Dissertation physico-mathématique sur les roulements du cercle

Père André Tacquet

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/ccibp/620>

DOI : 10.4000/ccibp.620

ISSN : 2493-7460

Éditeur

Centre international Blaise Pascal

Édition imprimée

Date de publication : 5 février 1992

Pagination : 25-53

ISSN : 0249-6674

Référence électronique

Père André Tacquet, « Dissertation physico-mathématique sur les roulements du cercle », *Courrier du Centre international Blaise Pascal* [En ligne], 14 | 1992, mis en ligne le 08 janvier 2016, consulté le 01 mai 2019. URL : <http://journals.openedition.org/ccibp/620> ; DOI : 10.4000/ccibp.620

Ce document a été généré automatiquement le 1 mai 2019.

Centre international Blaise Pascal

Dissertation physico-mathématique sur les roulements du cercle

Père André Tacquet

Au Lecteur

Le roulement du cercle sur un plan enferme tant de si grands paradoxes qu'on doit à juste titre le mettre au nombre des principaux secrets de la Nature. Jadis déjà Aristote a soulevé la question des cercles concentriques qui roulent ensemble, mais ni lui ni aucun autre après lui, à ma connaissance, n'a résolu la difficulté : Mais comme cette matière m'a aussi toujours semblé étonnante, plus d'une fois j'ai essayé de trouver à mon tour la sortie de ce labyrinthe, et de répandre si possible un peu de lumière en cette difficile affaire. Au cours de plusieurs tentatives vaines, je suis tombé sur de nouvelles difficultés que nul n'avait remarquées : le lecteur en trouvera la synthèse dans le Scholie du premier Théorème. Enfin n'ayant jamais rien lu ni entendu qui jetât la moindre lumière dans mon embarras et mon trouble, j'ai repris tout le problème avec plus d'application ; et ainsi j'ai fini par arriver aux réflexions formulées dans ce traité. Quelque temps après, les circonstances ont voulu que je publie sur cette matière des thèses défendues publiquement par le très illustre Comte de Hornes et de Herlies. Comme de nombreux savants ont alors approuvé cet essai, j'ai compté que le lecteur me saurait gré d'ajouter aux quatre livres sur les Cylindres et les Anneaux ce traité sur les roulements du cercle. Je

l'ai débarrassé de la forme étroite des thèses, et j'ai développé plus amplement, surtout à la fin, des points que, pour respecter les limites du genre, j'avais résumés autant que possible dans la première édition. En outre, dans la première comme dans cette dernière édition, j'ai voulu non seulement satisfaire aux difficultés exposées dans le Scholie du premier Théorème, mais aussi exposer les autres aspects du roulement de manière qu'ils révèlent amplement leur nature étonnante. Au revoir.

Définitions

1. Un mouvement est régulier ou uniforme lorsque dans des temps quelconques égaux sont parcourus des espaces égaux¹.
 2. Un mouvement est variable ou irrégulier lorsque dans des temps égaux sont parcourus des espaces inégaux.
 3. On dit qu'une sphère (ou un cercle) roule sur un plan lorsqu'elle avance sur le plan de telle façon qu'elle tourne en même temps sans interruption autour de son centre. Le roulement est par conséquent composé de deux mouvements ininterrompus, savoir un mouvement circulaire et l'autre progressif ou de translation que nous appellerons souvent mouvement parallèle du centre parce que, pendant que le cercle roule, son centre décrit une ligne parallèle au plan, courbe ou droite selon l'impulsion. J'ai dit : ininterrompus. En effet si l'un ou l'autre, du mouvement de translation ou du circulaire, s'interrompt alors que l'autre continue, il n'y aura plus roulement, mais rasement². On le montrera plus bas.
 4. Il y a rasement lorsqu'un point quelconque de la circonférence passe par plus d'un seul point du plan, c'est-à-dire par une certaine partie du plan ; ou lorsque plusieurs points de la circonférence (c'est-à-dire une partie de la circonférence) passent en un point du plan.
 5. Un roulement est achevé lorsque le point de la circonférence qui est dans le plan au départ redescend sur ce plan.
 6. J'appelle plan matériel commun celui qui comporte inégalité et aspérité ; de ce genre sont tous ceux que nous connaissons.
 7. Le plan matériel parfait est complètement uniforme.
 8. J'entends par plan géométrique un plan parfait, mais abstrait de la matière.
 9. Lorsque, pour la brièveté, je parle d'une sphère, il faut entendre la circonférence du grand cercle de cette sphère.
 10. Lorsque l'on dit infini, entendez indéfini, ou aussi grand ou nombreux que l'on veut ; car c'est ainsi que parlent les géomètres.
- ¹ Les autres termes seront définis en leur lieu, lorsque la matière le demandera.

Axiomes

1. Des vitesses égales, ou des mouvements également rapides, parcourent des espaces égaux dans des temps égaux.

2. Une vitesse est à une autre dans le même rapport que les espaces parcourus dans le même temps. Galilée le démontre dans le Théorème II sur le mouvement uniforme ; et cela est clair par soi-même³.

Théorème 1

- 2 **Lorsqu'un cercle (AQ) roule sur un plan commun matériel, tous les cercles concentriques possibles (AP), si petits ou si grands soient-ils, s'ils se meuvent solidairement, parcourent en une rotation un espace égal à la circonférence Q.**
- 3 Soit en effet mené à partir du centre A le rayon ACB qui coupe les cercles concentriques aux points B et C, par lesquels on mène les tangentes BM et CL ; soit BM sur un plan matériel commun, mais CL sur un plan géométrique.
- 4 Parce que par hypothèse le cercle AQ roule sur BM, il est constamment tangent à la droite BM ; et par suite, pendant tout le temps du roulement, les droites conduites du centre A à tous les points de contact seront perpendiculaires à BM^a ; par conséquent le rayon du cercle AQ sera toujours la distance du centre A à la droite BM ; de là, pendant tout le temps du roulement, le centre A est également distant de BM. C'est pourquoi comme CL est parallèle à BM^b (en effet les angles ACL et ABM sont droits, donc égaux), le centre A sera toujours à égale distance de CL, de l'intervalle du rayon AC ou AO. Donc comme par hypothèse les cercles AP sont au début tangents aux droites CL, pendant tout le temps où le cercle AQ tourne et touche la droite BM, ils touchent les droites CL ; mais parce que les points C sont sur la même droite, sur laquelle est le point B, quand, un roulement achevé, B descendra de nouveau sur BM, les points C reviendront ensemble sur leurs tangentes CL. Donc tous les concentriques AP parcourent en un roulement des droites égales à celle que parcourt le cercle AQ. Et AQ lui-même parcourt une droite égale à sa circonférence, comme l'expérience le montre, ce dont nous rendrons raison plus bas.
- 5 Un profane en géométrie ne s'en tirerait pas en disant que les cercles concentriques AP se déplacent partie en tournant, partie en rasant ; que chaque point des concentriques plus petits que AQ est traîné sur une partie de la tangente CL, alors que plusieurs points des concentriques plus grands que le cercle AQ passent par un seul et même point de la tangente. C'est absolument impossible : je le démontre ainsi.
- 6 Soit pris dans un concentrique, plus grand ou plus petit que AQ, un point quelconque O, par lequel du centre A on mène la droite qui tombe sur le cercle déférent AQ en K. Parce que les cercles tournent solidairement, et que les points O et K sont sur la même droite, il est évident que les points O et K tombent en même temps sur leurs plans respectifs CL et BM ; et qu'ils s'élèvent et s'éloignent en même temps. En effet lorsque le point K descendra sur BM, et deviendra le point de contact, AK sera perpendiculaire à la tangente BM^c ; et par conséquent, parce que BM et CL sont équidistantes, elle sera aussi perpendiculaire^d à la tangente CL. C'est pourquoi si, le point K placé sur BM, le point O était au-dessus ou au-dessous de la droite CL, le centre A ne serait pas toujours à la même distance du rayon AO de la tangente CL ; on a démontré plus haut qu'il était autrement. Donc les points O et K atteignent et quittent ensemble leurs tangentes. C'est pourquoi lorsque le point K touche le plan BM dans l'instant et sans aucun rasement (car le cercle AQ est par hypothèse porté sur le plan matériel BM par un roulement véritable défini ci-dessus^e), le point O touche aussi dans l'instant et sans glissement son plan géométrique CL. On montrera la même chose de n'importe quels points des circonférences concentriques PP.

- 7 C'est ainsi qu'on établit la proposition géométriquement. Mais je réduis la substance de cette démonstration à la portée des philosophes comme suit. Il est impossible que le concentrique APN, qui parcourt une ligne plus grande que lui-même touche le plan par un même point de sa circonférence pendant un certain temps, autrement dit qu'il touche plusieurs points du plan, sans que le mouvement par lequel il tourne autour du centre ne s'interrompe tant soit peu. De la même façon il est impossible que le cercle ARP qui parcourt une ligne plus petite que lui, touche un certain temps le plan au même point du plan, c'est-à-dire que plusieurs points de la circonférence passent par un seul point du plan, sans que le mouvement de translation ne s'interrompe tant soit peu. Mais par hypothèse aucun des deux mouvements ne s'interrompt jamais. Donc etc. Pour voir plus clairement le sens de ce raisonnement, concevons d'abord que le petit concentrique ANP soit mû sur le plan par le seul mouvement de translation et sans aucune conversion autour du centre. Il est évident que le même point de la circonférence passe alors tangentiellement par plusieurs points du plan. Si ensuite on conçoit qu'au mouvement de translation s'ajoute une conversion du cercle autour du centre, aussi lente soit-elle, il découle évidemment que ce point de la circonférence auquel le plan est touché ne subsiste dans le plan qu'un instant seulement ; en effet comme ce contact est indivisible, une conversion aussi petite qu'on veut le change, en élevant aussitôt le point qui touchait le plan. Concevons ensuite que le grand concentrique ARP soit d'abord soumis au seul mouvement de conversion autour du centre A. Il est alors évident que plusieurs points de la circonférence passent tangentiellement par le même point du plan. Si on conçoit par la suite qu'au mouvement de conversion autour du centre s'ajoute un mouvement du plan aussi petit que l'on veut vers L, de nouveau il apparaît clairement que ce point du plan, qui était touché, n'est joint au cercle qui ne change pas de place que dans l'instant : en effet le contact est indivisible, si petit que soit le mouvement en avant du plan CL vers L⁴, il change nécessairement le contact en entraînant par dessous vers L le point du plan qui était joint au cercle. Cependant il revient au même que le plan CL se meuve vers L quand le cercle ne change pas de lieu, ou que le plan demeurant immobile, le cercle soit porté vers L⁵. Donc un mouvement aussi petit soit-il s'ajoutant au circulaire, ce point du plan auquel se faisait le contact ne peut être joint au plan, sinon dans l'instant ; et par conséquent plusieurs points du cercle ne peuvent passer par ce point. C'est pourquoi ni quand le petit cercle parcourt une ligne plus grande que lui, ni quand le grand cercle parcourt une ligne plus petite que lui, il ne se produit un rasement. Voilà la démonstration complète de ce théorème vraiment étonnant, d'une manière qui découvre la cause de tout le mystère, puisqu'elle est en chaque membre ostensive et directe.
- 8 Il ne reste qu'un point qu'on voudra peut-être voir expliquer : comment peut-il se faire qu'une circonférence tournée une seule fois parcoure en la touchant une ligne plus grande ou plus petite qu'elle-même ? Il semble en effet qu'on aboutisse par là à évaluer en mesure ou en étendue une circonférence à une quantité plus grande ou plus petite, et que par conséquent on égale la plus petite à la plus grande et la plus grande à la plus petite : choses manifestement impossibles. Mais je réponds que, quoique toute la circonférence ait successivement touché toute la ligne du plan, plus grande ou plus petite, pourtant elle ne lui est pas pour autant égale en mesure ni en étendue ; car pour qu'il y ait commensuration successive d'un tout avec un tout, il faut que les parties soient appliquées successivement aux parties et coïncident avec elles. Mais ici aucune partie de la circonférence n'a été appliquée à une partie de la ligne parcourue dans le plan ; mais il y a eu un contact continu indivisible, ou sans quantité. Si un polygone quelconque, un

hexagone par exemple, tourne sur un plan, son périmètre égale en dimension la ligne faite dans le plan, parce que les parties du périmètre (c'est-à-dire les côtés) ont été appliquées de manière à correspondre. Mais dans le roulement des cercles il en va tout autrement, dans la mesure où la conjonction successive de la circonférence avec la ligne parcourue est toujours indivisible, c'est-à-dire qu'elle reste sans quantité.

Scolie

Difficultés et mystères du roulement des cercles

- 9 Quoique importants et nombreux, à ma connaissance ils n'ont pas pour la plupart été tirés au clair, ni même signalés par personne jusqu'à présent.
 1. Le premier au moins a été résolu dans le théorème ci-dessus et sera encore plus pleinement éclairci dans les suivants : comment peut-il assurément se faire que le plus grand s'égale en mesure au plus petit et le plus petit au plus grand, ou mieux que toutes les circonférences inégales possibles s'égalent en quelque manière à la même ligne droite ? Et ce qui certes accroît considérablement le caractère étonnant du problème, c'est que celle-ci peut être quelconque ; en effet si n'importe quel autre concentrique différent du cercle AQ roule sur un plan matériel, il parcourra en un roulement une droite égale à sa propre circonférence, lui et tous les autres.
 2. Mais un problème beaucoup plus difficile encore en découle : pourquoi celui qui tourne sur le plan matériel est-il le seul à parcourir un espace égal à sa circonférence, alors que tous les autres concentriques parcourent des lignes plus grandes ou plus petites que leur périphérie ? Il serait futile de dire que celui qui touche le plan matériel parcourt une ligne égale à lui-même parce qu'il se meut par lui-même et indépendamment des autres, puisqu'on demande ce que c'est qu'être mû par soi et pourquoi celui-ci se meut par soi plutôt que les autres.
 3. Qu'arrivera-t-il si aucun des concentriques qui tournent solidairement ne parcourt un plan matériel ? On a bien démontré plus haut^f qu'en un roulement tous parcourent un espace égal. Mais quelle sera sa dimension ? À la périphérie de quel concentrique sera-t-il égal ? Y en a-t-il alors un qu'on pourra nommer déférent ? Dire que les autres sont portés par celui qui est mû en premier et par soi, c'est une réponse insipide, puisque par hypothèse tous les concentriques sont joints et solidaires, de sorte que le mouvement d'un seul les entraîne tous ; il faudrait expliquer ce qui est requis pour que l'un des concentriques se meuve par soi et emporte les autres : cela exposé, il faudra encore montrer que celui qui se meut par soi parcourt un espace égal à sa circonférence.
 4. Et si ce cercle qui touche le plan matériel franchit en un roulement un espace égal à sa propre circonférence (personne en tout cas jusqu'ici n'a prouvé autrement que par expérience qu'il en va bien ainsi), qu'arrivera-t-il lorsque deux cylindres EF et CG de même axe AB touchent tous deux des plans matériels parallèles en leurs côtés FE et CG ? Les deux cercles E et C parcourront-ils en un roulement des espaces égaux à leurs propres circonférences ? C'est pourtant impossible, puisque par la démonstration du premier théorème ci dessus, il est clair que les cercles E et C commencent et achèvent leur roulement ensemble, et que par conséquent, tournés tous deux une fois, ils parcourent des espaces égaux. Disons-nous que dans ce cas le roulement est impossible ? Mais on ne voit aucune cause qui l'empêche. Et nous démontrerons ci-dessous qu'il est possible. Quelle sera donc la circonférence égale à l'espace d'un roulement : E, C ou aucune des deux ? Si c'est l'une des deux, pourquoi l'une plutôt que l'autre, puisque toutes deux touchent le plan matériel ? Si ce n'est aucune des deux, comme il faut que les cercles E et C parcourent tous deux une longueur déterminée, il faudra montrer laquelle, pour répondre à la question.

5. Les difficultés proposées dans le précédent paragraphe croissent en quelque sorte dans un cône infini, tangent à un plan commun matériel par son côté FE, et emporté sur lui en un roulement droit. Là en effet une infinité de cercles concentriques placés les uns en dehors des autres, touche un plan commun matériel.
- 10 Ces points et bien d'autres que nous aborderons par la suite montrent assez que le roulement des cercles enferme quelque étonnant mystère de la nature ; jusqu' à présent du moins il n'a pas été éclairci ; cela me semble provenir de ce qu'on n'a pas jeté les yeux sur la proportion des mouvements de translation et circulaire qui composent le roulement, qui peut être diverse et varier à l' infini. De fait, la proportion mutuelle de ces deux mouvements correctement évaluée, toutes les difficultés proposées disparaîtront, comme les théorèmes suivants le montreront clairement. Faute de cette observation est d'ailleurs née aussi cette commune illusion, que le cercle qui touche un plan matériel parcourt nécessairement, en un roulement complet sur le plan, une ligne égale à sa circonférence, sans qu'il puisse en être autrement. Nous montrerons ci-dessous que c'est faux.

Aristote et Galilée n'éclaircissent rien.

- 11 Aristote traite du roulement des cercles concentriques sur un plan dans ses *Questions mécaniques*, 24. Nous rapportons ici son discours⁶.
- 12 Si l'on met en mouvement le petit cercle AP, le grand AQ qui lui est attaché ne se meut pas par soi, mais pour autant qu'il est mû par le petit ; par conséquent il effectue avec lui un chemin égal. De même lorsqu'on pousse le grand AQ, alors le petit n'est pas emporté par son propre mouvement, mais par celui du grand : d'où il est nécessaire que réciproquement il accomplisse avec lui en chemin égal. Répondant ensuite à une objection, il dit : quoique les deux cercles n'aient qu'un centre, le centre d'un seul est en mouvement par soi ; l'autre l'est par accident : en effet le cercle qui meut l'autre possède ce centre par soi ; mais l'autre qui est mû l'a par accident, parce qu'il ne s'en sert pas comme de centre.
- 13 Voilà le raisonnement d'Aristote dans son ensemble : que cela apporte peu ou pas de lumière à la question, le lecteur le comprendra clairement, s'il compare ce discours d'Aristote aux difficultés proposées dans la précédente section.
- 14 Parmi les autres qui ont tenté de défaire ce nœud gordien, le dernier en date, mais le premier en célébrité pour ses nombreuses inventions très connues et subtiles en mathématiques, s'appelle Galilée le Lynx. Dans le premier dialogue de son livre intitulé *Discorsi e dimostrazioni matematiche etc* il tente d'éclaircir le premier point de notre précédent théorème seulement : comment se peut-il que la petite circonférence parcoure une ligne plus grande que soi, et la grande une plus petite en un roulement commun ? Voici comment il raisonne.

Schematismus XVII

Planche illustrée des figures géométriques.

Schematismus XVIII

Planche illustrée des figures géométriques.

- 15 Soient deux polygones semblables et semblablement placés autour du centre commun G, liés ensemble de sorte que l'un ne puisse se mouvoir sans l'autre. Prolongeons les côtés AB et HI⁷). Faisons tourner sur le point fixe B le grand polygone, jusqu'à ce que le côté BC coïncide avec la droite AS et que le point C arrive en Q. Ce mouvement achevé, BC est en BQ et BG en BC. Mais le point I, extrémité du côté KI du petit polygone, décrit l'arc IO ; mais le côté KI lui-même tombe sur la droite OP, en sautant par-dessus l'espace IO. Si de cette façon le grand polygone tourne sur tous ses côtés sur la droite AS, lui-même parcourra la droite AS égale à son périmètre, composée évidemment de tous les côtés du polygone, placés en ligne droite les uns à côté des autres : mais le petit polygone aura parcouru une ligne HT un peu plus petite, celle que composent les six côtés du petit polygone et les cinq espaces OI par-dessus lesquels on a sauté, c'est-à-dire autant que le polygone a de côtés moins un. Mais le défaut de cette ligne HT par rapport à la précédente AS que parcourt le grand polygone, tout comme aussi chacun des espaces passés en sautant, est égal à la différence des côtés AB et HI, qui diminue d'autant plus que les côtés des polygones sont plus nombreux, s'évanouit enfin, et les droites AS et HT deviennent égales.
- 16 Puisque donc la suite des polygones s'achève dans le cercle, il sera un polygone ayant une infinité de côtés sans grandeur, c'est-à-dire ponctuels ; et de même que le grand polygone parcourt sans aucun saut la ligne AS, égale à son périmètre, et qui consiste bien entendu en tous ses côtés, disposés en ligne droite et continûment, sans aucun intervalle vide ; de même tout comme le petit polygone saute par-dessus autant d'espaces qu'il a de côtés moins un, et parcourt donc une ligne HT presque égale à la ligne AS du plus grand polygone, consistant évidemment en ses côtés et des espaces passés en sautant, de même le petit concentrique emporté par l'autre fait autant de sauts sans grandeur qu'il a de côtés sans grandeur, c'est-à-dire un nombre infini : aussi la ligne qu'il parcourt consiste en un nombre infini de côtés ponctuels du cercle, entre lesquels il y a une infinité d'espaces ponctuels vides ou passés par saut. De là vient que le petit cercle parcourt une ligne égale à celle que parcourt le grand. De même que les parties douées de grandeur d'une ligne d'un pied, si on y intercale des espaces vides doués de grandeur, peuvent être étendus à la longueur qu'on veut, les parties sans dimension d'une ligne d'un pied, c'est-à-dire une infinité de points, si l'on intercale une infinité de vides sans grandeur, c'est-à-dire ponctuels, peuvent être étendues jusqu'à n'importe quelle longueur.
- 17 Ainsi s'exprime Galilée pour ce qui touche la question, ajoutant qu'on explique parfaitement ainsi la raréfaction. Je pense qu'il ne faut pas discuter beaucoup pour montrer que ce discours n'aboutit à rien. Car il suppose que le continu est composé d'une infinité de points sans étendue, opinion rejetée partout dans les écoles. À coup sûr la progression ne vaut pas des polygones aux cercles, et dire que le cercle est un polygone dont les côtés sont en nombre infini, mais sans dimension ou ponctuels, ce sont des mots et des sons. Car un cercle n'a pas de côté, et des côtés sans grandeur ne sont pas des côtés. De la même manière, des sauts instantanés et ponctuels ne sont pas des sauts ; et un saut ponctuel n'est autre chose que pas de saut du tout. En plus on a montré dans le premier théorème que la circonférence entière d'un cercle concentrique quelconque touche successivement la droite entière sur laquelle elle tourne sans aucune interpolation. Il ne se produit donc aucun saut.
- 18 Puis après bien de longs discours il en arrive à expliquer comment la grande circonférence tournée une fois parcourt une ligne plus petite qu'elle-même. En voici l'essentiel⁸. Faisons tourner le petit polygone sur le point I, jusqu'à ce que le côté IK

tombe en IO : alors le point B, extrémité du côté du grand polygone sera ramené vers l'arrière en décrivant l'arc BZ, et le côté BC tombera sur ZR, de telle manière qu'une partie se superposera à une partie du côté AB. Si tous les côtés du petit polygone sont tournés sur la droite HT de cette manière, il parcourra évidemment la ligne HV égale à son périmètre, qui consiste donc en tous ses côtés placés en ligne droite continûment : mais le grand polygone décrira la ligne AX, presque égale à la ligne HV du petit polygone, formée par les côtés du grand polygone placés en ligne droite, mais tombant les uns sur les autres en partie ; et il y aura autant de superpositions de parties que de côtés, moins une. En outre, l'excès de cette ligne parcourue par le grand polygone sur celle que parcourt le petit, et aussi la quantité des superpositions, BZ, c'est la différence des côtés AB et HI elle-même plus nombreux seront les côtés des polygones, moindre elle sera ; elle finit par s'évanouir, et HV et AX par devenir égales. Il applique cela aux cercles comme précédemment. Le petit cercle AQ, dit-il, mû par soi (voyez la figure 2) déroule l'infinité de ses côtés sans grandeur sur la droite BM, tous posés les uns en dehors des autres : mais le grand cercle, porté par le petit, dépose aussi son infinité de côtés sur la droite CL, pas tout à fait les uns en dehors des autres, mais avec une infinité de superpositions, de rétrogradations ou de contractions sans grandeur, c'est-à-dire ponctuelles, mais pourtant sans aucune superposition ni pénétration de parties douées de grandeur. Et il pense que de là il peut se faire qu'en tournant une fois, le grand cercle AR peut parcourir une ligne plus courte que soi et égale à celle que parcourt le petit cercle. Tout comme en effet, dit-il, des parties d'un pied de long posées les unes sur les autres, c'est-à-dire par des superpositions de grandeurs, peuvent faire une grandeur plus petite qu'une donnée, ainsi en retour les parties sans grandeur d'une ligne d'un pied, c'est-à-dire une infinité de points, par d'infinies superpositions sans grandeur, et sans aucune pénétration des parties douées de grandeur, peuvent être resserrées au point de former une grandeur plus petite qu'une donnée. Il ajoute enfin qu'on explique ainsi facilement la condensation.

- 19 Quoique l'interlocuteur Sagredo, comme à son habitude, vante extraordinairement la subtilité de ce discours, je ne crains guère que le lecteur savant ne me taxe de témérité si je dis qu'il est encore plus vide que le précédent. Car bien qu'il explique avec justesse et finesse la rotation des polygones concentriques, l'application aux cercles, tout ce qu'il ajoute sur les superpositions infinies de points sans grandeur et tout le reste, sont de ces choses que n'importe quel philosophe peut réfuter facilement. Je ne réponds que d'un mot : une rétrogradation et une superposition sans grandeur, instantanées ou ponctuelles ne sont ni une rétrogradation ni une superposition ; et il ne peut y avoir une superposition de points, sans que plusieurs points de la circonférence ne touchent un même point du plan. Et en l'occurrence c'est impossible, on l'a montré dans le Théorème 1.

- 20 Voilà en tout cas tout ce que Galilée écrit, qui ne touche que notre première difficulté. Des autres que nous nous sommes proposées, ni lui ni un autre ne les mentionne, à ma connaissance.

Reste maintenant, si nous pouvons éclaircir ces difficultés, à nous exécuter par ordre et brièvement. Avant de le faire, il ne sera pas hors de propos de rappeler par quelle voie j'ai commencé de trouver quelque lumière dans le labyrinthe. Je voyais ce que tout le monde voit certainement : une sphère poussée du doigt se meut sur un plan en avançant d'un mouvement droit et en même temps en tournant autour de son centre ; et je remarquais par conséquent qu'une seule impulsion engendrait deux mouvements, ou bien, ce qui revient au même, un seul mouvement composé de deux d'espèce différente⁹. J'e vins alors à me demander ce qui arriverait si ce n'était pas, comme auparavant, un seul moteur, mais deux qui produisaient ces

deux mouvements différents. Qu'arriverait-il en effet l'un entraîne la sphère dans un mouvement droit sur le plan, et qu'en même temps l'autre tourne cette sphère autour de son centre ? Sans aucun doute la sphère sera mue exactement de la même façon que si elle tournait librement poussée par un seul moteur. Je raisonnais ensuite ainsi : comme ces moteurs sont différents, ils ne dépendent pas l'un de l'autre. Chacun donnera donc à son propre mouvement la vitesse qu'on voudra. Que se passe-t-il donc si celui qui entraîne la sphère l'entraîne très rapidement, mais qu'en même temps l'autre la fait tourner très lentement ? Dans ce cas nécessairement, avant qu'une rotation soit achevée, la sphère aura parcouru sur le plan un espace très long, beaucoup plus grand que sa circonférence. Si d'autre part, alors que le premier moteur entraîne la sphère très lentement, l'autre la fait tourner très vite, j'ai vu tout de suite que nécessairement, dans ce peu de temps où il fait tourner une fois la sphère, l'autre la fait avancer sur un espace beaucoup plus petit que sa circonférence. Ainsi je compris enfin que, même sur un plan matériel, le chemin d'un roulement peut être plus grand ou plus petit que la circonférence de la sphère d'autant qu'on le veut ; et par suite toute l'affaire dépend, non pas de la vitesse ou de la lenteur de chacun des mouvements pris séparément, mais des deux comparés l'un à l'autre et de leur proportion mutuelle.

Ces préalables posés, je viens à mon sujet ; nous envisagerons dans les premiers théorèmes les roulements sur des plans géométriques. Nous étudierons ensuite le régime des roulements sur un plan matériel commun, et dans le plan matériel parfait. Enfin nous examinerons la ligne courbe même que décrit chaque point du cercle lorsqu'il roule, et quelques autres aspects des roulements.

Théorème II

- 21 **Si le mouvement parallèle au plan par lequel est porté le centre d'un cercle c'est-à-dire le cercle même, et le mouvement circulaire par lequel tourne autour de son centre sont d'égale vitesse, la ligne que le cercle parcourt en un roulement sur le plan est égale à la circonférence.**
- 22 **Si le mouvement parallèle de translation est plus rapide que le circulaire, il parcourra en un roulement une ligne plus grande que sa circonférence ; mais il en parcourra une plus petite si le mouvement parallèle est plus lent que le circulaire.**
- 23 Puisque par hypothèse le mouvement de translation et le mouvement circulaire sont de même vitesse, par l'axiome 1 ils parcourent des espaces égaux. L'espace que parcourt le centre par le mouvement de translation dans le temps d'un roulement est égal à la ligne que le cercle parcourt dans le plan en une rotation en le touchant continûment ; mais l'espace qu'accomplit le mouvement circulaire dans le temps d'un roulement est la circonférence même, comme il est clair par la définition 5. Donc la ligne droite qu'en un roulement le cercle parcourt dans le plan qu'il touche continûment est égale à la circonférence. Ce qu'il fallait démontrer.
- 24 La démonstration de la seconde partie se déduira du second théorème universel.

Corollaire

- 25 Si la droite parcourue en un roulement est égale à la circonférence, le mouvement parallèle du centre et le circulaire seront d'égale vitesse.

Théorème III

- 26 **Universellement, le rapport de la vitesse du mouvement parallèle qui porte le centre à la vitesse du mouvement circulaire est le même que celui de la ligne que le cercle parcourt en un roulement sur le plan à la circonférence de ce cercle.**
- 27 L'espace parcouru dans le temps d'un roulement par le mouvement parallèle du centre est égal à la ligne que le cercle parcourt tangentiellement sur le plan en un roulement. Mais l'espace qu'accomplit le mouvement circulaire pendant un roulement est la circonférence même ; car par la définition 5 en un roulement elle tourne entièrement une fois. Et selon l'axiome 2, Galilée a démontré dans son deuxième théorème sur le mouvement uniforme que le rapport des vitesses est identique à celui des espaces parcourus dans le même temps ; donc dans le cas donné aussi le rapport de la vitesse du mouvement de translation à celle du mouvement circulaire est le même que celui de l'espace accompli pendant un roulement par le mouvement de translation à l'espace accompli dans le même temps d'un roulement par le mouvement circulaire. Donc le rapport de la vitesse du mouvement de translation ou parallèle à la vitesse du mouvement circulaire est identique à celui de la ligne droite que le cercle tangent parcourt en un roulement sur le plan à la circonférence même du cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

Théorème IV

- 28 **De cela on pourra facilement déduire, étant donné un roulement quelconque, parmi une infinité de cercles concentriques sur des plans géométriques, lequel est le seul qui accomplit en un roulement une ligne égale à sa circonférence.**
- 29 Ce sera en fait celui qui tourne autour du centre avec une vitesse égale à celle qui emporte le centre dans le mouvement parallèle au plan. On l'appellera à juste titre primaire ou déférent.
- 30 Mais je démontre comme suit que, pour un roulement quelconque donné, on trouvera toujours un cercle et un seul qui tourne autour du centre avec la même vitesse que le centre avance dans le mouvement parallèle. Puisqu'on a montré dans le Théorème 1 que tous les concentriques parcourent en un roulement des lignes droites égales, autrement dit la même, posons que ce soit BM (voir figure 2). Il est possible de décrire autour du centre A une circonférence égale à la droite BM. Posons que ce soit Q. Donc puisque tous les concentriques parcourent en un roulement des lignes égales à BM, en un roulement le concentrique AQ aussi parcourra BM, égale à sa propre circonférence. Donc par le corollaire du Théorème II, le concentrique AQ tourne autour du centre A avec une vitesse égale à celle du centre A dans son mouvement parallèle au plan ; d'où il apparaît aussi qu'il n'y a qu'un seul cercle de ce genre.

Théorème V

- 31 **C'est pourquoi les concentriques plus petits que le primaire parcourent en un roulement des lignes plus grandes que leur circonférence ; en revanche les concentriques plus grands que le primaire accomplissent des droites plus petites que leur circonférence.**

- 32 Soit AQ le cercle primaire qui parcourt une ligne égale à sa circonférence ; et soit pris un concentrique quelconque plus petit AN. Puisque tous les cercles tournent ensemble autour du centre commun A, il est évident que le petit AN tourne plus lentement que le grand AQ. Mais comme par hypothèse AQ parcourt une ligne égale à sa circonférence, la rotation ou le mouvement circulaire du cercle AQ est aussi rapide, par le Théorème II, que le mouvement de progression du centre commun A. Donc le mouvement circulaire du cercle AN est plus lent que le mouvement de progression du centre. Donc par le Théorème III le cercle AN en un roulement parcourt une ligne plus grande que sa circonférence.
- 33 Prenons ensuite un concentrique quelconque AR plus grand que AQ. Il est clair que le plus grand AR tourne plus vite que AQ le petit. C'est pourquoi, puisque le mouvement circulaire de AQ est aussi rapide que le mouvement parallèle du centre commun A, le mouvement circulaire de AR est plus rapide que le mouvement parallèle du centre commun A. Donc par le Théorème III le cercle AR en un roulement parcourt un espace plus petit que sa circonférence. On connaît donc la raison pour laquelle etc.

Théorème VI

- 34 **D'où vient que l'infinité des concentriques inégaux parcourt en un roulement une ligne égale ?**
- 35 Soit AQ le concentrique qui parcourt la ligne BM égale à sa circonférence ; et prenons en un autre quelconque AP, plus grand ou plus petit. Puisque par hypothèse tous les concentriques accomplissent dans le même temps une rotation complète autour du centre commun A, par l'axiome 2 le rapport de la circonférence Q à la circonférence P sera le même que celui de la vitesse avec laquelle tourne Q à la vitesse avec laquelle tourne P. Cependant la droite BM est par hypothèse égale à la circonférence Q, et la vitesse du mouvement parallèle qui emporte le centre A dans le roulement est égale par le corollaire du Théorème II à la vitesse avec laquelle la circonférence Q tourne autour du centre A, puisque par hypothèse la droite BM, qui est parcourue par le cercle AQ en un roulement, est égale à la circonférence Q. Donc le rapport de la droite BM à la circonférence P est le même que celui de la vitesse du mouvement parallèle qui emporte le centre commun A à la vitesse avec laquelle tourne la circonférence P. Donc par le Théorème III la droite BM est celle que parcourt le concentrique quelconque AP en un roulement. On connaît donc la raison pour laquelle l'infinité des concentriques parcourt la même ligne en un roulement.

Figure 2

Théorème VII

- 36 **D'où vient que la ligne que l'infinité des concentriques mus ensemble parcourt en un roulement peut être tantôt plus grande, tantôt plus petite, ou plutôt quelconque ?**
- 37 À coup sûr le fait que le centre commun soit porté ou les cercles tournés autour du centre commun plus ou moins vite ne fait rien à l'affaire ; mais tout dépend de la proportion relative de leurs mouvements.
- 38 Soient donc donnés en nombre quelconque des cercles autour du centre commun A, ainsi qu'une ligne quelconque BM. On peut tracer autour du centre A une circonférence égale à la droite donnée BM. Que ce soit Q. De nouveau on peut faire tourner les concentriques de sorte que le mouvement circulaire du cercle AQ autour du centre commun A soit aussi rapide que le mouvement parallèle qui porte le centre commun A. Mais alors le concentrique AQ, par le Théorème II, parcourra en un roulement une droite égale à sa circonférence Q, c'est-à-dire par construction la ligne BM. Mais tous les concentriques parcourent des lignes égales, comme on l'a montré aux Théorèmes I et VI. Donc tous les concentriques parcourent en un roulement des lignes égales à la ligne donnée BM. On connaît donc la raison pour laquelle etc.

Corollaire

- 39 Toutes les démonstrations précédentes montrent manifestement que la grandeur de la ligne parcourue en un roulement dépend seulement de la proportion des deux mouvements dont est composé le roulement, savoir les mouvements de translation et circulaire.
- 40 *Nous avons à présent assez considéré les roulements dans le cas général, savoir ceux qui se font sur les plans géométriques, abstraits de toute matière ; passons maintenant aux plans matériels.*

Théorème VIII

- 41 **D'où vient que lorsque la sphère ou le cercle tournent librement sur un plan commun matériel, ils parcourent une ligne égale à leur circonférence.**
- 42 *Je ne vois personne qui montre, autrement que par expérience, qu'il en va bien ainsi, et qui en dévoile la raison. Il est évident par les démonstrations précédentes qu'un cercle quelconque, lorsqu'il roule sur un plan géométrique, parcourt en un roulement un espace qui peut être plus grand ou plus petit que sa circonférence d'autant qu'on le veut. Mais que produit le contact d'un plan matériel, pour engendrer cette égalité constante entre la circonférence du cercle et l'espace parcouru en un roulement ? En vue de cette recherche, posons ce principe :*
- 43 *La Nature, ne faisant rien en vain, tout comme elle agit par la voie la plus brève, prend aussi le moyen le plus facile.*

Planche 18, Figure 1

- 44 On donne le cercle AQ, soutenu par le plan commun BM et poussé vers M. Donc par le principe posé ci-dessus, le cercle se dirigera sur le plan vers M par le moyen le plus facile. Il n'avancera donc pas sur le plan d'un mouvement droit seulement ; car dans ce cas il frappera et heurtera les petites inégalités du plan BM, qui par hypothèse est commun (c'est-à-dire rugueux et inégal d'après la définition 6). Le moyen le plus facile d'avancer vers M est donc celui par lequel le cercle heurtera le moins possible les aspérités du plan. Il les heurtera le moins possible s'il tourne autour de son centre A avec la même vitesse qu'il avance vers M. Je le montre ainsi. Posons que le cercle avance vers M, c'est-à-dire que son centre se meut vers M par translation parallèle avec une vitesse de degré 6 ; et qu'en même temps il tourne autour de son centre avec une vitesse de degré 2. Donc puisque le cercle tourne, et par conséquent en descendant sur la partie tournée vers MH abaisse naturellement sa circonférence sur le plan, mais en montant avec l'autre partie soulève cette même circonférence au-dessus du plan, il est manifeste qu'il frappe et heurte déjà moins les petits reliefs du plan. Pourtant parce que la translation vers MH, qui tant qu'il n'y avait aucun mouvement circulaire, était la cause propre du heurt, est plus rapide que le mouvement circulaire, c'est-à-dire que l'abaissement et l'élévation indépendants de la circonférence, il ne reste plus d'empêchement qu'autant que la vitesse de translation vers MH surpasse la vitesse de la rotation. C'est pourquoi si la vitesse de la rotation du cercle autour du centre devient la même absolument que celle de la translation vers MH, alors tout empêchement à la progression est supprimé. Car tourner le cercle avec la même vitesse qu'il progresse ou se porte vers M, c'est précisément abaisser successivement de son propre mouvement toutes les parties de la circonférence sur le plan et les soulever de l'autre côté avec cette même vitesse avec laquelle se fait la progression vers M. Mais alors aucune partie de la circonférence ne peut heurter le plan ; car comme la rotation et la progression sont d'égale vitesse, les parties de la circonférence sont soulevées du plan à l'instant même où elles devraient le heurter.
- 45 Si la rotation devient plus rapide que le mouvement de translation vers MH, je montre ainsi que de nouveau le cercle heurte le plan. Concevons qu'un cercle posé sur un plan commun tourne autour du centre A dans le sens des lettres CQBD, sans aucun mouvement de translation vers MH. Il est évident que le cercle heurtera continuellement les petites aspérités du plan placées autour du contact, tout comme il les heurterait auparavant, lorsqu'il était porté vers MH sans rotation autour du centre A. Si ensuite au mouvement circulaire s'ajoute un mouvement de translation vers MH, quoique moins rapide encore que le circulaire, il n'en fera pas moins que le cercle en tendant vers MH, soit un peu emmené, et par conséquent heurte déjà moins que lorsqu'il restait au même endroit, en tournant seulement autour du centre A. Pourtant même alors il heurtera encore, parce que le mouvement de rotation qui était la cause propre du choc alors qu'il n'y avait pas de

translation vers MH, est plus rapide encore que le mouvement de translation vers MH : de là vient que les parties du cercle descendent sur les aspérités du plan plus vite qu'elles n'en sont emmenées par le mouvement de translation. Si le mouvement de translation ou la progression du centre vers MH devient aussi rapide que le mouvement de rotation, il apparaît évidemment que la circonférence descend sur les aspérités du plan par le mouvement circulaire avec la même vitesse qu'elle en est soulevée par le mouvement de translation. C'est pourquoi tout choc cesse alors de nouveau. Ce n'est donc pas seulement un mouvement circulaire plus lent que le mouvement de translation qui cause le heurt, mais aussi sa plus grande rapidité ; mais lorsqu'ils sont égaux tout choc cesse.

- 46 C'est pourquoi la manière la plus facile correspond au cas où la rotation du cercle et la progression du centre sont de même vitesse. Donc par le principe posé plus haut, le cercle parcourt le plan vers M de cette façon. Cependant par le second Théorème, lorsque la rotation ou le mouvement circulaire et la progression du centre ont la même vitesse, le cercle parcourt en un roulement une ligne égale à sa circonférence. Donc lorsque le cercle tourne librement sur un plan matériel commun, il accomplit en un roulement une ligne égale à sa circonférence. Nous avons donc démontré la proposition, pour le fait et pour la cause.

Théorème IX

- 47 Quoique la sphère ou le cercle roulant librement sur un plan matériel commun accomplisse toujours en un roulement une ligne égale à sa circonférence, il peut cependant arriver que, tourné une fois, en touchant successivement le même plan matériel, il parcourt une ligne plus grande ou plus petite que sa circonférence d'autant qu'on voudra.
- 48 Que le cercle ou la sphère AQ touche le plan matériel BM au point B. Qu'un mouvement fasse tourner la sphère autour du centre A, et que l'autre l'entraîne en même temps en une translation parallèle au plan, de sorte que le centre ne quitte pas la parallèle AH. Alors la sphère sera mue sur le plan BM, comme si elle roulait : et par le Théorème III, le rapport de la vitesse de traction à la vitesse de rotation sera le même que celui de la ligne parcourue sur le plan au terme d'une rotation de la sphère à la circonférence. C'est pourquoi, comme le mouvement qui entraîne la sphère peut l'entraîner plus vite ou plus lentement, en proportion quelconque, que celui qui la fait tourner, la ligne parcourue après un roulement de la sphère pourra être plus grande ou plus petite que la circonférence, en proportion quelconque. Ce qu'il fallait démontrer.

Théorème X

- 49 Étude du roulement rectiligne d'un cône sur un plan géométrique.
- 50 Soit un cône infini (c'est-à-dire indéfini) qui touche un plan géométrique par son côté FE. Coupons ensuite ce cône par une infinité de plans qui y engendrent une infinité de cercles D, B, etc., et dans le plan tangent au cône, des droites DG, BH. Roulons ensuite le cône sur le plan d'un roulement droit, c'est-à-dire de telle sorte que le cercle D ne quitte pas la droite DG ; ceci posé, tous les cercles qui restent ne quitteront pas non plus les tangentes BH, etc. Avec ces données, je dis que :
1. Tous les cercles commencent et achèvent leur roulement en même temps : tous en effet touchent le plan aux points du même côté EF.

2. De cette infinité de cercles un seul parcourt en un roulement une longueur égale à sa circonférence, savoir celui qui tourne autour de l'axe commun FP avec la même vitesse que l'axe lui-même avance d'un mouvement droit.
 3. Les autres cercles en nombre infini parcourent des lignes égales à celui-là.
 4. Cette longueur commune, que tous les cercles parcourent en un roulement, peut être quelconque.
- 51 De tout cela les démonstrations et les raisons se déduisent des sept premiers théorèmes.

Théorème XI

- 52 **Le roulement droit d'un cône sur un plan matériel commun est possible.**
- 53 Avec les mêmes données que dans le Théorème précédent, supposons qu'au lieu d'un plan géométrique il s'agisse d'un plan matériel commun.
- 54 On demande si un cône tangent par un côté à un plan matériel commun peut effectuer un roulement droit. En effet comme tous les cercles qui se trouvent dans le cône touchent le plan matériel commun, selon le Théorème VIII, ils devraient tous parcourir en un roulement des lignes égales à leur propre circonférence. Ce qui est impossible, puisque selon le Théorème précédent tous accomplissent la même longueur.
- 55 Néanmoins on démontrera que le roulement droit d'un cône sur un plan matériel commun est possible, par le même discours à peu près que dans le Théorème IX. Qu'un mouvement tourne le cône autour de son axe, que l'autre l'entraîne tout droit, en sorte qu'il soit toujours tangent et que les cercles D, B, D suivent leurs droites parallèles DG, BH, DG. Le cône sera alors mû sur le plan comme s'il tournait. Si la vitesse de traction est égale à la vitesse de rotation autour de l'axe FP du cercle B par exemple, ce sera ce dernier qui parcourra en un roulement une droite égale à sa circonférence. Et l'infinité des autres parcourra des droites égales à celui-ci.

Théorème XII

- 56 **D'où vient que le roulement droit d'un cône sur un plan matériel commun est difficile et violent.**
- 57 J'en montre ainsi la raison. Considérons un cercle quelconque B dans le cône. S'il roulait seul sur la ligne BH, il tournerait autour du centre ou de l'axe FP avec la même vitesse qu'il avance vers H : car c'est le moyen le plus facile pour le cercle de se mouvoir vers H, comme le démontre le Théorème VIII. Mais puisque le cercle B ne peut tourner sans que, par hypothèse, tous les autres tournent aussi, si la rotation du cercle B est aussi rapide que le mouvement droit qui emporte le centre, la rotation des autres sera plus rapide ou plus lente que le mouvement droit du centre du cercle B ; et plus rapide ou plus lente selon que les circonférences des autres cercles sont supérieures ou inférieures à la circonférence de B, comme le montre l'axiome 2. Donc tous les cercles (c'est-à-dire la surface du cône entière), sauf le seul cercle B, frapperont les petites inégalités du plan commun, comme nous l'avons prouvé dans la démonstration du Théorème VIII. On connaît donc la raison pour laquelle etc.

Corollaire

- 58 On appliquera facilement ce qui vient d'être dit du cône aux cylindres de même axe et de largeur différente.

Théorème XIII

- 59 **D'où vient qu'un cône peut très facilement rouler circulairement par soi-même autour de son centre sur un plan commun.**
- 60 En voici la raison. D'après le principe posé au Théorème VIII, la Nature agit toujours par le moyen le plus facile. L'impulsion imprimée au cône par la poussée le portera de façon qu'il franchisse le plus facilement l'aspérité d'un plan commun. Mais la démonstration du Théorème VII prouve qu'un cercle franchit le plus facilement l'aspérité d'un plan commun lorsqu'il tourne avec la même vitesse que le centre avance parallèlement au plan. Donc le cône aussi, qui est une espèce d'amas de cercles décroissants en nombre infini franchira le plus facilement l'aspérité des plans communs lorsque tous les cercles concevables tourneront également avec la même vitesse que tous les centres dans le mouvement parallèle au plan. Donc seul ce genre d'impulsion pourra mouvoir le cône d'une façon qui rendra les mouvements circulaires de tous égaux en vitesse aux mouvements parallèles des centres. Mais que ce soit le roulement circulaire et lui seul, je le démontre ainsi.
- 61 Le sommet F restant fixe, que le cône tourne circulairement, de façon que le côté FO, qui au début se trouvait en haut, se retrouve sur FVS dans le plan. Supposons qu'un des cercles du cône, B par exemple, tourne avec une vitesse égale à celle du centre dans son mouvement parallèle au plan. Par le Théorème II l'arc B4Q sera donc égal à la partie de la circonférence BS. Et le rapport de l'arc B4Q à l'arc DIO est le même que celui de la périphérie entière B à la périphérie entière D ; c'est-à-dire du diamètre BB au diamètre DD ; c'est-à-dire de FB à FD ; et pareillement le rapport de l'arc BS à l'arc DV est comme celui de FB à FD. Donc le rapport de l'arc B4Q à l'arc DIO est comme celui de l'arc BS à l'arc DV. C'est pourquoi comme les arcs B4Q et BS sont égaux, les arcs DIO et DV sont égaux aussi. Le centre du cercle D parcourt donc dans son mouvement parallèle une ligne égale à l'arc DV, dans le temps que tourne la partie de circonférence DIO. Donc par le corollaire du Théorème II, le mouvement parallèle qui fait avancer le centre du cercle D, et le mouvement circulaire du cercle D autour du centre, sont de vitesse égale. Une démonstration semblable vaut pour tous les autres. C'est pourquoi, si un cône roule circulairement, tous les mouvements circulaires des cercles possibles dans le cône égalent en vitesse les mouvements parallèles des centres. Que cela ne puisse être l'effet que du seul roulement circulaire autour du sommet, on le conclut facilement des précédentes démonstrations.
- 62 On connaît donc la raison pour laquelle un cône poussé par un moteur, lorsqu'il est laissé à lui-même et que le sommet reste fixe, tourne circulairement ; il apparaît du même coup d'où vient que, dans chacun de ces roulements orbiculaires, les circonférences de chacun des cercles du cône parcourent dans le plan commun des arcs qui leur sont égaux, et que la surface du cône entier parcourt dans le plan un secteur qui lui est égal.
- 63 *Une sphère qui roule naturellement sur un plan commun matériel parcourt une ligne égale à la circonférence du grand cercle, comme il a été montré au Théorème VIII. Mais il en va tout*

autrement lorsqu'elle roule sur un plan matériel parfait ; pour étudier ce point, nous ajoutons les cinq théorèmes suivants. Si le lecteur savant y trouve quelque sujet de désaccord avec nous, il doit comprendre que je ne les propose pas avec la même certitude que les précédents : ce ne sont pas toujours des démonstrations, mais mes réflexions physicomathématiques, qu'à l'exemple des grands hommes j'ai voulu consigner par écrit.

- 64 *Note : Dans ce qui suit, par plan matériel parfait, j'entends une partie d'une surface sphérique parfaite, ayant pour centre le centre de la Terre.*

Théorème XIV

- 65 Si une sphère soutenue par un plan matériel parfait est poussée selon une ligne parallèle au plan, elle sera portée par le seul mouvement de translation, sans nulle rotation autour de son centre.

Figure 10

- 66 Que le moteur pousse selon la droite FO parallèle au plan XM, qu'elle passe ou non par le centre A. Puisque la sphère est entièrement soutenue par le plan, et que l'impulsion selon la parallèle FO laisse entière cette sustentation parfaite, il est évident que la sphère ne peut en aucune manière résister à une telle impulsion. Mais le plan non plus ne résiste pas à l'impulsion, puisque par hypothèse d'une part le plan lui-même est dépourvu de toute inégalité, et d'autre part l'impulsion, étant parallèle, n'est pas opposée au plan. Donc le point O, vers lequel l'impulsion est d'abord dirigée, sera porté suivant la parallèle d'impulsion. La proposition est par là évidente.

Théorème XV

- 67 Si un cercle, ou une sphère, soutenu en B par un plan matériel parfait est poussé obliquement vers le bas suivant une droite DOE, qui coupe le plan en E, la sphère roulera, et l'espace qu'elle accomplira en un roulement aura la circonférence de la sphère de la même raison que la ligne BE à l'arc BO.
- 68 *Démonstration de la deuxième partie.* Puisque l'impulsion se fait vers le bas suivant la droite DOE, le mouvement va de manière à diriger le point 0 vers E. Mais la solidité du plan empêche le point 0 de se diriger en descendant vers E sans que la sphère ne tourne autour du centre A, et du même coup n'avance vers M ; et rien n'empêche la rotation de la sphère autour de son centre, ni sa translation vers M, puisque d'une part le plan est

dénué de toute aspérité, et que d'autre part le soutien parfait du plan supprime la gravité de la sphère. La poussée imprimée par l'impulsion pour diriger O en E fait donc avancer la sphère vers MH en la faisant tourner autour du centre A, c'est-à-dire que la sphère roule. C'était le premier point.

- 69 **Démonstration de la deuxième partie.** Soit menée par O la droite FOK parallèle au plan XM. Donc puisque le cercle roule, comme je l'ai montré à l'instant, la circonférence et la parallèle FK se couperont en des points variables, et les arcs compris entre la parallèle et le point de contact (par exemple LR) seront toujours égaux à l'arc BO. Et parce que la direction de l'impulsion demeure toujours la même qu'au commencement, l'impulsion poussera le cercle, pendant tout le roulement, suivant les droites parallèles à la première DOE, par exemple PLS, qui passent par les points d'intersection de la parallèle FK et de la circonférence, et déterminent dans le plan jusqu'au contact des droites égales à la première EB, par exemple SR. Pendant tout le temps du roulement l'impulsion dirige donc successivement tous les points de la circonférence, lorsqu'ils ont atteint la parallèle FK, c'est-à-dire lorsqu'ils sont distants du contact présent d'un arc égal à OB, vers des points du plan variables (par exemple vers S) toujours distants du point de contact présent d'un intervalle égal à EB. Mais cette direction constante et jamais interrompue suppose que le point O descend vers E, et L vers S, et ainsi de tous.
- 70 En effet quoique dans l'instant la poussée dirige immédiatement le point O vers le point E, médiatement pourtant O est dirigé continuellement. Soit en effet un instant quelconque du roulement, par exemple celui où le cercle, de B, sera parvenu en R, coupant la parallèle FK en un autre point de sa circonférence L. À ce moment donc l'impulsion, comme montré plus haut, agit selon la droite PLS, parallèle à la première DOE, et par suite dirige le point L en S ; et par conséquent, comme autrement le point L ne peut se porter en S, et que ni la gravité de la sphère soutenue par le plan, ni aucune inégalité du plan lui-même ne font opposition à un tel roulement, le cercle tend à rouler de telle façon que l'arc RL, qui est égal à BO, parcourt en tournant RS égal à BE. Et ainsi pendant tout le temps du roulement l'impulsion tend à ce que les arcs égaux à BO parcourent des espaces égaux à BE. Et parce que cela ne peut se faire sans que l'arc BO parcoure aussi la droite BE (car dans un roulement uniforme, le rapport d'un arc à l'espace qu'il parcourt est toujours égal à celui de l'autre arc à l'espace qu'il parcourt), il est manifeste que le point O, même après qu'il descend sous la parallèle FK, alors que des points intermédiaires de la circonférence toujours différents descendent vers la parallèle, est dirigé continûment par l'impulsion vers E. C'est pourquoi comme rien n'empêche que le point O ne se porte en E, ni la solidité du plan - la conversion du cercle autour de son centre y pourvoit -, ni l'aspérité du plan, car par hypothèse il est parfait, ni la gravité du cercle ou de la sphère, car il est parfaitement soutenu par le plan, l'impulsion porte le point O en E, et par suite l'arc BO tourné circulairement parcourra la droite BE. Mais le rapport de l'arc BO à la droite qu'il parcourt en une fois est le même que celui de la circonférence entière à la droite parcourue par elle en une fois. Donc le rapport de la circonférence tournée une fois à la droite qu'elle parcourt est le même que celui de l'arc BO à la droite BE. Ce qui était proposé.

Corollaire

- 71 Donc il est aussi naturel à la sphère ou au cercle d'être portés sur un plan matériel parfait qui les soutient en roulant que sans rouler ; et s'ils tournent, de parcourir en un roulement une ligne supérieure ou inférieure qu'égale à leur circonférence. Le fait est que

la détermination en dépend de la direction de l'impulsion, comme on l'a démontré dans le Théorème.

Théorème XVI

- 72 **Un cercle reposant au point B sur un plan matériel parfait qui le soutient, poussé dans une direction définie, parcourra naturellement un espace plus grand que sa circonférence d'autant qu'on le veut.**
- 73 Soit dans la circonférence un point quelconque C, par lequel on fait passer OP parallèle au plan BE. Menons par ce point une autre droite NCE, qui coupe le plan en E. EB peut être plus grand que l'arc BC dans n'importe quelle proportion. Si l'on pousse le cercle suivant la droite NCE, par le Théorème XV, le rapport de BE à l'arc BC est le même que celui de l'espace accompli par le cercle en un tour à la circonférence du cercle. Donc l'espace parcouru par le cercle en un tour peut aussi être plus grand que la circonférence en proportion quelconque. Ce qui était proposé.

Théorème XVII

- 74 **Et la sphère pourra être poussée de sorte qu'en un roulement, elle parcourra sur le plan un espace plus petit que sa circonférence. Pourtant jamais une impulsion droite ne la poussera de façon qu'elle parcoure un espace deux fois plus petit que sa circonférence.**

Planche 18, fig. 8

- 75 Soit un cercle poussé selon une droite quelconque coupant le cercle en N et C, et le plan en E. Soit ensuite la droite IC tangente au cercle en C, qui coupe le plan en D. Les tangentes BD et CD sont égales et prises ensemble seront toujours plus grandes que l'arc BC, quand bien même l'excès serait plus petit que toute grandeur donnée, si les points de contact se rapprochent toujours plus l'un de l'autre. Donc BD est aussi toujours plus grand que la moitié de l'arc BC. Donc BE sera aussi toujours plus grand que la moitié de l'arc BC. Mais par le Théorème XV, la raison de BE à l'arc BC est la même que celle de l'espace parcouru par le cercle en un tour à la circonférence. Donc l'espace parcouru par le cercle en un tour sera aussi toujours plus grand que la moitié de la circonférence.

Théorème XVIII

- 76 **Soit une sphère soutenue en B par un plan matériel par fait et touchée par en dessous par un second plan DZ, géométrique et non matériel. Si la sphère est poussée obliquement vers le haut selon une droite EGD qui coupe le plan supérieur**

en D, mais avec une force insuffisante pour soulever la sphère, celle-ci tournera de façon que la rotation s'effectue de C vers O et la translation de B vers X et D. Et le rapport de l'espace parcouru en un roulement à la circonférence sera égal à celui de la droite CD à l'arc CG.

- 77 **Preuve de la première partie.** Parce que l'impulsion s'effectue vers le haut selon la droite EGD, le mouvement imprimé par le moteur dirige le point G vers le point D. Mais puisque par hypothèse le mouvement ne peut soulever la sphère, le point G ne peut se diriger vers D, à moins que la sphère ne tourne de C en O, et en même temps ne progresse vers X, D. C'est pourquoi, comme rien n'empêche ni cette rotation de la sphère autour de son centre de C vers O, ni sa translation vers D, X (par hypothèse en effet la sphère repose sur un plan parfait dont le soutien supprime entièrement sa gravité), l'impulsion, pour diriger G en D, en faisant tourner la sphère de C en O, la fait avancer vers X, D. C'était le premier point.
- 78 **Deuxième partie.** Une démonstration semblable à celle de la deuxième partie du Théorème XV permettra de l'établir. Je puis en effet quitter à présent la plume. C'est pourquoi je laisse le lecteur appliquer les Théorèmes XVI et XVII à l'impulsion directe vers le haut.
- 79 *Nous étudierons ensuite les lignes décrites par les différents points d'un cercle qui roule elles-mêmes, et les espaces qu'elles enferment, ainsi que quelques autres phénomènes relatifs aux roulements.*

Théorème XIX

- 80 **Lorsqu'un cercle roule sur un plan, le point de contact décrit une ligne courbe que nous appelons cycloïde. Les autres points de la circonférence décrivent des cycloïdes égales et semblables, mais dont les parties sont différemment ordonnées.**
- 81 Considérons le cercle en sa première situation 2. 3. 4. 5, et qu'il commence à rouler. Quand il parvient en E, le point de contact 2 est en O : mais lorsque le roulement est parvenu en K, 2 sera en L. Et ainsi 2 descendra enfin par T en P. Il est donc évident que le point de contact Z décrit la ligne courbe cycloïde.
- 82 Ensuite le point 5, en Z dans la première position du cercle, a la même situation que le point de contact 2, lorsqu'il est placé en O. Donc la ligne OLTP que le point 2 placé en O décrit pendant que le cercle roule de E en P, le point 5 la décrit pendant que le cercle roule de A en Q, savoir la ligne ZNQF. Mais alors le point 5 sera en Q. Mais 5 en Q se comporte de la même façon que 2 en A. Donc 5 situé en Q, pendant que le cercle continue de rouler de Q en P, décrit une ligne courbe QX pareille à celle que décrit le point 2 pendant que le cercle roule de A en E, savoir la ligne AO. Mais OLTP ajoutée à AO forme la totalité de la cycloïde AOLTP. Donc ZFNQ, avec QX, forme aussi une cycloïde égale et semblable à AOLTP. Avec le même raisonnement on prouvera la même chose pour les autres points de la circonférence.
- 83 On pourra tracer sur la figure jointe les chemins des différents points : 5 va de Z en Q par F et N, et de Q en X. 4 est porté par G de D en K, puis de K en a. 3 est porté par de C en E, puis de E en par M et D'autre part du fait que la ligne parcourue par le cercle en un roulement, qui est la base de la cycloïde, peut être égale à la circonférence, mais aussi plus grande ou plus petite d'autant qu'on le veut, résulte qu'il existe une infinité d'espèces de cycloïdes. Il est commode d'appeler primaire celle dont la base est égale à la circonférence du cercle générateur, et secondaires les autres.

- 84 *Torricelli a publié la dimension de l'espace de la cycloïde primaire dans l'appendice qui suit la quadrature de la parabole¹⁰. Il soutient ensuite sans démonstration que la raison des autres espaces cycloïdaux, dont les bases sont plus grandes ou plus petites que la circonférence de leur cercle générateur, à leurs cercles générateurs est celle du double de la base ajouté à la circonférence du cercle générateur à la même circonférence. Nous réunirons ci-dessous deux résultats en une seule démonstration. Cet auteur présente ensuite rapidement, comme s'il était pressé de passer à autre chose, un moyen pour tracer les tangentes à une cycloïde quelconque en un point donné. Mais tout cela d'une manière bien obscure et sans démonstration.*
- 85 *Descartes a résolu ce problème de façon plus abondante. François Schooten a inséré sa construction et sa démonstration dans ses savants commentaires de la Géométrie du même Descartes, p. 223 et suivantes¹¹.*
- 86 *Maintenant nous exécuterons ce que nous avons annoncé ci-dessus. Nous ajouterons une démonstration nouvelle et universelle de ce très célèbre théorème, conçue par nous même.*

Lemmes

1. Si une droite EB touche des cercles égaux EG8, BVS, et si GK les coupe en retranchant des arcs égaux EG et BK, la sécante GK sera parallèle à la tangente EB. On le démontrera par les propositions 27 et 32 du Livre III, et par la 28^e du Livre I.
2. Si CB touche des cercles égaux, et si la parallèle IK est placée entre les circonférences des cercles, IK sera égale à la tangente CB. On le démontre par la 27^e du Livre III et les 28^e et 34^e du Livre I.
3. Dans la progression arithmétique des nombres impairs, selon la suite naturelle qui commence par l'unité, 1. 3. 5. 7. 9. 11, etc., les extrêmes ou ceux qui sont également distants font deux fois le nombre des termes : 1 et 11 font 12, c'est-à-dire deux fois 6, qui est le nombre des termes. De même 3 et 9 font 12. Et ainsi de suite. La raison en est que dans une somme quelconque il y a autant de binaires que de termes dans la progression.

Théorème XX¹²

- 87 **Soit une demi-cycloïde quelconque FTS, la moitié de sa base FB et sa hauteur BS, autour de laquelle on pose la moitié du cercle générateur BOUS.**
- 88 **Je dis que l'espace mixtiligne compris entre la cycloïde primaire STF, la base FB et la circonférence BOUS est double du demi-cercle générateur BUSA.**
- 89 **Dans les autres cycloïdes le mixtiligne en question à la même raison au demi-cercle générateur que le double de la base FB à la circonférence BOUS.**
- 90 Soient ensuite tracés des demi-cercles égaux au générateur BOUS, tangents à la base aux points C, D, E, et qui coupent la cycloïde aux points P, M, G.
- 91 Par la génération de la cycloïde, le rapport de EF qui a été parcouru par l'arc EG, à l'arc EG est comme celui de FB parcouru par la demi-circonférence EGθ ou BUS à la demi-circonférence EGθ ou BUS. Donc en permutant le rapport de EF à FB est comme celui de l'arc EG à la demi-circonférence EG8 ou BUS. Mais par construction le rapport de EF à FB est aussi comme celui de l'arc BK à la demi-circonférence BUS. Donc les arcs EG et BK sont égaux. Je montrerai de même que les arcs DM et BO, et les arcs CP et BR sont égaux. Donc si on mène les droites GKL, MO et PQR, elles seront parallèles à la tangente FB ; et par suite chacun des segments interceptés, KI, IH, HG, et ON, NM, et RP sera égal aux tangentes BC, CD, DE, ou bien à une seule d'entre elles, BC.

- 92 Inscrivons ensuite à la cycloïde les côtés FG, GM, MP, PS, et menons les droites EG, DH et CI, EH, DI et CK, ainsi que HM, IN, HN, IO, et les droites NP et NR.
- 93 Cela fait, on aura construit le rectiligne FGMXPSRZOKB, compris entre les côtés inscrits au cercle et à la cycloïde et la base FB, et divisé en quatre séries de triangles ; c'est-à-dire en autant qu'il y a de côtés inscrits dans la circonférence BUS. Dans la série du haut il n'y a qu'un triangle, dans la seconde MPRO trois ; dans la troisième GMOK cinq, et dans la quatrième, en bas, sept : ce qui forme la progression des nombres impairs 1, 3, 5, 7. Et le nombre des triangles dans les séries également distantes de la parallèle médiane AOM est double du nombre des côtés inscrits dans la circonférence BUS. En effet il y a huit triangles en haut et en bas, et huit aussi dans les deux autres PROM et GMOK. Et il en sera toujours de même, quel que soit le nombre de côtés du rectiligne inscrit dans la cycloïde et le cercle : car comme les séries de triangles procèdent toujours selon les nombres impairs, 1, 3, 5, 7, etc., par le lemme 3 les triangles des séries équidistantes de la médiane feront toujours deux fois le nombre des séries, c'est-à-dire des côtés inscrits dans la circonférence BUS, ou des parties qui divisent la base FB.
- 94 Mais les bases de tous ces triangles en quoi se résout le rectiligne sont les lignes BC, CD, et EF, KI, IH et HG, ON, NM et RP, toutes égales à la même BC, on l'a montré plus haut. La hauteur commune des huit triangles de la série supérieure PSR et de l'inférieure FGKB est BL, car SQ et BL sont égales. Quant aux huit triangles des séries du milieu, la hauteur commune est LA, car QA et LA aussi sont égales. Donc puisque les bases de tous les triangles sont égales à la droite BC, les huit triangles des séries supérieure et inférieure seront égaux au triangle de base octuple de BC et de hauteur BL. Et les huit triangles des séries PROM et GMOK seront égaux au triangle de base octuple de la droite BC et de hauteur LA. Donc tous ensemble, c'est-à-dire le rectiligne entier, sont égaux au triangle de base octuple de la droite BC, et de hauteur égale au rayon BA ; c'est-à-dire à un triangle ayant une base double de FB, et de hauteur égale au rayon BA. Mais un tel triangle, si on considère la cycloïde primaire de base BF égale à la demi-circonférence BUS, est double du demi-cercle BUSA¹³ ; ou évidemment si ce n'est pas la cycloïde primaire qu'on considère, mais une qui a une base plus grande ou plus petite que la circonférence BUS, le rapport de ce triangle au demi-cercle sera comme celui du double de FB à la circonférence BUS¹⁴. Donc le rectiligne, dans la cycloïde primaire, est double du demi-cercle BUSA ; et dans les autres cycloïdes, il a la même raison au demi-cercle que le double de BF à la circonférence BUS. Et avec le même discours exactement, nous le démontrerons pour tous les autres rectilignes de ce genre, quel que soit le nombre des côtés inscrits dans le cercle et la cycloïde, à condition que le nombre des divisions soit pair. Voilà une propriété toute merveilleuse des cycloïdes.
- 95 C'est pourquoi lorsque les côtés inscrits au cercle et à la cycloïde s'évanouissent enfin dans la circonférence BUS et la cycloïde FTS, et lorsque du coup le rectiligne finit par se transformer en mixtiligne, ce mixtiligne aussi sera double de la cycloïde primaire ; dans le cas des autres cycloïdes il aura la même raison au demi-cercle que le double de BF à la demi circonférence BUS. Ce qu'il fallait démontrer.
- 96 Je passe la réduction à l'impossible qui est à la portée d'un géomètre même médiocre.
- 97 **Conséquence évidente.** Donc l'espace cycloïdal primaire est triple du cercle générateur. Et les espaces cycloïdaux secondaires ont la même raison à leur cercle générateur que deux fois la base plus la circonférence à la même circonférence.

Scholie

- 98 Depuis la première édition de cette dissertation, quelqu'un a taxé d'erreur la fin de cette démonstration, et déclaré que j'étais tombé dans le même paralogisme que j'avais reproché à Galilée dans le Scholie du Théorème I. Mais il en est tout autrement. Car lorsque j'ai dit que les côtés inscrits dans le cercle et la cycloïde finissent par s'évanouir dans la circonférence BUS et la cycloïde FTS, et que le rectiligne finit par se transformer en mixtiligne, j'ai seulement voulu dire que les espaces FG, GM, et MP, M S ainsi que BK, KO, OR et RS deviennent plus petits qu'un espace donné ; et que, de là, en supposant la première démonstration, la réduction à l'absurde est à portée ; je laissais la démonstration aux lecteurs géomètres par souci de brièveté. Néanmoins, pour contenter tout le monde, j'ajoute ci dessous cette réduction à l'impossible.
- 99 Si l'on nie que le mixtiligne FTSUB est au demi-cercle BUSA dans le rapport de deux fois FB à la circonférence BUS, ce rapport sera ou plus grand ou plus petit. Supposons-le d'abord plus grand. Il y aura donc une autre quantité ω plus petite que le mixtiligne, par exemple d'un défaut δ , qui sera au demi-cercle BUSA dans le rapport de deux fois FB à la circonférence BUS. Inscrivons dans le demi-cercle des côtés égaux, et autant de correspondants dans la cycloïde, selon le mode de construction employé dans la démonstration, de sorte que les espaces FG, GM, MP, et PS deviennent plus petits que δ , ce dont je montrerai plus bas que c'est possible. Donc l'espace compris entre la périphérie BUS, la base FB et les côtés SP, PM, MG et GF sera plus grand que ω . Il en résulte que le rectiligne compris entre les côtés SR, RO, OK et KB, la base FB et les côtés SP, PM, MG, et GF sera beaucoup plus grande que ω . Mais on avait voulu que le rapport de ω au cercle BUSA soit comme celui du double de FB à la circonférence BUS. Donc la raison du mixtiligne au demi-cercle est plus grande que deux fois BF à BUS : ce qui contredit les démonstrations précédentes.
- 100 Supposons à présent, s'il est possible, que le mixtiligne FTSUB ait au demi-cercle BUSA une raison plus petite que deux fois BS à BUS. Donc inversement le demi-cercle a une plus grande raison au mixtiligne que BUS à deux fois FB. Donc la raison du demi-cercle est à une quantité quelconque λ plus grande que le mixtiligne d'un excès ζ par exemple, comme BUS à deux fois FB. Inscrivons dans le demi-cercle autant de côtés égaux, de sorte que les espaces BK, KO, OR et RS deviennent plus petits que ζ (ce que fait Euclide, 2, 12) et complétons le rectiligne comme ci-dessus. L' espace compris entre les côtés SR, RO, OK, KB, la base BF et la cycloïde FTS est plus petit que λ ; donc puisque l'on voulait que le demi-cercle soit à λ dans le même rapport que BUS à deux fois FB, le demi-cercle sera à l'espace compris par les côtés SR, RO, OK, KB, la base FB et la cycloïde, en plus grande raison que BUS à deux fois FB. Donc le demi-cercle est au rectiligne compris entre les côtés SR, RO, OK, KB, la base FB et les côtés GF, FM, MP et PS en une beaucoup plus grande raison que BUS à deux BF. Ce qui contredit de nouveau ce qui a été démontré plus haut.
- 101 Je montre comme suit que les segments FG, GM, MT, PX et PS finissent par devenir plus petits qu'un espace donné. Divisons FB en tant de parties égales que le rectangle CB devienne enfin plus petit qu'un espace donné ; achevons le rectiligne, comme ci-dessus, avec autant de côtés inscrits au cercle qu'à la cycloïde ; menons le diamètre C δ du demi-cercle CN δ , qui coupe BUS en α et β ; et joignons S δ . Si des demi-cercles égaux SOB et δ NC on relève $\alpha\beta$ O qui leur est commun, et si aux restes on ajoute les espaces mixtes S $\alpha\delta$ et B β C, l'espace S δ NCBOUS sera égal au rectangle CBS δ , donc plus petit que l'espace donné.

Ensuite le petit segment πS est plus petit que le segment SR , c'est-à-dire que le segment PN . Il est donc clair que l'espace entier $S\delta NCBUS$ compris entre les droites $S\delta$, BC et les circonférences BUS et $CN\delta$, est plus grand que le segment cycloïdique $P\pi SP$. C'est pourquoi puisqu'on a montré que l'espace $S\delta NCBUS$ est plus petit que le donné, $P\pi SP$ le sera aussi. Je montrerai de la même façon que chacun des segments restants PM , MG et GF devient aussi plus petit que le donné. Il est donc manifeste que tous pris ensemble seront enfin plus petits que le donné.

Lemme pour le théorème suivant

- 102 Que le cercle BFAQ passe par le centre A du plus grand cercle BLHD, qu'il touche intérieurement. Si on mène du centre A la droite AQR, elle coupera des arcs égaux BQ et BR. Du centre Z du petit cercle menons ZQ, et soit la parallèle A α . Les arcs α B et QB seront évidemment semblables, car ils sous-tendent des angles au centre égaux BA α , BZQ¹⁵. Aussi comme les circonférences entières BLHD et BFAQ sont en raison double l'une de l'autre, l'arc B α sera double de QB¹⁶. Ensuite puisque¹⁷ l'angle au centre BZQ est double de l'angle BAQ, BA α , égal aussi à BZQ, sera double de l'angle BAQ, ou BAR. Donc¹⁸ l'arc α B est aussi double de l'arc BR. Par conséquent les arcs QB et BR sont égaux. Ce qu'il fallait démontrer.
- 103 On démontrera la même chose en menant la tangente AD et la droite OQ, et encore d'une autre façon si du point H on mène la parallèle à AC.
- 104 Mais on le démontre aussi sans tracer aucune ligne à partir des données du lemme. Puisque l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence du même arc ou d'un arc semblable, le même angle BAC à la circonférence du petit cercle BFAC et au centre du grand BLHD coupera un arc BR, semblable à la moitié de BQ. Mais un arc quelconque du grand cercle BLHD est double du semblable dans le petit cercle : ils sont en effet semblables, dans le rapport des circonférences. Donc l'arc BR est double de la moitié de BQ. Donc il est égal à BQ entière.

Fig. 9

Théorème XXI

- 105 Soit le cercle BLHD, touché intérieurement par un petit cercle BFAC, qui passe par son centre A. Pendant le temps où le petit cercle roule une fois vers D, sur la concavité de la circonférence du grand cercle, les points de la circonférence du petit décrivent des diamètres qui passent par ces points.
- 106 Le point de contact B parcourt le diamètre BH¹⁹.
- 107 Le point de contact qui est au centre A parcourt deux fois le rayon AD, en allant de A à D, puis en revenant de D en A.
- 108 Le point F (tout comme les autres points de la demi-circonférence BFA) monte d'abord sur la partie FG du diamètre, puis redescend sur l'espace GX, qui est égal à FS. Le point Q (tout comme n'importe quel autre point de la demi-circonférence BQA) descend d'abord le long de la partie QR du diamètre, puis revient sur le diamètre jusqu'en V, laissant la partie VK égale à QR. Le centre Z décrit la circonférence dont le rayon est AZ.
- 109 Prenons dans la circonférence du petit cercle un point quelconque C, et du centre A par C ou Q tirons une droite qui coupe la circonférence du grand cercle en R. Par le lemme démontré ci-dessus, les arcs OQ et OR sont égaux. C'est pourquoi si le cercle AQBF roule de O en R, le point R descendant à partir de Q arrivera en R ; mais le cercle AQBF coupera alors AB en P : et de nouveau, par le lemme, les arcs RP et RO seront égaux. Nécessairement le point B, qui était d'abord en O, se trouve alors en P, lorsque de O le roulement est parvenu en R. Je montrerai de la même façon, quelle que soit la partie du roulement parcourue dans le quadrant BD, que le point B est toujours en un point du rayon OA.
- 110 Mais à présent, dans le même temps que le point B venant de O parcourt le demi diamètre OA, le point qui est au centre A parcourt le rayon AD ; je le montre ainsi. Puisque le diamètre HO est double du rayon AO, la circonférence HDBL est aussi double de la circonférence ACBF. Donc le quadrant BD du grand cercle est égal à la moitié de la circonférence du petit ACO. Et par le lemme les arcs OQ et OR sont égaux. Donc les restes QA et RD sont égaux aussi. Mais par le lemme RD est égal à RN. Donc QA et RN sont égaux. Mais par le lemme l'arc OQ est aussi égal à l'arc OR, c'est-à-dire par le lemme à l'arc RP. Donc si aux égaux QA et RN on ajoute les égaux OQ et RP, les tous OQA et PRN seront égaux. Donc lorsque le roulement est parvenu en R, et que le point B est venu de O en P, le point qui était au centre A, a été mû de A jusqu'au point N, qui se trouve sur le rayon AD. De la même façon je montrerai que ce point demeure toujours sur le rayon AD, et quand B atteindra le centre A, l'autre sera en D.
- 111 En outre, comme je l'ai montré, pendant que le cercle roule sur le quadrant OD, le point qui est au centre parcourt le rayon AD ; de la même façon avec le point B placé en A et celui qui était en A placé en D, on montrera que le point B parcourt le rayon AH, pendant que le cercle roule sur le quadrant DH ; mais le point qui était au Centre parcourt de nouveau le demi-diamètre de D en A. Et, un roulement ainsi achevé, le point de contact B parcourra tout le diamètre OAH. Mais le point qui est au centre parcourra le demi-diamètre AD deux fois.
- 112 À partir de cela, on démontrera facilement le reste de l'énoncé.

- 113 Il faut entendre seulement ce théorème du roulement du petit cercle sur la partie concave de la circonférence du grand qui lui fait parcourir un espace égal à la circonférence du petit. En effet, comme nous l'avons démontré pour le plan, le petit cercle peut aussi rouler sur le grand de telle façon qu'en un roulement il parcoure un espace tantôt supérieur, tantôt inférieur à sa circonférence.

Théorème XXII

- 114 Quoique la sphère soit le plus régulier de tous les corps, quand elle est roulée sur un plan avec une vitesse uniforme, ses parties se meuvent nécessairement avec une vitesse irrégulière.

Planche 18, fig. 6

- 115 Coupons le grand cercle d'une sphère en quatre quadrants aux points 2, 3, 4, 5. Soit AP la longueur que la sphère parcourt en un roulement, égale à sa circonférence. Si elle est divisée en quatre parties égales aux points E, K et Q, chacune de ses parties sera égale à chacun des quadrants de la circonférence. Puisque donc le quadrant AC est égal à la droite AE, dans le même temps que la sphère roule de A en E, 3 se porte de C en E et 2 de A en 0 ; et par suite A parcourt la courbe AO. D'autre part, puisque EK est égale au quadrant EG, pendant le temps que la sphère roule de E en K, 4 se porte de G en K, et ainsi 2, diamétralement opposé à 4, se porte de 0 en L, parcourant la courbe OL. Mais par hypothèse la sphère roule uniformément, c'est-à-dire par la première définition, parcourt les espaces égaux AE et EK en des temps égaux. Donc le point 2 aussi parcourt en des temps égaux les courbes AO et OL. Mais OL est beaucoup plus grande que AO. Donc selon la définition 2, le point 2 se meut de A en L avec une vitesse irrégulière.
- 116 Mais il faut chercher plus profond la raison de ce phénomène. Pendant que la sphère roule sur le plan, le point de contact 2 ou A est porté sur la cycloïde ALP par un certain mouvement composé de deux mouvements, dont l'un est droit tendant de A en P, l'autre circulaire de A vers Z, suivant la circonférence AZDC. C'est pourquoi pendant que la sphère tourne de A vers P, emportant avec elle le point A, celui-ci parcourt entretemps la circonférence AZDC, mouvement qui affecte le premier inégalement.
- 117 Car lors de la montée suivant le demi-cercle AZD, le premier fait certainement opposition, jusqu'en un certain point, mais de moins en moins : ensuite par la partie qui reste du même demi-cercle, il aide de plus en plus continuellement. Et en descendant suivant le demicercle DCA, les mêmes choses arrivent, mais en ordre inverse.
- 118 En effet le mouvement ascendant sur la demi-circonférence AZD s'effectue suivant l'infinité des différences des inclinaisons des tangentes en nombre infini qu'on peut mener en chaque point de la demi-circonférence : plus celles-ci touchent en un point

élevé, moins le mouvement qu'elles déterminent vers le haut s'oppose au mouvement droit de A vers F, ou plus il le favorise. En fin du second quadrant AZ, il est porté suivant la tangente ZB, qui, si on la prolonge, est perpendiculaire à EF. Mais en fin du second quadrant, il est porté suivant la tangente DH ; comme celle-ci est parallèle à EF, il est évident qu'en D le mouvement circulaire favorise davantage le mouvement droit de A vers F. Il en va de même dans les autres quadrants, mais en ordre inverse. Car le mouvement descendant suivant DCA se porte vers le bas selon les inclinaisons de l'infinité des tangentes ; plus celles-ci touchent en des points bas, moins le mouvement fait vers le bas selon elles favorise le mouvement droit de A vers F ou plus il s'y oppose.

- 119 Et de là il est visible que la vitesse du point 2 croît continuellement sur toute la moitié AOL de la cycloïde, parce que le mouvement circulaire s'oppose toujours moins au mouvement droit de A en K ; mais sur l'autre moitié LIP la vitesse diminue continuellement dans la même proportion qu'elle augmentait, parce que le mouvement circulaire sur le demi-cercle DCA s'oppose toujours plus au mouvement de A en P.
- 120 Ce que nous avons démontré pour le point de contact, nous le démontrerons en mêmes termes de n'importe quels autres points donnés dans la sphère.
- 121 *Mais on demandera peut-être en quel point de la circonférence le mouvement circulaire commence à favoriser le droit et cesse de s'y opposer. La résolution de cette question n'est ni étrangère à notre propos ni indigne de conclure notre dissertation sur le roulement du cercle. Soit donc ce*

Lemme

- 122 On donne un parallélogramme FC. Si le côté BF est porté d'un mouvement uniforme sur BC jusqu'à ce qu'il coïncide avec le côté CE, de sorte que dans le mouvement il demeure toujours parallèle à CE, et que dans le même temps le point B parcourt le côté BE d'un mouvement uniforme, je dis que le point B décrit le diamètre BE.
- 123 Ce lemme est d'Aristote, dans les Questions mécaniques²⁰. Moi je le démontre ainsi. Posons que le côté BF soit parvenu en AM qui coupe le diamètre en O ; et soit menée par O la parallèle GN à BC. Puisque par hypothèse les mouvements sont uniformes, la proportion des vitesses de chaque mouvement sera semblable à celle des espaces accomplis dans les mêmes temps par chaque mouvement. Donc le rapport de BC, c'est-à-dire l'espace que le côté BF parcourt dans le temps entier, à BF ou CE, espace parcouru par le point B dans le même temps, est égal au rapport de BA, que parcourt le côté BF en une partie du temps, à la longueur que le point B parcourt dans la même partie du temps. Mais cette dernière est BG ou AO ; car la raison de BC à BF, c'est-à-dire CE, est celle de BA à AO. Donc quand le côté BF parvient en MA, le point B est en O, qui est un point du diamètre BE. Je montrerai de même pour tout autre instant de ce mouvement que le point B est sur le diamètre. La proposition est donc évidente.

Planche 18, fig. 14.

Planche 17, fig. 123.

124 *Définition*

125 *Un mouvement est dit s'opposer à un autre lorsque le mouvement composé par les deux parcourt un espace moindre que chacun d'eux parcourrait seul dans le même temps ; il le favorise si cet espace est plus grand²¹.*

Théorème XXIII

126 **Soit le cercle EGDQ tangent au plan en E ; dans le temps qu'il est porté vers M, le point E monte par la circonférence EGD, et ensuite descend par DQ en E. Que d'autre part le mouvement droit et le mouvement circulaire soient également rapides et uniformes. Qu'ensuite, vers le haut de part et d'autre du point de contact, on coupe EG et EQ, sixièmes parties de la circonférence entière. Je dis qu'aux points G et Q le mouvement circulaire ne favorise pas le mouvement droit ni ne s'y oppose.**

favorise. D'où il en va aussi évidemment de même pour le point Q. La proposition est donc évidente.

Théorème XXIV

- 130 Avec les mêmes données, je dis que le mouvement circulaire s'oppose au mouvement droit à partir de E jusqu'à J, c'est-à-dire sur le sixième de la circonférence ; qu'il le favorise ensuite sur quatre sixièmes de la circonférence, GDQ ; et qu'il ne s'y oppose derechef que sur le sixième de la circonférence restant QE.
- 131 Soit pris dans l'arc EG un point quelconque K, auquel BKS touche le cercle. En retranchant de part et d'autre les portions égales BF et BC, qu'on complète le rhombe FNCB, et qu'on mène du centre A la droite AB. De même, qu'on trace les droites AK et AE aux contacts K et E. On a montré dans le précédent que la droite AB est bissectrice de l'angle KBE, et passe par l'angle N du rhombe ; de même les angles KBE et KAE font deux droits. Puisque l'arc EK est moindre que la sixième partie de la circonférence, l'angle KAE sera moindre que le sixième de quatre droits, c'est-à-dire deux sixièmes de deux droits. Donc KBE est plus grand que quatre sixièmes de deux droits : et par conséquent NBK d'une part et NBC d'autre part sont plus grands que deux sixièmes de deux droits. Mais comme NC et BF sont parallèles, BNC est égal à NBK. Donc BNC est aussi plus grand que deux sixièmes de deux droits. C'est pourquoi comme NBC est aussi plus grand que deux sixièmes, le reste BCN est plus petit que deux sixièmes ; et par conséquent plus petit que BNC. Donc BC est plus grand que le diamètre du rhombe BN.
- 132 Maintenant lorsque le point E montant circulairement est parvenu en K, il est porté suivant l'inclinaison de la tangente BKF, et parce qu'en même temps il va vers M avec la même vitesse, pendant le temps que le mouvement par BKF met à parcourir la droite BF, le mouvement par BM d'égale vitesse parcourt BC égal à BF. Mais BN est le chemin du mouvement composé de ces deux²⁶ ; j'ai montré déjà qu'il est plus petit que la droite BC, qui aurait été parcourue par le mouvement droit seul. Donc le mouvement selon l'inclinaison de la tangente BKF, c'est-à-dire le mouvement circulaire même au point K s'oppose²⁷ au mouvement vers M : par suite le mouvement circulaire s'oppose à la translation vers M sur tout l'arc EG. C'était le premier point ; il est évident qu'il en va aussi de même sur l'arc QE.

Fig. 125

- 133 Soit ensuite pris au-delà de la sixième partie de la circonférence EG, entre G et le sommet D, un point quelconque K. Étant menée la tangente BKS, soient pris de part et d'autre BF et BC égaux ; on complète le rhombe BFNC. On mène ensuite du centre A, comme auparavant, les droites AK, AB et AE. Puisqu'alors l'arc EK est plus grand que le sixième de la circonférence, l'angle EAK sera plus grand que le sixième de quatre droits, donc que deux sixièmes de deux droits. Il en résulte que KBE est moindre que quatre sixièmes de deux droits, et par suite ABK et ABE qui sont égaux, sont chacun plus petits que deux sixièmes de deux droits. Mais comme CN et BF sont parallèles, BNC est égal à ABK. Donc BNC est aussi moindre que deux sixièmes. C'est pourquoi comme ABC aussi est moindre que deux sixièmes, le reste BCN est plus grand que deux sixièmes, et par suite plus grand que BNC. En découle que BC est plus petit que le diamètre du rhombe BN. Cependant BN est le chemin²⁸ du mouvement composé par le mouvement selon l'inclinaison de la tangente BKF et par le mouvement de translation vers M, de vitesse égale ; mais BC est le chemin parcouru par le mouvement de translation vers M à lui seul, toutes choses évidentes par la première partie. Donc le mouvement selon l'inclinaison de la tangente BKF, c'est-à-dire le mouvement circulaire même au point K, favorise le mouvement vers M²⁹. C'est pourquoi, le point K ayant été choisi quelconque dans l'arc GD, il est évident que le mouvement circulaire favorise le mouvement droit vers M tout au long de l'arc GD. Il est clair qu'il en va de même pour l'arc DQ.

Fig. 126

Lemme I

- 134 Construire un parallélogramme de diamètre (AH) égal à la base (AB) ; et dont le côté (AF) soit à la base (AB) en raison donnée (Q à S).
- 135 Soient décrits deux cercles égaux passant chacun par le centre de l'autre (A et O) et se coupant en E. Par les centres soit menée la droite COAB. Si la raison donnée de Q à S est alors la raison d'égalité, qu'on mène AE, El parallèle à AB et qu'on trace AI : on aura fait ce qui est demandé. En effet, parce que IE est parallèle à BC qui passe par les centres A et O, elle est aussi parallèle à DN qui est tangente à chacun des deux cercles ; donc IE et BA sont ³⁰ égales à DN, donc entre elles. C'est pourquoi AE et BI, qui relient les parallèles égales IE et BA, sont parallèles. Donc AEIB est un parallélogramme, dans lequel le côté AE, la base AB et le diamètre AI sont égaux.
- 136 Si la raison donnée de Q à S était d'inégalité moindre, que Q soit à S dans le même rapport qu'à AB une droite qui ayant son extrémité en A est inscrite dans le cercle ANC, soit AF ; qu'après avoir mené FH parallèle à AB, on joigne les droites AH et BH. Je montrerai, comme plus haut, que AFHB est un parallélogramme dans lequel FA a, avec AB, une raison d'inégalité donnée moindre, et que le diamètre AH est égal à la base AB.
- 137 Enfin si la raison donnée de Q à S est d'inégalité supérieure, il faudra qu'elle soit moindre que la raison double. Que le rapport de Q à S soit celui d'une certaine droite à AB. Elle sera selon la condition posée ci-dessus, plus petite que CA double de AB ; et par suite elle pourra être inscrite au cercle ANC, comme c'est le cas pour AK Menons KG parallèle à AB et traçons BG et AG. Je montrerai de nouveau comme ci-dessus que AKGB est un parallélogramme, dans lequel le côté AK est plus grand que la base AB en raison donnée, mais que le diamètre AG et la base AB sont égaux. La démonstration de la détermination est évidente.

Planche 17, Fig. 128

Lemme II

- 138 Le parallélogramme AFHB par exemple, dont le diamètre AH est égal à la base AB, mais dont le côté AF est plus petit que la base, a un angle FAB plus petit que l'angle EAB du rhombe AEIB, dans lequel la base AB, le diamètre AI et le côté AE sont égaux. Et plus le côté AF est petit, moins l'angle FAB excède le droit DAB, et cet excès deviendra enfin plus petit qu'un angle aigu donné.
- 139 Si le parallélogramme AKGB par exemple, dont le diamètre AG est égal à la base AB, a un côté AK plus grand que la base, alors l'angle KAB est plus grand que l'angle EAB du rhombe AEIB. Et plus le côté AK se rapprochera de la grandeur de AC, double de AB, plus l'angle KAB se rapprochera de la grandeur de deux droits; et à la fin le défaut sera moindre qu'un angle aigu donné.
- 140 Tout cela est évident à l'examen.

Planche 17, Fig. 129

Lemme III

- 141 Soit donné un parallélogramme ADCB de diamètre AC égal à la base AB. Le parallélogramme dont les côtés sont en même raison que DA et AB, s'il a un angle plus grand que l'angle DAB, a un diamètre moindre que sa base; s'il a un angle plus petit que DAB, son diamètre est plus grand que sa base.
- 142 Avec A et B pour centres, on décrit des cercles par D et C, et on trace le parallélogramme dont les angles E, H, F et G se trouvent sur les circonférences. Leurs côtés seront

proportionnels à DA et BA, c'est-à-dire égaux : et le diamètre AH du parallélogramme qui a l'angle EAB plus grand que l'angle DAB, est plus petit que la droite AC, c'est-à-dire que la base AB. Mais le diamètre AG de l'autre parallélogramme qui a l'angle FAB plus petit que l'angle DAB, est plus grand que la base AB. Mais la raison des diamètres aux bases dans les parallélogrammes AEHB et AFGB est semblable à celle qui se trouve dans tous les autres qui leur sont semblables. La proposition est donc évidente.

Théorème XXV

- 143 Soient les mêmes données qu'au théorème XXIII ; mais que le mouvement circulaire EGDQE soit maintenant plus lent que le mouvement droit vers M.
- 144 Soit³¹ le parallélogramme XZ de diamètre TV égal à la base TZ ; mais que le côté XT soit inférieur à la base TZ dans la même proportion que le mouvement circulaire est plus lent que le droit. Que du centre on mène alors AR, qui fasse avec la tangente PEC un angle ARC égal à l'angle XTZ. Qu'on mène sur AR la perpendiculaire AK qui coupe le cercle en K ; et qu'on retranche l'arc IE égal à l'arc EK.
- 145 Je dis que le mouvement circulaire plus lent que le droit dans le rapport de XT à TZ s'oppose au mouvement droit sur tout l'arc EK, mais qu'il le favorise sur KDI et que de nouveau il s'y oppose sur IE.
- 146 Soit en effet menée la tangente SKP³². Puisque l'angle AHP est droit, par Euclide III, 18, et que KAR est droit par construction, SKP et AR sont parallèles. Donc l'angle EPS est égal à l'angle CRA ; c'est-à-dire à l'angle XTZ. C'est pourquoi si PS et PC sont coupés proportionnellement aux côtés XT et TZ, et si on complète le parallélogramme PSNC, celui-ci sera semblable à XZ ; puisque dans celui-ci le diamètre TV est égal à la base TZ, dans l'autre le diamètre PN est aussi égal à la base PC. Maintenant s'il y a deux mouvements, l'un suivant la droite PS, l'autre par PC, tels que celui qui suit PS est plus lent que celui qui suit PC dans la même raison que SP est plus petit que PC, dans le même temps l'un parcourra PS et l'autre PC. Et par suite³³ le chemin du mouvement composé des deux accompli dans le même temps sera le diamètre PN, diamètre du parallélogramme. Parce que ce chemin est égal³⁴ à la base PC, qui est parcourue par le mouvement vers C, il est évident que le mouvement selon l'inclinaison de la tangente PS ne s'oppose pas au mouvement de translation par PC. C'est pourquoi comme le mouvement circulaire EKD suit au point K l'inclinaison de la tangente PKS, celui-ci ne s'oppose pas à la translation droite vers C, ni ne la favorise³⁵. D'où il en va évidemment aussi de même pour le point I.
- 147 Soit ensuite pris un point quelconque a dans l'arc EK ; que la droite $\omega\alpha$ y soit tangente : s'il y a dans l'angle $\alpha\omega C$ un parallélogramme dont les côtés soient proportionnels à SP et PC, son diamètre est³⁶ plus petit que la base ; mais ce diamètre est le chemin³⁷ que parcourt le mouvement composé par le mouvement suivant l'inclinaison de la tangente $\omega\alpha$, et du mouvement qui parcourt la base dans le même temps et tend vers C. Il est donc évident que le mouvement suivant l'inclinaison de la tangente $\omega\alpha$, c'est-à-dire le mouvement circulaire au point α s'oppose³⁸ à la translation vers C. Donc puisque le point α a été pris quelconque le mouvement circulaire s'oppose à la translation vers C sur tout l'arc EK. De là il en va évidemment de même aussi pour l'arc IE.
- 148 Soit ensuite pris entre K et le point au sommet D un point quelconque θ , auquel est tangente $\delta\theta$; et dans l'angle $\delta\theta E$, tracer le parallélogramme³⁹ dont les côtés sont

proportionnels à SP et PC ; son diamètre⁴⁰ est plus grand que la base. D'où, en appliquant les raisonnements précédents, il est facile de voir que le mouvement circulaire au point θ , et par suite aussi sur tout l'arc KD, favorise le mouvement droit vers C. De là il en va évidemment de même aussi pour l'arc DI.

Théorème XXVI

- 149 **Avec les mêmes données : Si le mouvement circulaire est plus lent que le droit, le circulaire s'oppose au droit de part et d'autre sur des arcs plus grands que les sixièmes EG et QE. Et plus le mouvement circulaire est lent, plus grands sont de part et d'autre les arcs sur lesquels il s'oppose au mouvement droit : mais ils sont toujours plus petits que les quadrants EG et HE, si lent que soit le mouvement circulaire.**
- 150 Soit la même construction que dans les précédents, où nous montrons, en supposant le mouvement circulaire inférieur au droit comme XT à TZ, c'est-à-dire⁴¹ comme SP à PC ; que le circulaire s'oppose au droit sur l'arc EK, et en descendant sur l'autre partie sur l'arc IE, égal à EK. Mais par la démonstration du Théorème XXIII, il est évident que, si de la droite B β , tangente au point G, extrémité de la sixième partie EG, et de la tangente BM on retranche des grandeurs égales, et si on complète le rhombe, son diamètre est égal à la base. Donc dans le parallélogramme PSNC de diamètre PN égal à la base PC, mais dont le côté SP est plus petit que la base, l'angle SPC est plus petit⁴² que l'angle GBC du rhombe. Donc le point K où le côté SP touche le cercle est nécessairement plus haut que G, où le côté du rhombe est tangent, et par suite l'arc EK est plus grand que le sixième EG. C'était le premier point.
- 151 Ensuite, plus le mouvement circulaire est inférieur au droit, plus aussi (comme c'est visible par la construction précédente) SP doit être inférieur à PC. Donc l'angle SPC devient aussi d'autant plus petit⁴³ que l'angle GBC du rhombe, et par suite le contact K est d'autant plus élevé, et l'arc EK d'autant plus grand. C'était le second point.
- 152 Enfin parce que l'angle du parallélogramme de diamètre égal à sa base demeure toujours⁴⁴ plus grand qu'un droit, il est évident que le côté SP, dont le contact détermine la grandeur de l'arc sur lequel le mouvement circulaire s'oppose au droit, ne peut être tangent en O, extrémité du quadrant EO, ou au-dessus de O. D'où paraît le troisième point.

extrémité de la sixième partie EG) et de la tangente BM on retranche des longueurs égales, et si on complète le rhombe, son diamètre est égal à sa base. Donc dans le parallélogramme PSNC dont le diamètre PN est égal à la base PC, mais le côté PS plus grand que la base, l'angle SPC est plus grand⁴⁸ que l'angle GBC du rhombe. Donc le point K, où le côté PS est tangent, est plus bas que le point G où le côté B du rhombe est tangent ; et par suite l'arc EK est plus petit que le sixième EG. C'était le premier point.

Planche 17, fig. 131

- 157 Ensuite plus le mouvement circulaire approche de la vitesse double, plus aussi en vertu de la construction le côté SP approche du double de la base PC. Donc l'angle SPC devient aussi⁴⁹ d'autant plus grand et approche plus de la grandeur de deux droits, et par suite le contact K en est d'autant plus bas et l'arc EK devient plus petit, et finit par devenir plus petit que tout donné : en effet l'angle SPC devient enfin inférieur à deux droits⁵⁰ d'un angle qui devient plus petit que tout donné ; il en découle nécessairement que l'arc EK devient enfin inférieur à tout donné. C'était le second point.

Théorème XXIX

- 158 Avec les mêmes données : si le mouvement circulaire EGDQE est plus rapide du double, ou plus, que le mouvement de translation droit vers C, en aucun point de la circonférence il ne s'y opposera, mais il le favorisera totalement.

Planche 17, fig. 130

- 159 La démonstration est assez claire par la seconde partie du Théorème précédent. Néanmoins, au cas où cela paraîtrait utile, je le démontre ainsi. Posons d'abord ce postulat : deux mouvements circulaires de vitesses différentes ne peuvent s'opposer au même mouvement droit sur des parties égales de la circonférence. Que s'oppose à un

mouvement droit, s'il est possible, un mouvement circulaire plus rapide du double ou plus, sur un certain arc EK. Soit menée la tangente SKP, et dans l'angle SPE soit le parallélogramme PSNC, de diamètre PN égal à la base PC. Il est manifeste par la démonstration du Théorème XXVII que le mouvement circulaire dont la vitesse est à celle du mouvement droit dans le rapport de SP à PC, s'oppose au mouvement droit sur l'arc EK. Mais le côté SP est nécessairement moindre que le double de la base PC, comme il est évident par la détermination du lemme 1 du Théorème XXV : et par suite le mouvement circulaire aussi, qui s'oppose au mouvement droit sur l'arc EK, est plus rapide que le mouvement droit de moins que le double. Donc deux mouvements circulaires inégaux, l'un plus rapide que le droit du double, l'autre plus rapide de moins que le double, s'opposent au même mouvement droit sur le même arc EK, ce qui contredit le postulat.

Corollaire

- 160 Par ce que nous avons démontré dans les sept derniers Théorèmes, on voit, lorsqu'une sphère roule sur un plan, combien le mouvement circulaire empêche ou favorise le mouvement d'un point quelconque dans la sphère progressant sur sa cycloïde. Si en effet le mouvement circulaire est aussi rapide que le droit (ce qui paraît toujours au regard lorsqu'une sphère roule librement sur un plan matériel), il empêche la progression du point sur sa cycloïde pendant un tiers du temps qui s'écoule pour un roulement complet ; mais il l'aidera pendant les deux tiers du même temps. C'est visible par le Théorème XXIV.
- 161 Si le mouvement circulaire est plus lent que le droit, il empêche la progression du point sur sa cycloïde de plus que sur le tiers du temps d'un roulement entier ; mais il le favorise sur moins que les deux tiers du temps. Et plus le mouvement circulaire est surpassé par le droit, plus longtemps il l'empêche, mais toujours pendant moins que la moitié du temps. Cela est clair par le Théorème XXVI.
- 162 Si le mouvement circulaire est plus rapide que le droit (mais moins que du double), il l'empêche sur moins que le tiers du temps. C'est clair par le Théorème XXVIII.
- 163 Enfin s'il est plus rapide du double ou plus, il ne l'empêche plus du tout, mais favorise la progression du point pendant tout le temps sur sa trajectoire cycloïdale. C'est évident par le Théorème XXIX.
- 164 *Pour la plus grande gloire de Dieu.*

Fig.13

NOTES

1. Galilée, *Discours concernant deux sciences nouvelles*, éd. Clavelin, Paris, Colin, 1970, p. 125 sq.
2. Pour traduire le latin *rasio*, j'emploie ce terme, quoiqu'il soit inusité en ce sens, afin d'éviter l'équivoque avec le mot *glissement*. On verra au *Théorème VIII* les difficultés qui découlent de cette définition.
3. Galilée, *Discours...*, III, *Théorème II*, éd. Clavelin, p. 127.
4. Ces références renvoient aux *Eléments* d'Euclide
5. Pris à la lettre, le raisonnement est faux, comme on peut le vérifier sur la figure. Mais cela ne change rien à la substance de la conclusion.
6. Aristote, *Problèmes mécaniques*, 24, 855 a ; voir trad. Hett, XIV, *Minor Works*, Loeb, W. Heinemann, London, 1980, p. 387 sq. Outre Aristote et Galilée, la *Dissertation* de 1650 mentionne *Blancanus*, c'est-à-dire Joseph Biancani, SJ, élève de Clavius et auteur d'un commentaire d'Aristote ; mais le Père Tacquet note seulement que « *Blancanus aliud non exhibet quam paraphrasim Aristotelis* » (p. 13). D'autre part l'avertissement *Ad Lectorem* de 1650 mentionne *Ioannes Bapt. Benedictus* (Benedetti), « *aliique permulti* », sans s'y arrêter davantage.
7. Galilée, *Ibid.*, I, éd. Clavelin, p. 22 sq.
8. Galilée, *Ibid.*, p. 43 sq. Le texte latin de la *Dissertatio* de 1651 porte : « *quomodo maior circumferentia semel convoluta percurrat lineam se maiorem* » ; il y a là un lapsus pour *minorem*. Galilée dit : « comment au cours d'une rotation du petit cercle, le plus grand décrit une ligne droite plus courte que sa circonférence ». L'*Index errorum* ne corrige pas l'erreur.
9. Dans le *Des Mouvements composés*, Roberval distingue dans le mouvement de la Roulette deux mouvements, « l'un circulaire, par le moyen duquel le point (...) parcourt une fois la circonférence de son cercle, l'autre droit (...) » tant tous deux uniformes ». Il poursuit : « d'où vous voyez que ces deux mouvements étant uniformes, le point (...) peut décrire trois diverses sortes de Roulettes, suivant que son mouvement circulaire sera proportionné à son mouvement droit, ou si vous voulez suivant la raison de circonférence de son cercle à la ligne (...) que le centre décrit (...) » (p. 58 sq.). Je cite d'après *Mémoires de l'Académie des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699*, VI, Paris, 1730, Compagnie des Librairies.
10. Torricelli, *De Dimensione Parabolae*, Appendix de Dimensione Cycloïdis ? in *Opere*, I, Faenza, p. 163.
11. Voir les *F. a Schooten Commentarii in Librum II*, dans l'édition latine de la *Géométrie* de Descartes, note 0. L'étude originale de la cycloïde par Descartes se trouve dans sa lettre à Mersenne du 27 juillet 1638 (Mersenne, *Correspondance*, VII, p. 407 sq.) et la lettre à Mersenne du 23 août 1638 (*Ibid.*, VIII, p. 34 sq.). Les *Eléments de Géométrie* montrent que le P. Tacquet apprécie l'œuvre mathématique de Descartes.
12. Démonstration résumée par G. Maupin (voir bibliographie) pour le cas de la roulette simple.
13. Par Arch. p. l. dim. Circ.
14. 2. 1. 1. Cycl. & Annul.
15. 29. 1.
16. Pappus. 1. 5. P. 41.
17. 20. 3.
18. 33. 6.
19. Cas particulier de la construction de l'hypocycloïde lorsque, le rayon du petit cercle étant moitié du rayon du grand, elle se confond avec le diamètre du grand cercle.

20. Aristote, *Problèmes mécaniques*, 1, 848 b. On trouve un lemme semblable dans Roberval, *Des Mouvements composés*, éd. cit., p. 6-7, sans référence à Aristote.

21. On verra plus bas que l'aide et l'empêchement que le mouvement circulaire apporte à la translation sont mesurés par la distance parcourue par le point mû par ces deux mouvements, représentée d'après le P. Tacquet par la diagonale du parallélogramme des mouvements. Selon, dit-il, que la diagonale est plus longue ou plus courte que la base horizontale du parallélogramme, qui correspond au mouvement de translation, on dira que le mouvement circulaire l'aide ou l'empêche. De là découlent les résultats auxquels le P. Tacquet parvient dans la fin de sa *Dissertatio*.

22. 18. *Elem.* 3.

23. 6 .2.

24. Lemme.

25. Défin.

26. Lemme.

27. Déf. Précédant le théor. XXIII.

28. Lemme.

29. Défin.

30. Dem. 2, Théor. 20.

31. Par le lem. I précéd.

32. Les *Errata* de 1651 indiquent que *a lin. 16*, c'est-à-dire dans la démonstration de ce théorème, *citationes turbatae omnes igitur omissae censeantur*. Nous laissons pourtant subsister ces références à titre documentaire...

33. Lemm. Théor. XXIII.

34. Par construction.

35. Lemme 3 précéd.

36. On le montre comme ci-dessus.

37. Lemm. I précéd.

38. Lemm. 3 précéd.

39. Def. Précédant le théor. XXIII.

40. Def. Ibidem.

41. Par la constr. Précéd.

42. Lemm. 2. Théor. XXV.

43. Ibid.

44. Ibid.

45. Lem. I. Théor. XXV.

46. Constr. Précéd.

47. Théor. XXVII.

48. Lemm. 2. Théor. XXV.

49. Ibidem.

50. Ibidem.

NOTES DE FIN

a. 18.3 (4).

- b. 28.1.
- c. 18.3
- d. 28.1
- e. Défin.3
- f. Théor.1

INDEX

Mots-clés : physique, mathématiques, cercle, roulement

Keywords : physics, mathematics, circle, rolling

AUTEUR

PÈRE ANDRÉ TACQUET

Professeur de Mathématiques au Collège de la Société de Jésus de Louvain.