy* ou *ds* dans le second³¹.
- 110 Nous sommes en 1658. Le concept de différentielle, invention dont on crédite de Leibniz, date de 1675 environ. En quoi les « différentielles géométriques » de Pascal, comme il me semble juste de les nommer, préfigurent-elles les différentielles analytiques de Leibniz ? En quoi en diffèrent-elles notablement ?
- 111 Dans *Historia et Origo*, Leibniz livre le cheminement de sa découverte du calcul intégralo-différentiel. Tout a commencé dans l'arithmétique : une suite donnée donne naissance à une autre suite obtenue en faisant la différence de deux termes consécutifs, rien n'empêche de recommencer avec cette deuxième suite, et ainsi *ad infinitum*... L'opération *d* qui consiste à prendre la différence est d'entrée de jeu susceptible d'être répétée.
- 112 Sans entrer dans les détails disons que les *différences infinitésimales* s'originent dans les *différences finies*. Traduite dans le calcul infinitésimal, cette opération *d* – la notation *d* est un immense coup de génie – se répète aussi, et on arrivera aux dérivées successives et aux innombrables développements que cela permet. Rien de tel avec MM qui nous

laisse stagner au premier ordre, car l'objet MM n'est pas vu comme une différence (et encore moins comme un opérateur) puisqu'il naît d'une division indéfinie, et non pas de la soustraction entre deux éléments consécutifs – géométriques ou analytiques, peu importe ici³².

- 113 La seule chose dont on peut créditer Pascal, et ce n'est pas rien puisque personne ne l'avait fait avant lui, c'est d'avoir isolé par la pensée et par une notation (du genre MM) ces “petites portions” géométriques qui sont le début, le nécessaire stade un de la différentielle leibnizienne promise à un avenir indéfectible, puisqu'elle aura finalement bravé tous les changements de statut qu'on lui a fait subir afin de la rendre compatible avec la logique³³. Le seul point commun indéniable entre les différentielles de Pascal et celles de Leibniz est la manière dont elles figurent dans les intégrales (les *sommes*, dit Pascal), c'est un calque si l'on fait abstraction de la nature géométrique de ces *sommes*. Pascal est capable de répéter l'opération *somme*, i.e. de créer, à sa manière, des intégrales doubles ou triples, comme il le fait dans la *Lettre I*, mais il n'y a pas de début d'idée de différentielle d'ordre supérieur : la notation MM ne se prête pas à noter la répétition³⁴.
- 114 En revanche, jusqu'à preuve du contraire, je pense pouvoir affirmer que personne d'autre que Pascal n'a, avant Leibniz, fait usage conscient de différentielles pour calculer.

L'art d'agréer : beauté et harmonie des dessins jusque dans les notations

- 115 Retournons au calcul des axes effectué ci-dessus. La logique veut que ce soit le cylindre oblique bâti sur le cercle de diamètre 2 VB (Fig. 43) – celui que nous avons appelé Cyl. (cercle 2 VB ; axe OB ; hauteur OV) – que l'on transporte dans Fig. 42. Ce cylindre est facile à imaginer dans Fig. 43 avant son transport dans Fig. 42. Mais il est précédé, calculatoirement parlant, du coefficient AB/BV.
- 116 Deux chemins sont alors possibles, on peut :
- 117 (1) Continuer en calculant les axes de l'ellipse-section-droite de Cyl. (cercle 2 VB ; axe OB ; hauteur OV), grâce à la figure 42, en lui mettant de nouvelles lettres : V à la place de A, O à la place de H, B restant B ; d'autres coefficients vont apparaître, que l'on fera entrer en compagnie de AB/BV dans les axes de l'ellipse, et ce, tout à la fin. Tout ira bien, se simplifiera ; mais c'est long, et, surtout, on ne comprend pas pourquoi Pascal a mis ces lettres trompeuses à la figure 42 : pourquoi il a nommé d'un même nom AB deux cercles « nécessairement » différents. Cela ne lui ressemble guère : il ôte la confusion (un peu partout), jamais il n'en crée.
- 118 (2) Faire entrer tout de suite AB/BV à l'intérieur de la parenthèse pour avoir Cyl. (cercle 2 AB ; axe OB ; hauteur OV) ou (tour de passe-passe) Cyl. (cercle 2 AB ; axe BH ; hauteur AH), c'est ce qui est fait dans le paragraphe-calcul-des-axes, c'est plus court, et, surtout, c'est plus conforme à l'esprit de Pascal, étranger à la confusion. Pascal, par cette identité de notation nous informe d'avance de ce qu'il veut que nous fassions ; une fois de plus, et magistralement, les figures parlent à la place du texte qui se tait. Le deuxième est le bon chemin pour calculer les axes, inutile de renommer les points comme en (1) puisque les lettres A, B, H de la figure 42 sont, contre toute attente, pertinentes : un tour de magie qui s'est opéré spontanément sur les notations a rendu

possible l'impossible. Simplement parce que, en cours de calcul – c'était difficile à deviner ! – les segments se sont affranchis de leur position géométrique, ils ne sont plus que des segments « à une égalité près ». Pascal calcule avec la géométrie comme si c'était de l'algèbre. L'économie du changement de notation engendre, comme toute économie de moyens, un grand sentiment d'esthétique ici.

- 119 Une remarque plus générale qui concerne tout le calcul infinitésimal de l'auteur : Pascal utilise toujours la même lettre pour signifier les points issus du découpage d'une ligne en un nombre indéfini de parties égales. Il est seul à faire cela, pourtant cette notation est plus claire que celle, courante, par lettres successives comme A, B, C, etc., qui laisse toujours une impression étrange née de la finitude de l'alphabet : que faire quand les vingt cinq lettres auront été utilisées ? Une seule lettre, répétée, pour imaginer une infinité de points, voilà qui est simple, harmonieux à regarder, et logiquement satisfaisant.
- 120 Dans la figure 41, cinq points M sont marqués pour représenter l'infinité (l'indéfinité, si l'on ose dire), ceux des extrémités recevant deux noms, M et C, M et F.
- 121 La figure 42 montre que Pascal a pensé tous les détails. Le point L décrit le demi-cercle AB ; seuls deux des L nés de la division en un nombre indéfini d'arcs égaux en L sont représentés ; représenter l'infini par deux est audacieux, mais Pascal a soigneusement mis un L sur chacune des moitiés du demi-cercle, pour indiquer que l'infinité s'étendait des deux côtés. En revanche, les points M marqués par Pascal sont tous sur la moitié droite du grand demi-cercle AC ; de plus on voit que le dernier point M sur la gauche s'appelle aussi T, point qui marque la moitié du demi-cercle AC. C'est une façon graphique, meilleure qu'un discours, d'indiquer la nature de la correspondance entre L et M. En effet, quand L part de A, M part de T, puisque T est le premier point M, et l'angle LBM, ou ABT, est droit au départ ; il y a toutes les chances que l'angle LBM soit droit tout le temps, et c'est bien le cas. Inutile de le dire, le dessin parle. Si on lève un peu les yeux, on voit que la même chose a lieu sur le cercle du haut, de diamètre KI, avec le point marqué V et si l'on joint VT avec une règle il apparaît que VT est parallèle à toutes les génératrices MN. Le dernier M et le dernier N sur la gauche ont deux noms (à un lapsus près, voir la note qui suit). Cette manière d'indiquer les points frontière par deux noms, un nom de point générique et un nom de point d'arrêt est propre à Pascal³⁵. Le dessin de la figure 42 est un travail d'orfèvre ciselé dans ses moindres détails.
- 122 Œuvres du graveur et du mathématicien, les trois figures sont impressionnantes tant dans l'ensemble logique qu'elles réalisent que dans le choix de leurs notations. En elles se mêlent une perfection de l'architecture et une perfection de l'iconographie. Un art de persuader comme un art d'agréer.

Le droit et le courbe : les idées du siècle et de Pascal, le dénouement par Fermat

- 123 La partie mathématique de la *Lettre à Huygens* s'achève lorsque Pascal donne ce qu'il appelle, bien qu'il n'effectue pas le calcul, le *calcul des deux axes de l'ellipse*, c'est-à-dire, les égalités que nous avons citées ci-dessus (dans les paragraphes concernant le calcul des axes). Leur réécriture en termes modernes est :

$$\text{grand demi-axe} = \frac{\text{Base} + 2\pi R}{\pi} \quad \text{petit demi-axe} = \frac{\text{Base} - 2\pi R}{\pi}$$

- 124 Pascal va maintenant parler du devenir de l'ellipse lorsque la roulette se rapproche de l'ordinaire avant de se livrer, à la suite de Sluze, à des considérations spéculatives plus élevées sur le droit et le courbe en général.

On voit aussi, par toutes ces choses, que plus la base de la roulette approche d'être égale à la circonférence du cercle générateur, plus le petit axe de l'ellipse qui lui est égale devient petit à l'égard du grand axe ; et que quand la base est égale à la circonférence, c'est-à-dire quand la roulette est simple, le petit axe de l'ellipse est entièrement anéanti ; et qu'alors la ligne courbe de l'ellipse (laquelle est toute aplatie), est la même chose qu'une ligne droite, savoir son grand axe. Et de là vient qu'en ce cas la courbe de la roulette est aussi égale à une ligne droite.

- 125 Jusqu'ici ce commentaire de Pascal n'a rien que de très mathématique. Avant d'aborder la suite, nettement plus métaphysique, il convient de revenir en arrière, en 1658, pour résumer un moment crucial du concours de la roulette, dont les solutions font l'objet de la *Lettre I* ³⁶.

- 126 En août 1658, Wren envoie à Pascal un résultat non demandé dans les *Problèmes de Juin* (les seuls posés à ce moment), parce que Pascal n'était pas en possession de sa démonstration. La découverte de Wren fit sensation. La voici :

L'arc CB de la roulette est le double de la corde CD de la roue, BD étant parallèle à la base. La roulette entière a donc pour longueur le double du diamètre de sa roue.

Une ligne courbe se voit égalée à un segment de la figure.

- 127 Pascal en profite pour poser les *Problèmes d'Octobre* dont la solution dépend de la connaissance de la ligne : longueur et centre de gravité de l'arc, surface et centre de gravité des solides autour de l'axe et de la base ; neuf problèmes en tout, comme en juin, mais plus difficiles. Pascal est ravi du cadeau de Wren : c'était la seule chose qui lui manquait pour que sa méthode générale lui permette de résoudre ce nouveau groupe de problèmes. En même temps son orgueil est piqué au vif, ce n'est pas lui qui a trouvé la longueur de la roulette. Voilà donc un autre effet du cadeau, Pascal se met au travail, généralise le résultat de Wren en montrant que toutes les roulettes, allongées, ordinaire, accourcies ont leur ligne courbe égale à celle d'une ellipse. Le petit axe de l'ellipse mesure le défaut de roulement sans glissement, aussi, pour la roulette ordinaire, l'ellipse est-elle réduite à un segment. Nous voici revenus à la *Lettre II*, qui est un prolongement de la *Lettre I*.

- 128 Pour nous, vivant au XXI^e siècle, disposant depuis longtemps d'un ensemble de nombres assez grand pour que les arcs de courbe s'y voient représentés, le résultat de Wren a perdu sa faculté de stupéfier. Mais au XVII^e siècle, rectifier une courbe, ce n'était pas

trouver un nombre, c'était exhiber un segment égal à la courbe, concrètement, sur le dessin, par une construction tacitement autorisée. D'étonnantes idées à propos de ce que nous appelons aujourd'hui la rectification régnaient alors. Descartes pensait que la proportion entre les droites et les courbes était à jamais inconnue des hommes, au contraire de Dieu, qui pouvait y avoir accès. La découverte de Wren n'infligea pas de démenti au fantasme de Descartes. Au contraire, conjuguée avec la généralisation de Pascal, elle le renforça ; en effet, Sluze et Pascal articulèrent de façon remarquable ces trois faits : la croyance de Descartes, la rectification de la roulette ordinaire par Wren, et l'égalité des lignes de roulettes généralisées à des lignes d'ellipses démontrée par Pascal.

Ce fut pour cela que je fis mander à ceux à qui j'envoyai ce calcul que les courbes des roulettes étaient toujours, par leur nature, égales à des ellipses, et que cette admirable égalité de la courbe de la roulette simple à une droite, que Monsieur Wren a trouvée n'était, pour ainsi dire, qu'une égalité par accident, qui vient de ce qu'en ce cas l'ellipse se trouve réduite à une droite. A quoi Monsieur de Sluze ajouta cette belle remarque, dans sa réponse du mois de septembre dernier, qu'on devrait encore admirer sur cela l'ordre de la nature, qui ne permet point qu'on trouve une droite égale à une courbe, qu'après qu'on a déjà supposé l'égalité d'une droite à une courbe. Et qu'ainsi dans la roulette simple, où l'on suppose que la base est égale à la circonférence du générateur, il arrive que la courbe de la roulette est égale à une droite.

- 129 Pour Sluze la seule manière qu'une courbe soit rectifiable est que dans sa génération même une autre courbe soit déjà égale à un autre segment ; preuve : pour la roulette ordinaire le segment AF est égal à l'arc de cercle CF et pour les autres roulettes où cette égalité n'a plus lieu, la ligne n'est plus un segment. Chez Pascal on lit entre les lignes un argument « probabiliste », cette égalité "par accident" de la ligne de la roulette à une droite n'est-elle pas un événement de mesure nulle comme l'est l'ellipse aplatie? Descartes sort intact : la roulette n'est pas *géométrique*, elle est une courbe *mécanique* qui a déjà payé un certain prix d'incommensurabilité de par sa nature même. À ce point la croyance de Descartes est seulement affinée : aucune courbe géométrique n'est rectifiable (Sluze) et même pour les autres le risque est faible (Pascal). Grâce à l'appui d'un seul exemple la croyance primitive est à ce point d'élaboration quand Fermat intervient.
- 130 Le passage cité ci-dessus est la toute fin de la *Lettre II*, visiblement la remarque de Sluze a fait grande impression sur Pascal.
- 131 Qu'en est-il des deux appels à la nature dans ce passage ?
- 132 Lorsque Pascal écrit que les courbes des roulettes sont "par leur nature" égales à des ellipses, "par leur nature" ne rajoute rien : enlevons cette expression, cela n'empêchera pas que la *Lettre II* est une démonstration, articulée s'il en est, de cette égalité. Dire alors que cette égalité a lieu "par leur nature" est un commentaire extérieur à une égalité de longueurs dûment prouvée et le commentaire ne se substitue en rien à la preuve. C'est bien autre chose d'affirmer que la nature ne permet point de rectifier une courbe sauf si sa définition suppose déjà « l'égalité d'une droite à une courbe ». Où est la preuve d'une impossibilité pareille ?
- 133 Pascal évoque la nature à d'autres endroits de son œuvre, par exemple, à la fin de *La sommation des puissances numériques*, il loue "la nature éprise d'unité" qui permet que l'on néglige les degrés inférieurs pareillement dans la géométrie et dans les nombres³⁷ :

Je ne parlerai pas des autres cas ; ce n'est pas ici le lieu ; j'ai noté ces résultats en passant ; le reste est facile à pénétrer si l'on pose ce principe : *dans le cas d'une grandeur continue, des grandeurs d'un genre quelconque, ajoutées en tel nombre qu'on voudra, à une grandeur d'un genre supérieur, ne l'augmentent de rien.* Ainsi les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces, les surfaces aux solides, ou, pour employer le langage des nombres dans un traité consacré aux nombres, les racines ne comptent pas par rapport aux carrés, les carrés par rapport aux cubes, les cubes par rapport aux carrés-carrés, etc. Donc les degrés inférieurs doivent être négligés comme dépourvus de toute valeur. Ces points sont familiers à ceux qui ont étudié les indivisibles, mais j'ai cru bon de leur consacrer cette addition, afin que la liaison, digne d'une admiration inlassable, que la nature éprise d'unité établit entre les choses les plus éloignées en apparence ressorte de cet exemple, où l'on peut voir la mesure d'une grandeur continue inséparable de la sommation des puissances numériques.

134 Là non plus l'analogie ne prend pas la place d'une preuve, laquelle est faite les deux fois. Le passage du discret au continu (i.e. des puissances numériques aux intégrales de paraboles) permet de négliger certains termes qu'il fallait auparavant prendre en compte, on se retrouve alors dans la situation de la dimension en géométrie. Comme la preuve est donnée dans les premiers cas seulement, Pascal nous indique que le principe permet de prévoir que c'est vrai aussi loin que l'on veut, c'est ce qu'il dit en substance ("le reste est facile à pénétrer"), et c'est exact. L'analogie commente et prévoit, mais le fait que la nature soit éprise d'unité est un jugement philosophique après-coup.

135 On trouve dans la *Préface sur le Traité du vide*³⁸ une autre sorte de relation entre la nature et les assertions en physique :

C'est ainsi que, sur le sujet du vide, ils avaient droit de dire que la nature n'en souffrait point, parce que toutes leurs expériences leur avaient toujours fait remarquer qu'elle l'abhorrait et ne le pouvait souffrir.

Mais si les nouvelles expériences leur avaient été connues, peut-être auraient-ils trouvé sujet d'affirmer ce qu'ils ont eu sujet de nier par là que le vide n'avait point encore paru. Aussi, dans le jugement qu'ils ont fait que la nature ne souffrait point de vide, ils n'ont entendu parler de la nature qu'en l'état où ils la connaissaient ; puisque, pour le dire généralement, ce ne serait assez de l'avoir vu constamment en cent rencontres différentes, ni en mille, ni en tout autre nombre, quelque grand qu'il soit ; puisque s'il restait un seul cas à examiner, ce seul suffirait pour empêcher la définition générale, et si un seul était contraire, ce seul...

136 Un jugement général, comme "la nature ne souffre pas de vide" a une légitimité en physique, tant que le réel n'apporte pas de démenti.

137 Revenons à la fin de la *Lettre II*, à la "belle remarque" de Sluze, où il est une deuxième fois question de la nature, où il faut admirer "l'ordre de la nature qui ne permet point" (le doute n'est pas ouvert, pas plus que chez les tenants de l'horreur du vide, mais est-ce bien pareil?) "qu'on trouve une droite égale à une courbe", le tout suivi d'une condition restrictive "qu'après qu'on a déjà supposé l'égalité d'une droite à une courbe".

138 Résumons-nous : en physique on peut affirmer universellement tant que le réel ne s'insurge pas, mais en mathématiques, la remarque de Sluze, comme tout énoncé, exige une démonstration. Je laisse à penser la difficulté de formaliser un énoncé de ce théorème d'impossibilité avec sa condition restrictive... Heureusement ce n'est pas la peine, puisqu'il est faux, comme l'a montré Fermat en annonçant qu'il a rectifié une courbe parfaitement présentable, une vraie courbe admise par *La Géométrie de Descartes* : la parabole semi-cubique ("et si un seul [cas] était contraire, ce seul...") Le segment est

là, sur la figure, il est facile à construire, il ne requiert aucune égalité préalable d'une autre ligne courbe à un autre segment

Jamais encore, que je sache, une ligne courbe purement géométrique n'a été égalée par les géomètres à une droite donnée. Ce qu'en effet un subtil mathématicien anglais [Wren] a récemment découvert et démontré, *que la cycloïde primaire est quadruple du diamètre du cercle qui l'engendre*, paraît devoir se limiter, d'après l'avis des plus savants géomètres. Ils pensent en effet que c'est une loi et un ordre de la nature qu'on ne puisse trouver une droite égale à une courbe, à moins de supposer d'abord une autre droite égale à une autre courbe, et prenant cet exemple de la cycloïde, ils montrent qu'il en est ainsi dans ce cas. Je ne le nie pas ; il est clair en effet que le tracé de la cycloïde suppose l'égalité d'une autre courbe avec une droite, à savoir celle de la circonférence du cercle générateur de la cycloïde avec la droite qui est la base de la cycloïde. Mais on va voir ci-dessous ce qu'il en est de cette loi de la nature qu'ils établissent, et combien il est dangereux sur un ou deux faits d'expérience de conclure aussitôt à un axiome. Je vais en effet démontrer *l'égalité à une droite d'une courbe véritablement géométrique et pour la construction de laquelle on n'a à supposer aucune égalité semblable d'une autre courbe avec une droite [...]*³⁹

- 139 Il reste étonnant que Pascal ait adhéré sans condition à la remarque de Sluze. Cette remarque est tout au plus une hypothèse, pourtant elle n'est pas dite comme telle, mais comme une propriété de la nature (qui ne permet point...). Il ne semble pas que Sluze ou Pascal aient envisagé la possibilité d'un démenti à cette assertion qui ne fait pourtant pas l'objet de la moindre démonstration. À l'intérieur des mathématiques cette remarque a seulement la légitimité d'un énoncé de physique, jamais astreint à une démonstration définitive, toujours à confronter avec le réel, énoncé auquel Fermat a apporté un démenti avec le contre-exemple de la parabole semi-cubique.

Conclusion : longueur des ellipses et nouvelles fonctions

- 140 Un autre théorème d'impossibilité – pressenti bien avant une preuve –, qui déborde notre sujet tout en lui étant lié, est celui qui affirme que la longueur de l'arc général d'ellipse ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires. Tout d'abord remarquons que cet herbier que constitue la collection des fonctions élémentaires n'a de définition qu'arbitraire, mais assez immuable, et qu'ainsi tout le monde est à peu près d'accord sur ce qui s'y trouve enclos. Ensuite, on connaît les formules donnant l'aire du disque, la longueur du cercle, l'aire de l'ellipse : $2\pi R$, πab , mais on ne donne nulle part de formule semblable pour la longueur de l'ellipse entière, ce qui trouble les esprits, pourquoi est-ce si facile d'avoir l'aire et pas le périmètre? Plus généralement, si l'on s'intéresse à la longueur de l'arc quelconque d'ellipse, l'intégrale qui la donne est fonction de sa borne supérieure x (qui représente le point qui borne l'arc), appelons la $I(x)$; elle contient un coefficient k qui redonne le cas du cercle (de la longueur de son arc) s'il est nul. Comme on n'arrivait pas, aux XVII^e et XVIII^e siècles, à l'exprimer à l'aide des fonctions habituelles, à défaut on s'est contenté (Wallis, et d'autres) de développements en série qui fournissaient des approximations. Puis on s'est mis, à la fin du XVIII^e à étudier les propriétés de cette intégrale de longueur d'arc, $I(x)$, comme une nouvelle fonction, pour elle-même, on lui a même donné un nom : « intégrale elliptique » ; mais toujours sans savoir si elle pouvait ou non s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires. Ne pas y arriver ne prouve pas que c'est impossible...

141 Un grand pas a été accompli au début du XIX^e siècle, indépendamment, par Abel et Jacobi qui ont eu deux idées fécondes : inverser le point de vue (voir la borne supérieure comme fonction de l'intégrale au lieu du contraire, bien plus naturel) et passer dans le champ complexe ; cette fonction inverse de l'intégrale elliptique, le « sinus elliptique », est un être nouveau ne faisant pas partie des fonctions consignées dans l'herbier et de ce que l'on peut en faire par les opérations autorisées. Comme tout théorème d'impossibilité, cette assertion est difficile à montrer, cela a été fait peu après par Liouville. La théorie des fonctions elliptiques s'est, depuis, tellement envolée dans les hautes sphères de l'abstraction qu'elle en a oublié ses origines, à tel point que le nom de Liouville, qui a montré l'impossibilité d'exprimer l'intégrale elliptique en fonction des fonctions élémentaires, n'est pratiquement jamais mentionné, et que c'est encore plus difficile de savoir où cela se trouve dans ses écrits ⁴⁰.

142 Il y a beaucoup d'analogies entre les sinus elliptique, cosinus elliptique, et les habituelles fonctions circulaires sinus, cosinus :

- Toutes sont périodiques, les premières doublement (deux périodes et leurs combinaisons entières), les secondes simplement (une période, 2π , et ses multiples).
- L'intégrale elliptique $I(x)$ contient un coefficient k qui redonne le cas du cercle s'il est nul : $I(x)$ est l'analogue de la fonction « élémentaire » arc sinus (inverse du sinus) qui s'exprime aussi par une intégrale. $I(x)$ et *sinus elliptique* sont dans le même rapport que *arc sinus* et *sinus* : inverses l'une de l'autre.
- Elles ont des formules d'addition qui se ressemblent formellement.

143 La recherche d'analogies avec les fonctions circulaires a beaucoup guidé les travaux mathématiques sur ce sujet, et je voudrais conclure en disant que Pascal a, par ce profond traité du cercle qu'est au fond la *Lettre I*, fait entrer les fonctions circulaires dans le champ du calcul intégral, cela ne se sait pas assez. Il a réussi à calculer un grand nombre de sommes comme par exemple la somme curviligne de sinus multiplié par cosinus-carré et encore multiplié par l'arc, sans recourir à la primitive. Qui pourrait encore faire cela aujourd'hui ? On a peut-être trop tendance à penser que les méthodes géométriques de Pascal ne sont qu'un archaïsme en 1658, à une époque où les méthodes analytiques sont arrivées sur le devant de la scène. Employer la géométrie est peut-être archaïque, mais le faire comme Pascal est manifestement très abstrait, puisqu'il crée des solides irréprésentables, hors des sens. Renvoyons à ce que dit Dominique Descotes :

De telles constructions [comme les sommes de carrés-carrés d'arcs qui ont cinq dimensions] cessent d'être soumises aux limites de la géométrie naturelle. En d'autres termes la figure se retourne pour ainsi dire contre elle-même : ses éléments ne fournissent plus qu'un matériel géométrique élémentaire, qui ne sert au lecteur que de point de départ visuel, *pour parvenir à un degré de réflexion où l'imagination devient aveugle* ⁴¹ : son caractère figuratif ne sert plus que d'adjuvant provisoire.

144 Pascal refuse le calcul algébrique, il écrit tout en langue française, sans employer jamais aucun signe autre que des lettres pour désigner les points, comme Archimède ou Euclide. Mais ce caractère *aveugle* qui fait la force du calcul algébrique, Pascal le transfère à la géométrie. C'est une sorte d'abstraction différente de celle qui consiste à soumettre la géométrie aux nombres, mais c'en est une aussi, et, à mon sens, lointainement annonciatrice de nouvelles manières de considérer la géométrie.

La figure ne représente plus les objets : elle sert de modèle pour effectuer des calculs sur des corps difficilement concevables, comportant un nombre

virtuellement infini de dimensions, sans chercher à les réduire aux objets visibles de la géométrie élémentaire.⁴²

- 145 Aujourd'hui le pouvoir expressif reconnu à la géométrie, – même quand les figures sont nécessairement fausses – fait que l'on n'hésite pas à représenter l'irreprésentable : des droites inclinées qui se courbent pour ne pas rencontrer leur parallèle (géométries non euclidiennes) ; une surface de Riemann ou une bouteille de Klein qui se recoupent elles-mêmes malgré leur définition abstraite laquelle n'avait pas à s'astreindre aux trois dimensions dans lesquelles a nécessairement lieu la représentation.

NOTES

1. Ci-dessous, le dessin est ajouté pour faciliter la compréhension ; il en sera de même des autres dessins aisés à distinguer des trois figures de Pascal. Dans le mouvement ordinaire l'arc CD est constamment égal au segment BD ou FΦ.
2. Pascal, *Œuvres complètes*, IV, éd. J. Mesnard, Paris, Desclée de Brouwer, 1992, p. 214. Cette édition sera désignée dans la suite par le signe OC suivi du numéro du volume.
3. À la suite de ce qu'en a dit Émile Picard, « On trouve, écrit Émile Picard, dans l'ouvrage de Pascal sur la roulette, sous des formes géométriques extrêmement ingénieuses, les résultats fondamentaux se rapportant à ce que les géomètres appellent aujourd'hui les intégrales curvilignes et les intégrales doubles, et il suffit pour indiquer la puissance de ces méthodes, de rappeler le beau théorème sur l'égalité à un arc d'ellipse d'un arc de cycloïde allongée ou accourcie... C'est le premier Traité de calcul intégral », *Pascal, Œuvres complètes*, éd. Jacques Chevalier, 1964, Pléiade, p. 175.
4. La *Lettre II* se trouve dans OC IV, pp. 524-530. Son titre complet est « Lettre de A. Dettonville à M. Huygens de Zulichem en lui envoyant la dimension des lignes de toutes sortes de roulettes, lesquelles il montre être égales à des lignes elliptiques ». Émile Picard (note précédente) considère que le *premier traité de calcul intégral* est l'ensemble des *Lettres I et II*.
5. OC IV, p. 391.
6. Comme les trois figures forment un système, elles seront reproduites (une deuxième fois) sur une même page à la fin du texte, de manière à pouvoir passer facilement de l'une à l'autre.
7. La partie de l'œuvre mathématique de Pascal qui traite de géométrie infinitésimale – les quatre *Lettres* – se trouve dans OC IV de même que les écrits afférents au concours lancé par Pascal et aux nombreuses péripéties qui ont suivi.
8. OC IV, p. 565.
9. Les citations de Pascal seront toujours données ou bien sous cette forme, ou bien si elles sont plus courtes, entre des guillemets anglais qui leur sont réservés. Les guillemets français serviront donc dans tous les autres cas.
10. Cette démonstration infinitésimale est donnée ci-dessous, en compagnie de trois autres, dans le paragraphe « Le calcul de l'infini ».
11. Voir la note précédente.
12. OC IV, p. 517.
13. *Traité de la roulette, Sept traités*, ou même *Traité*, tout cela sera synonyme pour désigner ce pur joyau du calcul infinitésimal qu'est la *Lettre I* divisée en sept petits traités.
14. Un cercle sera désigné ici par son diamètre ; un demi-cercle pareillement.
15. Voir la note 10.
16. Calcul algébrique sans difficulté, Pascal l'explicite cependant, cf. OC IV, p. 528.
17. Écrire $BA + AH = BH$, élever au carré et utiliser les égalités définissant V et O.
18. Cela rappelle ce que dit Gilberte de son frère : « Mais il concevait l'éloquence comme un moyen de dire les choses d'une manière que tous ceux à qui l'on parle les puissent entendre sans peine et avec plaisir, et il concevait que cet art consistait dans de certaines dispositions qui doivent se trouver entre l'esprit et le cœur de ceux à qui l'on parle, et les pensées et les expressions dont on se sert ; mais que les proportions ne s'ajustent proprement ensemble que par le tour qu'on y donne. C'est pourquoi il avait fort étudié le cœur de l'homme et son esprit ; il en savait tous les ressorts parfaitement bien. Quand il pensait quelque chose, il se mettait à la place de ceux qui devaient l'entendre », *La vie de Pascal* (deuxième version), OC I, p. 617. Et aussi « [...] On trouve dans soi-même la vérité de ce qu'on entend, laquelle on ne savait pas qu'elle y fût, de

sorte qu'on est porté à aimer celui qui nous la fait sentir, car il ne nous a point fait montre de son bien, mais du nôtre. » *Pensées*, éd. Ph. Sellier, fr. 536.

19. Voir Dominique Descotes, *Blaise Pascal : Littérature et géométrie*, Clermont-Ferrand, Presses Universitaires Blaise Pascal, 2001, spécialement *III Poétique et dramaturgie géométriques*, p. 85-109.

20. Il s'agit simplement de transformer la forme d'une proportion ; voir la fin du paragraphe suivant.

21. Comme le dit son titre, voir la note 4.

22. Voir ci-après, *beauté et harmonie des dessins jusqu'à dans les notations*.

23. Voir ci-dessus *Les trois figures*.

24. Ce n'est sans doute pas par hasard que Pascal emploie ce mot de *représentantes* qui évoque le théâtre. À propos de la dramaturgie dans les *Lettres*, voir l'ouvrage de Dominique Descotes cité n. 19.

25. Voir ci-après le paragraphe *Le droit et le courbe*.

26. Voir Dominique Descotes *Les images dans les œuvres scientifiques de Port-Royal*, Actes du colloque de Port-Royal et les images, CÉRÉDI, Rouen. <http://publis-shs.univ-rouen.fr/ceredi/index.php?id=600>, spécialement p. 22-26.

27. Mes efforts pour apercevoir un quelconque intérêt aux ZZ ont été vains. Je ne leur vois pas d'intérêt en eux-mêmes, ni ne vois en quoi ils servent au propos ou aux démonstrations de Pascal dans cette *Lettre*.

28. « [...] Et à vrai dire, tandis qu'à la même époque d'autres créations mathématiques, l'arithmétique de Fermat, la dynamique de Newton, portent un cachet fortement individuel, c'est bien au déroulement graduel et inévitable d'une symphonie, où le « *Zeitgeist* », à la fois compositeur et chef d'orchestre, tiendrait le bâton, que fait songer le développement du calcul infinitésimal au XVII^e siècle : chacun y exécute sa partie avec son timbre propre, mais nul n'est maître des thèmes qu'il fait entendre, thèmes qu'un contrepoint savant a presque inextricablement enchevêtrés. » Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1960, p. 186.

29. Il y a même des infinitésimales courbes dans la démonstration de la *PROPORTION de la circonférence du cercle à son diamètre*. Gilles-Personne de Roberval, *Traité des indivisibles*, réédité par IREM de Paris VII, janv. 1987

30. La *Lettre à Carcavy*, premier traité de la *Lettre I*, se trouve dans OC IV ; voir spécialement p. 423-426 et 433-434.

31. Il y a quinze telles propositions dans ce *Traité des trilogies et de leurs onglets* dont la splendeur a souvent été remarquée. Il se trouve dans OC IV, p. 442 et sq ; on pourra jeter un coup d'œil rapide sur les notes des pages 450 et 451 qui réécrivent les "sommés" pascaliennes en langage leibnizien.

32. Signalons tout de même qu'il arrive pour des raisons de commensurabilité que Pascal re-subdivise les MM dans le second traité de la *Lettre I*, OC IV.

33. Cet objet à la fois nul et non nul en fonction de sa place dans le calcul heurte, certes, le principe de contradiction, mais l'intuition s'y retrouve, car elle sait très bien ce qu'il faut négliger, et quand ; tandis que résoudre l'aporie logique, comme cela a été fait après, laisse à désirer du côté de la compréhension profonde, de l'esprit de finesse, en un mot.

34. Remarquons, d'ailleurs, que les *sommés* de Pascal sont nées de sommes arithmétiques, et que d'entrée de jeu, comme Leibniz, Pascal pouvait faire des sommes de sommes, etc., et c'est ce qu'il a fait en fabriquant (dans la *Lettre à Carcavy*) les sommes triangulaires et les sommes pyramidales. Chez Leibniz, sommes et différences du calcul infinitésimal s'originent toutes deux dans l'arithmétique et sont donc toutes deux, dès le départ, susceptibles d'être répétées ; il s'ensuit qu'elles gardent ce caractère lorsque leur auteur les fait entrer dans le calcul différentiel et intégral.

35. V est aussi un N, au vu du reste (figures de la *Lettre I* comprises), je pense que c'est un oubli de Pascal de ne lui avoir donné que son nom de point d'arrêt.

36. La suite de ce paragraphe est en partie reprise de Claude Merker *Le Chant du cygne des indivisibles : le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Besançon, Presses Universitaires Franc-Comtoises, 2001, début du chap. VI.

37. OC II, p. 1271.

38. OC II, p.784.

39. Fermat, *De la comparaison des lignes courbes avec les lignes droites. Dissertation géométrique*, in *Fermat, Œuvres*, éd. Paul Tannery et Charles Henry, Paris, Gauthier Villars, 1896, T. III, p. 181.

40. Joseph Liouville, *Mémoire sur les Transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur amplitude*, *Journal de l'École Royale Polytechnique*, Vingt-troisième cahier, tome XIV, 1834.

41. Je souligne.

42. Voir l'article cité dans la note 26, sur les images dans les œuvres scientifiques de Port-Royal, p. 22.

AUTHOR

CLAUDE MERKER

Professeur agrégée au Département de mathématiques de l'université de Franche-Comté