La théorie syllogistique de Lewis Carroll

Amirouche Moktefi

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/cps/2798>

DOI : 10.4000/cps.2798

ISSN : 2648-6334

Éditeur

Presses universitaires de Strasbourg

Édition imprimée

Date de publication : 15 décembre 2010

Pagination : 207-224

ISBN : 978-2-35410-031-5

ISSN : 1254-5740

Référence électronique

Amirouche Moktefi, « La théorie syllogistique de Lewis Carroll », *Les Cahiers philosophiques de Strasbourg* [En ligne], 28 | 2010, mis en ligne le 15 mai 2019, consulté le 08 novembre 2022. URL : <http://journals.openedition.org/cps/2798> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/cps.2798>

Creative Commons - Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International - CC BY-NC-SA 4.0

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

La théorie syllogistique de Lewis Carroll

Amirouche Moktefi

Le syllogisme est la forme classique d'un argument logique tel qu'on le retrouve dans la logique traditionnelle issue d'Aristote. Objet de nombreux travaux en deux millénaires, la syllogistique reste la doctrine dominante en logique jusqu'au XIX^e siècle. Les syllogismes y sont présentés sous une forme simple et élémentaire : trois propositions sous forme normale (A, E, I, O), construites de sorte que la troisième (dite conclusion du syllogisme) découle nécessairement des deux premières (dites prémisses du syllogisme). La syllogistique discute aussi d'arguments plus complexes, mais les prémisses y sont souvent classées pour former une succession de syllogismes et aboutir à une conclusion finale. Le syllogisme en reste donc l'objet central. Cependant, lorsque George Boole (1815-1864) publie ses travaux de logique en 1847 et 1854, il s'assigne explicitement parmi ses objectifs la construction d'une théorie logique dans laquelle il serait possible de traiter des problèmes plus complexes que les syllogismes, en éliminant à partir d'un nombre quelconque de propositions les termes que l'on ne souhaite pas retrouver dans la conclusion, ce qui permet de déterminer la relation logique entre les termes retenus dans la conclusion¹. Ce problème, dit de l'élimination, englobe évidemment le syllogisme qu'il réduit à un cas particulier, le plus élémentaire, d'une théorie plus générale. Boole ne renie donc pas la validité du syllogisme comme mode de raisonnement, mais n'en fait plus l'objet central de la logique, dont il élargit le domaine en considérant des problèmes qu'il n'est pas possible de réduire à une forme syllogistique. Par ailleurs, l'approche de Boole est plus ambitieuse y compris dans le cas du syllogisme puisqu'il ne s'agit plus de vérifier la validité d'un syllogisme

1 Boole G., *The Laws of Thought*, London, Walton and Maberly, 1854, p. 8.

(avec trois propositions données) mais bien de trouver la conclusion qui découle de deux propositions données comme prémisses.

Il ne faut cependant pas croire que les travaux de Boole furent l'objet d'une reconnaissance immédiate. En Grande-Bretagne, où apparaît ce courant symboliste, la logique connaît certes un renouveau, mais la syllogistique reste encore présente tout au long du XIX^e siècle. Les idées de Boole connurent peu de succès jusqu'à ce que William Stanley Jevons (1835-1882) et John Venn (1834-1923) les discutent et les fassent connaître. Dans la seconde moitié du siècle, plusieurs auteurs inventent de nouvelles écritures symboliques et s'efforcent d'en montrer la supériorité, notamment pour la résolution du problème de l'élimination². Malgré ces innovations, l'enseignement de la logique reste essentiellement centré sur la théorie syllogistique, notamment sous la forme que lui donne Henry Aldrich (1647-1710) dans son *Logicae Artis Compendium* en 1691, repris en 1849 par Henry Longueville Mansel (1820-1871) dont l'ouvrage connaît une large diffusion et de nombreuses rééditions³. Ce contexte historique fait tout l'intérêt de l'œuvre logique de Charles L. Dodgson (1832-1898), alias Lewis Carroll. En effet, cette œuvre construite dans les deux dernières décennies du XIX^e siècle, oscille entre ces influences contradictoires que sont la syllogistique aristotélicienne et la logique symbolique booléenne. Il est dès lors intéressant d'examiner comment Carroll analyse le problème du syllogisme et se situe sur l'échiquier logique qui se met en place en cette fin de siècle. Il faut garder à l'esprit que les travaux logiques récents du Continent, notamment ceux de Gottlob Frege (1848-1925), bien qu'ils aillent s'avérer fondamentaux au début du XX^e siècle, sont encore peu connus en cette fin de XIX^e siècle et doivent encore attendre l'arrivée de Bertrand Russell (1872-1970) sur la scène logique pour les voir adoptés.

Carroll publie d'abord *The Game of Logic* en 1886, un jeu où, à l'aide d'une table et de jetons, on peut « s'amuser » à résoudre des syllogismes⁴.

- 2 Green J., The problem of elimination in the algebra of logic, in Drucker T. (dir.), *Perspectives on the History of Mathematical Logic*, Boston / Basel / Berlin, Birkhäuser, 1991, p. 1-9.
- 3 Mansel H. L., *Artis Logicae Rudimenta from the text of Aldrich*, 4^e éd., Oxford, Henry Hamman, 1862.
- 4 Carroll L., *The Game of Logic*, London, Macmillan, 1886. Carroll n'avait pas apprécié la qualité de l'impression de cette première édition et prépare dans la foulée une seconde édition qui paraît l'année suivante.

Il travaille par ailleurs à une trilogie intitulée *Symbolic Logic*. En optant pour ce titre austère qui ne sied guère à un ouvrage populaire, il revendique son appartenance à la lignée symboliste. Cette approche lui tenait clairement à cœur et il travailla à sa diffusion. La première partie, dite élémentaire, de cette trilogie paraît au début de l'année 1896. Trois nouvelles éditions suivent dans l'année⁵. Carroll travaillait encore sur les parties suivantes, dites avancée et transcendantale, de son ouvrage à sa mort en 1898. Des fragments, établis à partir de notes manuscrites et d'épreuves d'imprimerie, ont été publiés en 1977⁶. Un des soucis majeurs de Carroll était d'assurer la popularité de l'ouvrage en le mettant à la disposition d'un large public. Il affirme y réfuter trois idées reçues sur la logique, selon lesquelles cette dernière serait trop difficile pour être comprise par la majorité des gens, serait ennuyeuse et inintéressante, et enfin se révélerait totalement inutile dans la vie quotidienne. Carroll invite ensuite ses lecteurs à «éprouver» son ouvrage afin de juger par eux-mêmes de la difficulté, de l'intérêt et de l'utilité de la logique. Carroll invoque également l'importance de la logique pour raisonner correctement dans les mathématiques, mais également dans l'exploration des questions religieuses et même dans les débats publics nombreux auxquels il participa. Il regrette ainsi que la logique ne soit pas plus présente pour éviter les fréquentes erreurs de raisonnement au quotidien⁷. Cette conviction que la logique peut être utile dans la vie pratique explique aussi son implication dans l'étude de la logique et surtout dans son enseignement et sa vulgarisation. Afin d'assurer une grande publicité à ses ouvrages logiques, Carroll les signe avec son pseudonyme littéraire. En outre, il y emploie un style familier et invente des personnages fabuleux pour rendre ses exemples vivants et amusants. Malgré ses efforts, cependant, il est difficile d'affirmer que ses ouvrages aient connu un quelconque succès. La majorité des critiques peine à comprendre la portée de ses ouvrages qui balancent entre instruction et amusement.

5 Carroll L., *Symbolic Logic: Part I. Elementary*, 4^e éd., London, Macmillan, 1897.

6 Bartley III W. W. (dir.), *Lewis Carroll's Symbolic Logic*, New York, Clarkson N. Potter, 1977 (nouvelle édition en 1986). Pour compléter l'œuvre logique de Carroll, il faut citer les nombreux pamphlets et tirés-à-part qu'il fit imprimer. Ces textes ont été rassemblés dans: Abeles F.F. (dir.), *The Logic Pamphlets of Charles Lutwidge Dodgson and Related Pieces*, New York, The Lewis Carroll Society of North America, 2010.

7 Carroll L., *The Game of Logic*, 2nd éd., London, Macmillan, 1887, p. 32.

La logique de Carroll est une logique de classes. L'univers contient des choses et les choses ont des attributs. Les classes sont constituées mentalement en regroupant des choses partageant un (ou plusieurs) même(s) attribut(s). Une proposition énonce justement la présence ou l'absence d'un attribut chez une chose. La notion d'univers du discours⁸ permet de délimiter pour chaque énoncé (ou ensemble d'énoncés) un domaine dans lequel sont définis ses (leurs) termes et leurs contraires. La notion de division dichotomique⁹, en revanche, permet de diviser l'univers en sous-classes exhaustives et mutuellement exclusives. Il n'est pas nécessaire que les classes dont nous discutons contiennent des choses qui existent dans la réalité. Si c'est le cas, la classe est dite réelle, sinon elle est dite imaginaire (mais pas nécessairement vide). Carroll simplifie sa typologie des propositions en ne retenant que les formes normales classiques (A, E, I), sacrifiant les propositions en O. Il observe en effet que la proposition en O (« Quelques x ne sont pas y ») peut être réécrite en portant la négation sur le prédicat et devenir ainsi une proposition en I (« Quelques x sont non- y »). Carroll propose par ailleurs une autre typologie des propositions, selon ce qu'elles assertent. Il distingue ainsi les propositions d'existence des propositions de relation¹⁰. Une proposition est dite d'existence si elle affirme l'existence (ou pas) de son prédicat. Elle ne peut être que sous l'une des deux formes : I (« Quelques x existent ») ou E (« Aucun x n'existe »). Une proposition est dite de relation si elle

8 Dans toute discussion, les intervenants ont un accord tacite sur l'univers auquel se réfère leur discours. Cette notion a été introduite par Augustus De Morgan (1806-1871) en 1846 (A. De Morgan, *On the Syllogism: and other Logical Writings*, London, Routledge & Kegan Paul, 1966, p. 2) et fut ensuite adoptée par G. Boole qui en forge le nom (Boole, 1854, *op. cit.*, p. 42).

9 La dichotomie est le cas particulier le plus simple de la division logique. Il s'agit de la division d'une classe X donnée en deux sous-classes XA et $X \text{ non-}A$. Le caractère purement formel de la dichotomie pose la question du statut des termes du type non- x , dits indéterminés en logique traditionnelle (Aristote, *Organon. I: Catégories, II: De L'Interprétation*, traduit par J. Tricot, Paris, J. Vrin, 1977, p. 80). De Morgan avait défendu la parité des classes x et non- x , dont l'affirmation ou la négation n'est pas absolue mais seulement relative à l'autre classe (De Morgan, 1966, *op. cit.*, p. 1-3). Carroll s'inscrit dans cette lignée et dénonce une « peur morbide » des logiciens vis-à-vis des termes négatifs qu'il intègre sans réserve dans sa théorie logique (Carroll, 1897, *op. cit.*, p. 172).

10 Carroll, 1897, *op. cit.*, p. 10.

asserte une relation existant entre ses termes. Elle peut avoir l'une des trois formes : I (« Quelques x sont y »), E (« Aucun x n'est y ») ou A (« Tous les x sont y »). La proposition en A est formée par la conjonction des deux propositions : « Quelques x sont y » et « Aucun x n'est non- y »¹¹. Il est aisé de réduire les propositions de relation à une forme d'existence. Ainsi, la proposition : « Quelques x sont y » est équivalente à « Quelques xy existent », alors que la proposition « Aucun x n'est y » est équivalente à « Aucun xy n'existe ». Enfin, la proposition de relation « Tous les x sont y » est double, et équivaut donc à la conjonction des propositions d'existence : « Quelques xy existent » et « Aucun x non- y n'existe ». Carroll discute longuement la question de la portée existentielle des propositions avant de convenir que les propositions en I et en A assertent l'existence de leurs sujets et prédicats alors que les propositions en E ne l'assertent pas, interprétation qu'il juge la plus conforme aux « faits acceptés » de la logique et aux « faits de la vie »¹². Cette position diffère de celle des autres logiciens symbolistes de son temps qui accordent une portée existentielle aux propositions en I seules et n'en accordent aucune aux propositions en E et en A, ce qui permet de réécrire les propositions en A (« Tous les x sont y ») en simples propositions en E (« Aucun x n'est non- y »).

Il va de soi que ces considérations logiques ont des répercussions importantes sur ce qu'il convient de considérer comme syllogisme valide. Nous allons voir dans ce qui suit les deux méthodes que Carroll utilise pour résoudre des syllogismes, selon la méthode de représentation choisie : diagrammatique ou indiciaire. La première est la seule que Carroll mobilise dans son premier ouvrage *The Game of Logic* (1886), dans lequel il se contente d'ailleurs de traiter des syllogismes en déterminant la conclusion qui découle d'une paire de propositions données comme prémisses. Dans la première partie de *Symbolic Logic* (1896) en revanche, Carroll introduit sa notation indiciaire et aborde des problèmes plus complexes (plus de deux prémisses), qui dépassent l'objet du présent article¹³.

11 Carroll, 1897, *op. cit.*, p. 18.

12 Carroll, 1897, *op. cit.*, p. 166-167.

13 Pour une discussion générale de la logique de Carroll, voir : Moktefi A., Lewis Carroll's logic, in Gabbay D.M. & Woods J. (dir.), *British Logic in the Nineteenth-Century*, Amsterdam, North-Holland, 2008, p. 457-505.

La méthode diagrammatique

Le recours aux diagrammes en logique est naturellement antérieur à Carroll. Le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) en avait popularisé l'usage grâce à la méthode présentée dans ses *Lettres à une Princesse d'Allemagne* (1768). Une classe y est représentée par un cercle dans lequel sont contenus les individus qui la constituent¹⁴. Les relations logiques entre classes sont alors représentées par des relations topologiques entre cercles, selon qu'ils s'incluent, s'excluent ou s'entrecroisent. Ainsi suffit-il de représenter un cercle x entièrement inclus dans un cercle y pour représenter la proposition «Tous les x sont y » [fig. 1]. Cette

[Fig. 1]

méthode est simple et intuitive, mais a cependant quelques limites. En effet, il faut souvent plus d'un diagramme pour représenter pleinement l'information portée par une proposition. Par exemple, affirmer que «Tous les x sont y » revient à dire que la classe x est strictement contenue dans ou est identique à la classe y . Il nous faut donc en réalité deux diagrammes afin de représenter adéquatement cette proposition : l'un dans lequel le cercle x est à l'intérieur du cercle y , et l'autre dans lequel ces deux cercles coïncident. Pour remédier à cette difficulté, le logicien John Venn (1834-1923) a publié en 1880 une nouvelle méthode de représentation qui tient compte de cette incertitude¹⁵. L'idée consiste à représenter d'abord les différentes combinaisons possibles entre les termes, avant de représenter les propositions. Pour une proposition à deux termes x et y , on a 4 subdivisions possibles de l'univers logique : $x y$, $x \text{ non-}y$, $\text{non-}x y$, $\text{non-}x \text{ non-}y$, que l'on représente par deux cercles s'entrecroisant. Représenter une proposition sur ce diagramme consiste à indiquer avec des signes distinctifs l'état des compartiments. Il suffit alors de rayer un compartiment pour indiquer qu'il est vide. Ainsi, pour représenter la proposition «Tous les x sont y », il suffit de rayer la partie de x qui n'est pas incluse dans y [fig. 2].

[Fig. 2]

14 Euler L., *Lettres à une Princesse d'Allemagne*, vol. 2, Saint-Petersbourg, Imprimerie de Académie Impériale des Sciences, 1768, p. 98.

15 Venn J., On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings, *Philosophical Magazine*, 10, 59, 1880, p. 1-18.

Carroll publie ses diagrammes pour la première fois dans *The Game of Logic* (1886). Sa méthode ressemble à celle de Venn dans la mesure où il introduit d'abord un cadre général pour les classes, avant d'ajouter des signes distinctifs pour représenter les propositions. L'univers (du discours) y est représenté par un carré. Pour représenter des propositions à deux termes x et y , il suffit de diviser ce carré dichotomiquement en quatre sous-divisions correspondant aux combinaisons xy , $x \text{ non-}y$, $\text{non-}x y$, $\text{non-}x \text{ non-}y$, de sorte que la partie supérieure du carré représente la classe x , la partie inférieure $\text{non-}x$, la partie de gauche y , et la partie de droite $\text{non-}y$. On obtient ainsi un diagramme dit « bilittéral » [fig. 3]. Pour ajouter un troisième terme m à ce même diagramme, il faut re-diviser tous les compartiments en deux afin d'obtenir, d'un côté, une nouvelle sub-division correspondant à l'affirmation du troisième terme (m) et de l'autre, une subdivision correspondant à sa négation ($\text{non-}m$). Pour cela,

[Fig. 3]

[Fig. 4]

Carroll introduit, à l'intérieur de l'univers du discours, un second carré plus petit, dont l'intérieur correspond à la classe m et l'extérieur à $\text{non-}m$. On obtient ainsi un diagramme dit « trilittéral » [fig. 4].

Afin de représenter des propositions, il faut introduire de nouvelles conventions graphiques : un compartiment marqué avec '0' indique que la classe en question est vide, alors qu'un compartiment marqué avec un 'I' indique une classe non-vide. Ainsi, représenter la proposition « Quelques x sont y » revient à affirmer que « Quelques xy existent ». Il suffit donc de marquer le compartiment xy du diagramme bilittéral avec un 'I' pour indiquer qu'il n'est pas vide [fig. 5]. De la même façon, la représentation de la proposition « Aucun x n'est y » revient à marquer le

[Fig. 5]

[Fig. 6]

[Fig. 7]

compartiment xy avec un '0' pour indiquer qu'il est vide [fig. 6]. Enfin, pour représenter la proposition double «Tous les x sont y », il faudra représenter ses deux composantes: «Quelques x sont y » (en posant un '1' sur le compartiment xy) et «Aucun x n'est $non-y$ » (en posant un '0' sur le compartiment $x\ non-y$) [fig. 7].

L'usage des diagrammes pour résoudre des syllogismes revient à représenter d'abord les deux prémisses sur un diagramme trilittéral. Ensuite, il faut transférer l'ensemble de l'information contenue sur ce diagramme vers un diagramme bilittéral pour déterminer la relation entre les deux termes retenus, lesquels apparaîtront dans la (les) conclusion(s). Pour «réussir» ce transfert, il faut observer deux règles à appliquer à chaque «quart» du diagramme trilittéral (composé de deux subdivisions), correspondant à un compartiment du diagramme bilittéral:

1. Si une au moins des deux subdivisions d'un «quart» du diagramme trilittéral contient un '1' indiquant qu'elle est occupée, alors le compartiment correspondant du diagramme bilittéral doit aussi être marqué avec un '1' pour indiquer qu'il est occupé.
2. Si les deux subdivisions d'un «quart» du diagramme trilittéral contiennent un '0' indiquant qu'elles sont vides, alors le compartiment correspondant du diagramme bilittéral doit aussi être marqué avec un '0' pour indiquer qu'il est vide.

Examinons à titre d'exemple le syllogisme ayant pour prémisses «Tous les x sont m » et «Tous les m sont y ». Pour en trouver la conclusion, il faut d'abord représenter ces deux prémisses sur un diagramme trilittéral:

I- La première prémisses «Tous les x sont m » se décompose en deux propositions:

- I-1. «Aucun x n'est $non-m$ », que l'on représente en plaçant un '0' sur les compartiments $xy\ non-m$ et $x\ non-y\ non-m$ pour indiquer qu'ils sont vides.
- I-2. «Quelques x sont m », que l'on représente en plaçant un '1' sur la ligne séparant les compartiments $xy\ m$ et $x\ non-y\ m$ pour indiquer que l'un des deux – au moins – est occupé.

II- La seconde proposition «Tous les m sont y » se décompose en deux propositions:

- II-1. «Aucun m n'est $non-y$ » que l'on représente en plaçant un '0' sur les compartiments $x\ non-y\ m$ et $non-x\ non-y\ m$ pour indiquer qu'ils sont vides.

II-2. «Quelques m sont y » que l'on représente en plaçant un 'I' sur la ligne séparant les compartiments $x\ y\ m$ et $non-x\ y\ m$ pour indiquer que l'un des deux – au moins – est occupé.

On obtient [fig. 8]. Or nous savons que le compartiment $x\ non-y\ m$ est vide (II-1. ci-dessus) et que l'un des deux compartiments $x\ y\ m$ et $x\ non-y\ m$ est occupé (I-2. ci-dessus). On en déduit que le compartiment $x\ y\ m$ est nécessairement occupé. Le compartiment $non-x\ y\ m$ devient, quant à lui, neutre. On obtient [fig. 9]. Il faudra maintenant transformer l'information contenue dans ce diagramme trilittéral vers un diagramme bilittéral correspondant aux termes x et y . Il suffit pour cela de respecter les principes de transfert expliqués plus haut. On en conclut que les compartiments $non-x\ y$ et $non-x\ non-y$ sont neutres, que le compartiment $x\ non-y$ est vide et que le compartiment $x\ y$ est occupé. On obtient alors un diagramme bilittéral [fig. 10] qui représente la conclusion du syllogisme : «Tous les x sont y ».

La méthode carrollienne ne diffère pas fondamentalement de celles proposées par Euler et Venn. Dans toutes ces méthodes, le principe de base est d'éliminer un terme en éliminant simplement la figure correspondante et de reporter l'information sur les termes retenus. Ainsi, si l'on adopte la méthode d'Euler, le syllogisme précédent est aisément résolu en représentant trois cercles correspondant à x , m , et y respectivement de sorte que le cercle représentant x soit inclus dans le cercle représentant m qui lui-même est inclus dans le cercle représentant y [fig. 11]. En omettant m , on voit clairement que le cercle représentant x est entièrement inclus dans le cercle représentant y . On en déduit donc la conclusion du syllogisme : «Tous les x sont y ».

Cette méthode de représentation est *a priori* plus intuitive et facile que la méthode de Carroll car elle montre directement la relation entre les cercles. La conclusion découle alors d'elle-même en vertu des deux règles simples énoncées par Euler: «I. *Tout ce qui est dans le contenu se trouve aussi dans le contenant* & II. *Tout ce qui est hors du contenant est aussi hors du contenu*»¹⁶. Ainsi dans l'exemple précédent, la classe *y* contient la classe *m*. Il s'ensuit que la classe *x*, qui est dans le contenu *m*, est nécessairement dans le contenant *y* (conformément à la première règle ci-dessus). Cependant, les diagrammes d'Euler souffrent de l'ambiguïté de la correspondance entre les diagrammes et les propositions, ambiguïté à laquelle remédie Venn avec sa méthode de représentation en deux étapes (les classes d'abord, les propositions ensuite) même si cela réduit l'aide visuelle de ses diagrammes. La méthode de Venn est en cela proche de celle de Carroll, dont elle se distingue par ses conventions de représentation que nous avons décrites plus haut. Ainsi, dans le syllogisme discuté précédemment, ayant pour prémisses «Tous les *x* sont *m*» et «Tous les *m* sont *y*», la résolution du problème avec la méthode de Venn reviendra à représenter les prémisses en rayant les compartiments vides (rappelons que Venn n'accorde pas de portée existentielle aux propositions en A) et d'observer ensuite que tous les compartiments *x non-y* sont vides, ce qui permet de conclure que «Tous les *x* sont *y*». On notera cependant l'existence d'une différence majeure entre Carroll et Venn quant à la «lecture» de la conclusion. En effet, Carroll transfère *vraiment* l'information sur un diagramme de rang inférieur, alors que Venn se contente de lire la conclusion sur le diagramme original lui-même, en faisant abstraction du terme éliminé. Cet artifice rend naturellement la méthode de Carroll beaucoup plus claire et pratique d'autant qu'il joint à ses ouvrages une enveloppe contenant une table portant des diagrammes trilittéral et bilittéral et des jetons de couleurs différentes (pour représenter les propositions) qui permettent de résoudre les syllogismes sans avoir à redessiner les diagrammes et en glissant simplement les jetons ou en en plaçant d'autres sur la table.

Ainsi, on constate que la méthode diagrammatique de Carroll offre une procédure efficace pour résoudre les syllogismes et trouver la conclusion complète qui découle d'une paire de propositions données comme prémisses. Si le principe reste globalement le même que chez

16 Euler, 1768, *op. cit.*, p. 118.

Euler et Venn, la méthode de Carroll offre les avantages de son système de représentation, dont la construction fait ressortir certains traits essentiels de sa théorie: l'univers y est délimité et les compartiments sont symétriques, auxquels il faut ajouter l'intérêt qu'il y a à transférer l'information sur un second diagramme pour y lire la conclusion plus aisément.

La méthode indiciaire

Carroll publie son écriture symbolique pour la première fois dans *Symbolic Logic: Part 1* (1896). Les classes y sont représentées par des lettres en minuscule de l'alphabet (x , y , z , etc.). Le complément d'une classe est représenté en ajoutant le symbole « ' », de sorte que *non- x* est représenté par x' . Par ailleurs, l'intersection de deux classes (x et y) est représentée en concaténant simplement les lettres représentant chacune des classes (xy). Les propositions concrètes («Quelques soldats sont braves») deviennent abstraites lorsque l'on remplace les mots par des lettres («Quelques x sont y »). Sous cette forme, la proposition peut être réécrite symboliquement. L'idée consiste à associer aux classes des indices indiquant leur état. Ainsi, associer l'indice '1' à la lettre x , revient à affirmer qu'il existe des choses qui sont x . L'expression x_1 correspond donc à la proposition: «Quelques x existent». Une proposition de ce type est dite Entité. De la même manière, associer l'indice '0' à la lettre x revient à affirmer qu'il n'existe pas de chose qui soit x . L'expression x_0 correspond donc à la proposition: «Aucun x n'existe». Une proposition de ce type est dite Nullité. Cette méthode permet de représenter aisément les différentes propositions canoniques. Ainsi la proposition en I: «Quelques x sont y », affirmant qu'il existe des choses qui sont à la fois x et y , peut être représentée par: xy_1 . De la même manière, la proposition en E: «Aucun x n'est y », niant qu'il y ait des choses qui soient à la fois x et y , est représentée par: xy_0 . Les propositions en A (de la forme «Tous les x sont y ») sont plus complexes à représenter puisqu'elles sont doubles. Pour les besoins de la représentation symbolique, Carroll les présente comme la conjonction des propositions «Quelques x existent» (et non «Quelques x sont y » comme expliqué précédemment) et «Aucun x n'est y' ». Nous savons déjà représenter ces deux propositions puisque la première devient sous forme indiciaire x_1 et la seconde xy'_0 . Pour exprimer leur conjonction, Carroll introduit un nouveau symbole, sous

forme de croix '†', correspondant au mot 'et'. La proposition «Tous les x sont y » s'écrit donc $x_1 \dagger xy'_0$, forme que Carroll choisit d'abrégier en $x_1y'_0$, en gardant à l'esprit que tout indice s'applique jusqu'au début de l'expression.

Le symbole '†' est différent des précédents puisqu'il représente une opération, non pas entre classes, mais entre propositions. C'est aussi le cas de deux autres symboles que Carroll utilise pour indiquer qu'une conclusion découle d'une paire de prémisses. Lorsque les propositions d'un syllogisme sont données sous forme concrète, Carroll utilise le traditionnel symbole « $\therefore$ » auquel il donne le sens de «par conséquent» ou «donc». Cependant, lorsque les propositions sont présentées sous forme indiciaire, Carroll utilise un autre symbole de son invention « $\P$ », une sorte de signe du paragraphe inversé dans la topographie moderne, auquel il affecte le sens de «Si vrai, prouverait»¹⁷. Ces symboles sont importants pour réécrire les syllogismes sous forme de «séquence». En effet, il suffit de réécrire les propositions, sous forme indiciaire, sur une même ligne et de les relier avec le symbole '†', puis de placer le symbole ' $\P$ ' entre les prémisses et la conclusion.

Avec cette écriture indiciaire, Carroll présente une classification des syllogismes valides et distingue trois figures seulement¹⁸. Trouver la conclusion d'un syllogisme revient alors à déterminer à quelle figure il appartient. En réalité, c'est en utilisant ses diagrammes que Carroll obtient sa classification. Il explique que lorsque la conclusion d'un syllogisme a été trouvée avec des diagrammes, on peut garder la séquence et la considérer comme valide sans avoir à la revérifier à chaque usage. Il classe alors l'ensemble des séquences valides en trois figures qu'il présente sous la forme des trois formules suivantes :

Figure I	$xm_0 \dagger ym'_0 \P xy_0$
Figure II	$xm_0 \dagger ym_1 \P x'y_1$
Figure III	$xm_0 \dagger ym_0 \dagger m_1 \P x'y'_1$

La première figure ($xm_0 \dagger ym'_0 \P xy_0$) indique qu'une paire de prémisses formée de deux Nullités, ayant un moyen terme dont les occurrences sont de signes différents, a pour conclusion une Nullité dans laquelle les termes retenus gardent leurs signes. L'assertion de l'existence

17 Carroll, 1897, *op. cit.*, p. 70.

18 Carroll, 1897, *op. cit.*, p. 78.

du moyen terme n'affecte pas la conclusion du syllogisme. En revanche, si l'un des termes retenus est donné existant dans les prémisses, il faut qu'il le soit dans la conclusion pour qu'elle soit complète. On peut donc trouver deux variantes selon le nombre de termes retenus donnés existants dans les prémisses. La deuxième figure ($xm_0 \dagger ym_1 \P x'y'_1$) indique qu'une paire de prémisses comportant une Nullité et une Entité, avec un moyen terme dont les deux occurrences sont de même signe, a pour conclusion une Entité dans laquelle le terme retenu de la prémisse qui est une Nullité change de signe. Enfin, la troisième figure ($xm_0 \dagger ym_0 \dagger m_1 \P x'y'_1$) indique qu'une paire de prémisses comportant deux Nullités, où le moyen terme apparaît avec le même signe et est asserté existant, a pour conclusion une Entité, dans laquelle les deux termes retenus changent de signe. Cette troisième figure a la particularité d'avoir une triade de propositions comme prémisses. Carroll justifie la séparation de m_1 dans la troisième figure par la simplicité qu'il y a à présenter cette figure sous cette forme, et éviter donc d'en lister les différentes variantes, selon que m est donné existant dans l'une des prémisses ou dans les deux. Contrairement à la première figure cependant, il faut garder à l'esprit que l'assertion de l'existence du moyen terme m est nécessaire pour tirer la conclusion de cette troisième figure.

C'est ainsi que Carroll classe l'ensemble des syllogismes valides en trois figures, de sorte que pour trouver la conclusion d'une paire de prémisses, il suffit de déterminer à quelle figure elle correspond. Prenons les deux propositions suivantes comme prémisses :

$$\begin{array}{ll} \text{Tous les } m \text{ sont } x & \longrightarrow m_1x'_0 \\ \text{Tous les } m \text{ sont } y & m_1y'_0 \end{array}$$

Ces prémisses sont des Nullités, avec un moyen terme asserté existant et dont les occurrences sont de même signe (m). Il s'agit d'un syllogisme de la figure III qui pour conclusion une Entité dont les termes retenus changent de signe (x' devient x , y' devient y). La conclusion est donc : « xy_1 », *i.e.* «Quelques x sont y ». La séquence complète s'écrit : $m_1x'_0 \dagger m_1y'_0 \P xy_1$

Il est ainsi aisé de déterminer quelle conclusion découle d'une paire de propositions données comme prémisses d'un syllogisme en se référant aux figures de Carroll. Naturellement, certaines paires de prémisses n'engendrent aucune conclusion, lesquels cas sont appelés sophismes. Pour en identifier les formes, Carroll procède de la même manière qu'avec les syllogismes valides. Il détermine avec l'aide de ses diagrammes

[Fig. 12]

les paires de prémisses qui n'engendrent pas de conclusion, puis en distingue à nouveau trois formes, dites respectivement: «sophisme des termes éliminés de même signe dont on n'assure pas l'existence», «sophisme des termes éliminés de signes différents, avec une prémisses-Entité», et enfin «sophisme des deux prémisses-Entités»¹⁹. Il n'est pas nécessaire pour les besoins de cet article de détailler l'énoncé de ces sophismes. Il faut simplement garder à l'esprit que ces formes regroupent l'ensemble des paires de prémisses n'engendrant aucune conclusion, et ne correspondant donc pas à l'une des trois figures de syllogismes valides décrites plus haut.

Grace à cette classification des figures de syllogismes valides et des formes de sophismes, Carroll propose une procédure algorithmique d'analyse de paires de prémisses, données sous forme indiciaire, pour identifier rapidement la figure de syllogisme ou forme de sophisme dont elle relève, et donc déterminer si elle peut engendrer une conclusion et, si oui, laquelle²⁰. Nous récapitulons cette procédure dans l'organigramme [fig. 12].

Examinons à titre d'exemple le syllogisme suivant, que Carroll utilise pour comparer sa méthode diagrammatique avec celles d'Euler et de Venn:

$$\begin{array}{l|l} \text{Aucun } x \text{ n'est } m & \longrightarrow mx_0 \\ \text{Quelques } m \text{ ne sont pas } y & my'_1 \end{array}$$

Nous avons une paire de prémisses: « mx_0 » et « my'_1 ». Il suffit de suivre l'algorithme présenté dans l'organigramme pour trouver la conclusion qui en découle. Les deux prémisses sont-elles de même signe? Non. En effet nous avons une Entité (« my'_1 ») et une Nullité (« mx_0 »). Les deux occurrences du moyen terme sont-elles de même signe? Oui. En effet, le moyen terme m est affirmé dans les deux prémisses. Nous savons donc qu'il s'agit d'un syllogisme de la figure II. La conclusion est une Entité dans laquelle le terme retenu dans la prémisses qui est une Nullité (mx_0) change de signe (x devient x'). La conclusion est donc $x'y'_1$, i. e. «Quelques x' sont y' »²¹. La séquence complète s'écrit alors: $mx_0 \dagger my'_1 \vdash x'y'_1$.

19 Carroll, 1897, *op. cit.*, p. 81.

20 Carroll, 1897, *op. cit.*, p. 84.

21 Carroll, 1897, *op. cit.*, p. 183.

Carroll construit donc une méthode efficace de résolution de syllogismes qui a l'avantage de les réduire à trois formes seulement (au lieu des 19 figures aldrichiennes) et qui se prête parfaitement à un traitement algorithmique en faisant reposer ses règles de résolution sur les seuls signes et indices des différentes formules. Carroll avait inventé sa méthode de représentation indiciaire des propositions vers 1886, si l'on se fie à son journal, à une période où fleurissent les symbolismes logiques. L'usage des indices était cependant rare et seul Oscar H. Mitchell (1851-1889), un des élèves de Charles S. Peirce (1839-1914), semble avoir fondé, en 1883, une écriture essentiellement indiciaire, dont l'interprétation des indices diffère cependant de celle de Carroll²².

Carroll vérifie bien que les 19 figures aldrichiennes (et plusieurs autres figures valides non acceptées comme telles par la syllogistique classique) sont toutes réductibles à l'une de ses trois seules figures, et n'en est pas peu fier :

*En ce qui concerne les syllogismes, je suis arrivé à la conclusion que leurs [i.e. Les logiciens] dix-neuf types – et sans compter les vingt autres qu'ils ont refusé de considérer – peuvent être rassemblés en trois types principaux, possédant chacun une règle très simple et qui lui est propre; et la seule question que le lecteur ait à se poser pour résoudre l'un des quarante exemples donnés [ici] est celle-ci: appartient-il à la figure 1, 2 ou 3?*²³

En réalité, s'il n'avait pas accordé une portée existentielle aux propositions en A, Carroll aurait même pu réduire le nombre de ses figures à deux seules. C'est ce qu'avait justement réalisé en 1883 Christine Ladd-Franklin (1847-1930), autre élève de Peirce. Elle avait en effet obtenu les mêmes figures que Carroll, si l'on fait abstraction de la troisième figure de Carroll qui requiert la portée existentielle de la proposition universelle affirmative, ce que Ladd-Franklin ne concède pas. À cela près, les deux auteurs arrivent aux mêmes règles, bien qu'énoncées différemment: Carroll observe les prémisses pour déterminer la conclusion, alors que Ladd-Franklin discute la validité du trio de propositions formant le syllogisme²⁴.

22 Mitchell O.H., On a new algebra of logic, in Peirce C. S. (dir.), *Studies in Logic*, Boston, Little, Brown, and Company, 1883, p. 72-106.

23 Carroll L., *Logique sans Peine*, traduit par Jean Gattégno et Ernest Coumet, Paris, Hermann, 1966, p. 217.

24 Ladd-(Franklin) C.F., On the algebra of logic, in Peirce C.S. (dir.), *Studies in Logic*, Boston, Little, Brown, and Company, 1883, p. 39.

Conclusion

Carroll publie la première partie de *Symbolic Logic* (1896) un demi-siècle après les premiers travaux de Boole (1847) et dix-sept ans après ceux de Frege (1879). Pourtant, Carroll n'y cite pas ces deux auteurs dont l'historiographie fait les pères de la logique moderne. C'est plutôt à Aristote que Carroll dédie son ouvrage de logique. Il ne faut y voir ni un signe de conservatisme ni un plaidoyer en faveur de la syllogistique, qu'il considérerait être « une machine à peu près inutile pratiquement »²⁵. Pour Carroll cependant, Aristote incarne la logique, toutes les logiques, comme Euclide incarnait la géométrie. Carroll, à l'image de la majorité des auteurs du XIX^e siècle, ne semble pas relever de rupture fondamentale dans l'objet de la logique, suite à l'avènement de la logique symbolique. Le problème de l'élimination n'est en effet qu'une généralisation des problèmes des syllogismes et des sorites, familiers aux logiciens aristotéliens. C'est plutôt dans ses méthodes que Carroll comprend, comme peu de ses contemporains, qu'il était arrivé quelque chose à la logique en ce XIX^e siècle. Il insiste en effet à plusieurs reprises sur la supériorité de l'approche symbolique et travaille à son acceptation.

Le recours au symbolisme est naturellement la principale caractéristique de la logique carrollienne et celle qui le distingue le plus des logiciens aristotéliens de son temps. Par son existence même, par-delà ses avantages et ses limites, cette écriture le classe parmi les principaux logiciens symbolistes de son temps, même s'il ne l'utilise que par commodité²⁶. S'il est difficile de comparer ces systèmes symboliques, tant les théories logiques qu'ils décrivent diffèrent, on peut avancer qu'un des grands mérites du système carrollien est sa représentation efficace des propositions particulières qui causèrent tant d'ennuis à Boole et à ses successeurs. Paradoxalement, Carroll doit sans doute cette réussite à son attachement « traditionnel » au langage au lieu de céder aux « libertés de convenance » que s'offrent plusieurs logiciens symbolistes de son temps. Ainsi, en refusant d'affranchir la proposition universelle affirmative de sa portée existentielle, Carroll ne simplifie pas son calcul logique,

25 Carroll, 1966, *op. cit.*, p. 217.

26 Marret S., Lewis Carroll : le symbole et la lettre, in Cartier P. & Charraud N. (dir.), *Le Réel en Mathématiques : Psychanalyse et Mathématiques*, Paris, Agalma-Le Seuil, 2004, p. 273-288.

mais s'efforce en revanche de traiter convenablement les propositions particulières subalternes aux universelles.

Ainsi, Carroll adopte une position médiane. Il continue de traiter spécifiquement des syllogismes et à chercher un nombre minimal de figures, alors que sa méthode diagrammatique l'en dispensait par sa généralité. S'il reste en cela dans une perspective traditionnelle, il est possible que l'intérêt pédagogique de telles classifications ait également pu l'encourager dans cette voie. La situation change sensiblement lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes plus complexes que les syllogismes. D'abord parce que les diagrammes ne « suivent » plus, mais aussi parce que le grand nombre de termes lui-même rend l'étude de toutes les combinaisons extrêmement compliquée. Les méthodes symboliques reposant sur l'écriture indiciaire prennent alors le relais, d'autant que Carroll ne limite pas la portée de sa méthode aux problèmes qui peuvent être réduits à une série de syllogismes. En effet, il s'inscrit bien dans un cadre plus large à l'image du problème de l'élimination décrit par Boole. La complexité de ces problèmes, dont le nombre de prémisses peut être très élevé²⁷, justifie en soi le recours à l'écriture symbolique pour en simplifier l'expression. En cela, Carroll s'avère correspondre à un type de logicien traditionnel-symboliste, qui reprend des principes propres à la syllogistique mais n'hésite pas à innover dans la lignée symboliste. Il ne faut pas nécessairement y voir un effort de réconciliation des deux approches, mais plutôt une appropriation prudente d'outils empruntés aux mathématiques, sans pour autant renoncer à l'indépendance de la logique comme champ disciplinaire indépendant des (et même menacé par les) mathématiques.

27 Carroll inventa de gigantesques problèmes de ce type pour tester ses méthodes, allant jusqu'à concevoir des problèmes à 50 prémisses (Bartley III, 1977, *op. cit.*, p. 386-389). Plusieurs logiciens ont contesté l'intérêt de ce type de problèmes. Ainsi, John Cook Wilson (1849-1915), à qui Carroll envoyait ses problèmes pour recueillir ses solutions, conteste en 1898 l'intérêt du problème de l'élimination comparé aux « problèmes sérieux » de la logique (Wilson J.C., *Statement and Inference*, Oxford, Clarendon Press, 1926, p. 637).