Essai de taxéométrie ou sur la mesure de l'ordre

Johann Heinrich Lambert

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/cps/953>

DOI : 10.4000/cps.953

ISSN : 2648-6334

Éditeur

Presses universitaires de Strasbourg

Édition imprimée

Date de publication : 27 novembre 2018

Pagination : 177-192

ISBN : 979-1-03440-024-9

ISSN : 1254-5740

Référence électronique

Johann Heinrich Lambert, « Essai de taxéométrie ou sur la mesure de l'ordre », *Les Cahiers philosophiques de Strasbourg* [En ligne], 44 | 2018, mis en ligne le 15 décembre 2018, consulté le 11 novembre 2022. URL : <http://journals.openedition.org/cps/953> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/cps.953>

Creative Commons - Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International - CC BY-NC-SA 4.0

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Essai de taxéométrie ou sur la mesure de l'ordre

Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres, Année 1770, Berlin: Haude et Spener, 1772, p. 327-342.

Johann Heinrich Lambert

[327] §1. Quoique, depuis le renouvellement des Lettres, les Mathématiques aient été enrichies de plusieurs parties, par l'application qu'on en a faite à différents objets de physique, il s'en faut de beaucoup qu'on ait également réussi dans ce qui regarde les objets métaphysiques. Ces objets paraissent moins traitables, et il n'est pas même facile d'en indiquer la cause. Il faudrait pour cet effet remonter à l'origine des idées abstraites, afin de mieux connaître celles qu'on traite dans la Métaphysique, et surtout dans l'Ontologie. Je n'exposerai pas ici les recherches que j'ai faites là-dessus. Elles forment un assez gros volume¹. Mais je rapporterai néanmoins quelques phénomènes, qui se sont présentés comme d'eux-mêmes dans ces recherches. Le premier est, que j'ai remarqué que quand un philosophe croit avoir bien discuté et arrangé les sujets de ses recherches, c'est ordinairement de façon que le géomètre, bien loin de pouvoir tout de suite y appliquer le calcul, se voit obligé de remanier ces sujets, tout comme si le philosophe n'y avait pas touché. Il arrive même que les recherches du philosophe servent plutôt à l'égarer qu'à l'éclairer. On n'a qu'à parcourir les ouvrages de physique écrits par ceux qui, encore dans le siècle passé, s'en sont tenus à Aristote et aux dogmes scolastiques, et en les comparant avec les ouvrages physico-mathématiques qui ont paru depuis, on trouvera un grand nombre d'exemples qui éclairciront ce que je viens de dire. Mais

1 Il s'agit du *Neues Organon*.

il n'est pas difficile de s'en convaincre par des considérations générales. On sait que le géomètre demande des homogénéités, vu qu'il n'y a que les quantités homogènes, qui soient susceptibles d'addition et de soustraction, ou qui admettent le [328] *plus* et le *minus*. Mais ce n'est pas là ce que le philosophe recherche principalement. On trouve à la vérité chez les scolastiques que de temps en temps ils ont tâché d'établir, quels objets admettent le *plus* et le *minus*, ou le *magis* et le *minus*, et quels sont ceux qui ne l'admettent pas? Mais outre qu'ils ne l'ont pas fait partout, ils se sont contentés de l'indiquer, sans en tirer parti. Ensuite ce fut la mode de ne plus les lire, et les métaphysiciens qui vinrent après eux, bien loin de poursuivre ces recherches, s'attachèrent plus aux *généralités* qu'aux *homogénéités*². Mais il arrive malheureusement que les idées les plus générales comprennent ce qu'il y a de plus hétérogène et s'y étendent. Voici le second phénomène.

§ 2. Nous devons aux langues et à leur pauvreté, sinon les idées, du moins les termes métaphysiques. D'abord ces termes ne désignaient que des objets individuels et sensibles. Peu à peu on les appliqua aux objets semblables, et à force de ressemblance, on parvint à donner un même nom à des objets de plus en plus moins ressemblants. De là les noms génériques. Mais il fallait encore les rendre métaphoriques, et les transférer même au monde intellectuel, aux idées abstraites. On voit bien qu'en tout cela les homogénéités, auxquelles il aurait fallu s'attacher, furent perdues de vue au point qu'il n'en resta que les plus connaissables, telles que sont l'*espace* et le *temps* et les choses qui, pour être d'une même espèce, peuvent être comptées. On comprend par-là, d'où vient que l'Arithmétique, la Géométrie et la Chronologie ont été les premières parties des Mathématiques, et pourquoi l'Astronomie, qui ne demandait que cela, les suivit presque immédiatement.

§ 3. Comme cependant, pour avoir une connaissance nette et exempte de toute confusion, il faut en revenir aux homogénéités, il est clair qu'il importe, non seulement au géomètre, mais même au philosophe, de les rechercher, et surtout celles qui se trouvent dans les sujets ontologiques.

2 Voir sur ce point la lettre de Lambert à Kant du 3 février 1766, en particulier: «La simple condition qui exige que l'on ne puisse additionner que des choses de même nature exclut, pour le mathématicien, toutes les propositions philosophiques dont le prédicat ne recouvre pas de manière homogène l'ensemble du sujet; et en philosophie, de telles propositions sont encore beaucoup trop nombreuses», Kant, *Correspondance*, éd. citée, p. 50.

Tout ce qui est homogène présente une idée simple, et réciproquement les idées simples supposent des objets homogènes. Ainsi en trouvant les unes on trouve les autres. On voit bien qu'à cet égard il faudra faire main basse sur toutes ces généralités métaphysiques, qui pour s'étendre à des objets hétérogènes, [329] nous nous laissent toujours dans quelque confusion. Voici maintenant le troisième phénomène.

§ 4. Non seulement les langues nous écartent des véritables principes de nos connaissances, en nous offrant des termes généraux, qui comprennent une infinité d'hétérogénéités complexes et confuses; mais elles font bien pis, en ce que tous ces termes sont tellement accommodés les uns aux autres, qu'au premier abord on croirait qu'ils s'expliquent et s'éclaircissent parfaitement bien. On en entrevoit plus ou moins une liaison et une dépendance mutuelle, qui les fait paraître susceptibles d'un arrangement systématique. Ajoutons encore, qu'un semblable système devient en quelque façon nécessaire, aussi longtemps que ces termes sont en usage. Mais cet usage n'aboutit qu'à nous aider à exprimer comme en gros ce que nous pensons, sans que nous puissions toujours éviter le risque d'être mal entendus. Car il se peut très bien, que ceux à qui nous voulons nous faire entendre, comprennent sous les mêmes termes de toutes autres hétérogénéités que celles que nous voulons indiquer. Or les Mathématiques nous font voir qu'il n'en est pas de même à l'égard des homogénéités. Partout où on est parvenu à les développer, elles présentent des idées simples, essentiellement différentes les unes des autres, très connaissables et exemptes de logomachie. Et voilà ce qu'il faut pour un système net et bien arrangé.

§ 5. J'ai cru devoir commencer par cet avant-propos un Mémoire où j'en ferai l'application et où il s'agit de l'ordre, et de la façon d'en mesurer les degrés. Commençons par indiquer ce que les philosophes en ont dit. Je ne remonterai pas aux scolastiques, qui traitent cette matière assez confusément. Mr. Wolf semble être le premier qui ait entrepris avec quelque succès de répandre plus de jour sur l'Ontologie, et la plupart des définitions qu'il donne, quoique nominales, ne laissent pas d'être assez conformes aux règles de la Logique. Surtout la théorie qu'il donne de l'ordre et de la perfection³, est fort lumineuse et susceptible

3 Christian WOLFF, *Philosophia prima sive Ontologia*, éd. Jean Ecole, Hildesheim: Olms, 1977 (reproduction de l'édition de Francfort, 1736), partie I, section III, ch. VI, § 472, « De ordine, veritate et perfectione ».

de bien des applications, quoiqu'il ne l'ait pas poussée au dernier degré de précision auquel elle devrait être portée. La définition qu'il donne de l'ordre est nominale, en ce qu'il fait consister l'ordre dans la *ressemblance de ce qui est simultané et successif*⁴. On voit bien que cette définition a été trouvée par voie d'abstraction de quelques [330] cas particuliers. Car on la retrouvera, par exemple, dans l'ordre d'une bataille, dans celui d'une bibliothèque, dans l'arrangement d'un jardin, d'un palais, des orgues etc. J'ai trouvé cependant que l'idée de ressemblance qui entre dans cette définition, ne semble indiquer qu'une certaine espèce d'ordre, et nommément celle où il y entre de la symétrie et de l'eurythmie, et où on a principalement égard à la disposition simplement locale des parties, en tant qu'elles occupent, par exemple, le milieu, les extrémités, les places de devant, de dessus, d'en bas, de derrière, de côté etc. ou en tant que relativement à leur plus ou moins de ressemblance on les range dans certaines classes etc. On voit bien que tout cela peut se faire dans plusieurs cas indépendamment de la liaison que les parties peuvent avoir entre elles. C'est ainsi, par exemple, que dans tous les animaux les membres qui sont d'un côté, se trouvent encore de l'autre, au lieu que les membres qui sont uniques, occupent le milieu. Voilà un ordre qui est symétrique, et qui envisagé sous ce seul point de vue est simplement local. Il est bien vrai que, tout local qu'il est, les lois de l'équilibre et d'autres vues fort essentielles le rendent nécessaire, de sorte que ce n'est pas la simple beauté de la symétrie qui a porté le Créateur à établir cet ordre dans la structure des corps des animaux et des hommes. Et c'est à quoi les poètes, les orateurs et les artistes, qui prennent tant de soin de l'ordre local ou de l'arrangement symétrique de leurs ouvrages, pourraient quelquefois avoir plus égard. Le beau doit encore offrir du réel.

§ 6. Il y a une autre espèce d'ordre, qui ne doit point être examiné suivant les règles de la symétrie, et où il n'est pas question d'une simple ressemblance sensible ou extérieure, mais de liaisons bien plus réelles. Tel est l'arrangement des moyens pour parvenir à quelque but qu'on se propose. Et c'est surtout dans ce sens qu'on dit, que tout ce qui se fait, doit se faire avec ordre. C'est dans ce sens aussi, que tout ce qui se fait

4 Traduction de «Ordo est similitudo obvia in modo, quo res juxta se invicem collocantur vel se invicem consequuntur»: Wolff indique les mêmes exemples que Lambert, l'ordre des *Éléments d'Euclide* et celui de la bibliothèque.

dans la nature, se fait avec ordre, mais avec un ordre si compliqué et bien souvent si peu symétrique, qu'on croirait n'y trouver que les effets du hasard.

§7. Comme en philosophie il est très essentiel de distinguer les deux espèces d'ordre dont je viens de parler, nous pourrions appeler la seconde espèce l'*ordre légal* tout comme nous avons appelé la première l'*ordre local*, ou bien nous emploierions les termes d'*ordre de liaison* et d'*ordre de ressemblance*, [331] parce que c'est par-là que ces deux espèces se distinguent. Elles peuvent se trouver ensemble dans un même objet; mais il arrive bien souvent qu'on trouve l'une sans l'autre. Et si le défaut d'ordre de ressemblance devait être nommé hasard, comme en effet c'est la seule définition valable qu'on puisse donner de ce terme, non seulement on pourrait dire qu'il y a du hasard dans le monde, mais qu'il y en a même dans la Géométrie. Car en extrayant, par exemple, la racine carrée du nombre 12 au moyen d'une suite décimale 3,46410, 16151, 37754, 58705, 48926, 83011, 74473, 38856, 10507, 61067, 12561, 11613, 95890, 38660, 33817, 60007, 41611, 91373, 5 1449, 7151, 48 etc. il est clair qu'il y a dans ces nombres un ordre de liaison, de que chacun y occupe nécessairement sa place; mais il est également vrai aussi, qu'il n'y a absolument point d'ordre de ressemblance, et qu'ils se succèdent comme jetés au hasard. Tous les chiffres s'y rencontrent autant de fois l'un que l'autre, et cela aurait également lieu s'ils avaient été jetés au sort ou produits au hasard. Aussi le calcul des probabilités y est parfaitement applicable, quoique l'ordre de liaison qui règne dans ces nombres ait une nécessité géométrique. Et cela me paraît mériter d'autant plus d'attention, que sans la différence qu'il y a entre ces deux espèces d'ordre, les calculs de probabilité ne seraient guère applicables aux cas où on les applique depuis qu'ils ont été inventés. Mais retournons à nos définitions⁵.

5 Le même argument est présent dans la lettre à Holland du 21 avril 1765. Lambert prend l'exemple des décimales de $\sqrt{12}$: il montre que tous les nombres apparaissent dans la série de façon aussi fréquente les uns que les autres et se succèdent sans aucun ordre local. «Cependant, cette série a un ordre légal (*gesetzliche Ordnung*) et la suite des nombres a une nécessité géométrique. Si l'on veut cependant la juger selon les règles de l'*ordre local*, alors elle ne se distingue en rien de l'effet du pur hasard (*casus purus*). Combien sont proches les frontières du *fatum* et du *casus*!», LAMBERT, *Briefwechsel*, vol. I, éd. par J. Bernoulli, Berlin 1782 (réédition in Lambert,

§ 8. L'usage que Mr. Wolf et ses successeurs ont fait de la définition de l'ordre qu'il a donnée, c'est que non seulement on en a déduit plusieurs propositions qui peuvent être d'usage, mais on a encore tâché d'indiquer le plus et le moins qu'il peut y avoir dans différents ordres. Ils ont établi que l'ordre est d'autant plus grand, qu'il y a plus de ressemblance, de qu'il s'y trouve plus de parties ressemblantes. Avouons que cette conséquence, à ne la considérer que philosophiquement, paraît fort naturelle. Il n'y est question que de parties de et de *ressemblances*. Mais en Métaphysique il s'en faut de beaucoup que tout ce qui est désigné par un même nom, soit aussi homogène que le géomètre le demande. Il y a là encore bien à trier. Feu Mr. Baumgarten, qui parmi les philosophes allemands s'est acquis beaucoup de célébrité, a donné dans sa *Métaphysique des principia matheseos* [332] *intensorum*⁶, où il traite d'une façon assez semblable la plupart des idées métaphysiques. Voici en propres termes, ce qu'il dit de l'ordre: *Ordo minimus est minima in conjunctione identitas. Ergo quo major est conjunctionis identitas, hoc major sit ordo, donec sit maximus, ubi maxima conjunctionis identitas, id est, ubi plurima maxima toties tantumque conjunguntur eodem modo, quoties quantumque possunt*⁷. On peut dire que cela pourrait passer pour la vie commune, où il ne s'agit que d'estimer en gros le plus ou moins d'ordre qu'il y aurait en certains cas. Il me semble cependant que l'identité n'admet point de degrés intensifs, et qu'ainsi la *major identitas* doit être estimée par le nombre des choses identiques; et de cette manière la *minima identitas* est l'identité de deux choses à l'égard d'un seul attribut. Mais quand même on accorderait tout cela, nous sommes encore assez éloignés de la mesure de l'ordre. Nous allons voir que pour y parvenir il faut une tout autre méthode,

Philosophische Schriften, vol IX, Hildesheim: Olms, 1968, p. 26-27). Cf. aussi, p. 45-46, précisant que le hasard est toujours «quelque chose de subjectif», tandis que l'effet est toujours, en vertu du principe de causalité, nécessaire.

6 «Principes de la mathématique des quantités intensives», J.-G. BAUMGARTEN, *Metaphysica*, édition 7, Halle: Hemerde, 1779 (réimpression Hildesheim: Olms, 1982), § 165-190, p. 48-58.

7 «Le plus petit ordre est la plus petite identité dans la conjonction. Donc, d'autant plus grande est l'identité de conjonction, d'autant plus grand sera l'ordre, jusqu'à ce qu'il soit maximal, là où est la plus grande identité de conjonction, c'est-à-dire là où le plus grand nombre de choses se conjugent de même manière autant de fois et autant qu'elles le peuvent.» *op. cit.* § 175, p. 51.

et que bien loin de s'arrêter à ces sortes de généralités qui renferment les cas les plus hétérogènes, il faudra marcher pas à pas, afin d'aller du plus simple au plus composé, et de mesurer chaque espèce d'ordre de la façon qu'elle doit être mesurée. Je ne dirai pas jusqu'où je pousserai ces recherches; mais je croirai toujours avoir franchi le pas le plus difficile, en ce que j'aurai franchi le premier. Je dirai donc que c'est surtout à l'ordre de ressemblance, qui est purement local, que je m'attacherai dans ce mémoire. Il est plus sensible que l'ordre de liaison, qui a outre cela des principes plus nécessaires et d'une tout autre nature. Ainsi, toutes les fois que je parlerai de l'ordre, c'est l'ordre de ressemblance qu'il faudra entendre, à moins que je ne désigne expressément l'ordre de liaison. Ce qui étant présupposé, je dirai que l'ordre le plus simple c'est l'ordre linéaire, en ce qu'il n'a qu'une seule dimension locale. Telle est, par exemple, une suite d'arbres qui bordent une allée, telle est une suite de colonnes ou d'arcs qui soutiennent un aqueduc. Telle est la mélodie d'un air qu'on chante, et tel est encore chaque discours qu'on prononce. En tout cela, comme dans une infinité d'autres cas, l'ordre, qu'on peut appeler ordre de succession, est simplement linéaire. Voyons maintenant ce qu'on doit y considérer.

§9. Qu'on se figure une suite d'objets rangés en ligne droite, ou pour parler plus généralement, en succession linéaire. Si ces objets sont [333] absolument ressemblants les uns aux autres, il est indifférent lequel sera le premier, le second etc. et toute la différence qu'on pourra encore faire, regarde les intervalles qui pourront séparer les objets. Ces intervalles pourront être égaux, ou inégaux, et il est clair que dans ce dernier cas, la symétrie demande des rapports qui admettent beaucoup de variations, suivant les différentes vues qu'on pourra se proposer. Mais si les objets ne sont point absolument semblables, leur différence entrera pareillement en ligne de compte, et encore en ce cas les règles de la symétrie pourront être applicables. Je me borne ici à en faire mention. Il reste encore un autre point, qui n'est pas du ressort de la symétrie; c'est le rang ou la dignité que les objets, qu'il s'agit de ranger, pourront avoir, et qui demande un arrangement qui y soit conforme. On sait que ce cas a lieu dans plusieurs solennités, où il se forme des processions qui doivent être arrangées suivant le rang ou la dignité des personnes. Il s'y mêle quelquefois des bizarreries gothiques, et bien souvent il y survient des disputes, tant pour ce qu'il y a de local dans l'arrangement, que surtout pour ce qui regarde l'évaluation de chaque qualité dont les dignités sont

composées. Ce dernier point n'entre pas dans le plan de ce Mémoire. J'admettrai donc les dignités comme déterminées, et il s'agira de voir, comment, dans chaque arrangement, les degrés ou plutôt les défauts de l'ordre peuvent être évalués.

§ 10. D'abord il est clair qu'on numérote les places en sorte qu'elles cadrent avec les numéros des dignités. Et cette convenance ou cet accord des numéros correspondants ou homologues est ce qu'on appelle le rang. Quand tout est arrangé de façon que les numéros conviennent, l'ordre est absolu. C'est une unité, qui reste absolument telle. Mais si dans l'arrangement il y a des *qui pro quo*, alors il y a des rangs blessés, et voilà ce qui se calcule. Le défaut d'ordre s'accroît suivant une double dimension. D'abord il est plus grand en raison du nombre des places dont un objet est mis en arrière. Ensuite ce défaut s'aggrave encore en raison de la dignité de l'objet qu'on a mis en arrière. Il est donc en raison composée de la dignité et du nombre des places. Mais ce n'est pas tout; car on manque également en mettant un objet de moindre dignité à la place d'un objet plus éminent. On lui fait plus d'honneur qu'il ne lui en convient, et comme [334] cela entre également dans le compte du *qui pro quo*, la somme des défauts d'ordre en doit être augmentée. Si bien donc que pour avoir cette somme il faut multiplier la dignité de chaque objet déplacé, par le nombre des places donc il a été avancé ou reculé, et la somme de ces produits sera celle des défauts, et indiquera en même tems le degré de répréhensibilité du désordre.

§ 11. Après avoir trouvé cette règle, je n'ai pas manqué de l'appliquer à un exemple qui ne fût pas trop prolix. Par les principes du calcul des permutations on sait que quatre objets peuvent être transposés ou changer de place en 24 manières différentes. J'ai donc numéroté les 4 places, et en donnant aux objets les dignités équidifférentes 1, 2, 3, 4, qui dans cet exemple sont arbitraires, j'ai calculé les défauts d'ordre, ou les degrés de lèse-rang, pour toutes les 24 transpositions possibles. Les voici suivant l'ordre des défauts.

Arrangements.	Défauts.	Arrangements.	Défauts.	Arrangements.	Défauts.	Arrangements.	Défauts.
1 2 3 4	0	3 1 2 4	9	2 4 3 1	13	4 2 1 3	17
2 1 3 4	3	2 1 4 3	10	3 2 4 1	13	4 1 2 3	18
1 3 2 4	5	1 3 4 2	11	2 4 1 3'	15	3 4 2 1	19
1 2 4 3	7	1 4 3 2	12	3 1 4 2	15	3 4 1 2	20
2 3 1 4	7	2 3 4 1	12	4 2 3 1	15	4 3 2 1	20
3 2 1 4	8	1 4 2 3	13	4 1 3 2	17	4 3 1 2	21

* Le texte imprimé porte de manière aberrante 2 8 2 3. Nous corrigeons.

Ces défauts sont calculés d'après la règle que je viens de donner, et qui n'a point de difficulté. C'est ainsi, par exemple, que pour le dernier arrangement on aura :

4 est transposé	de 3 places, ce qui fait	12 = 4.3
3	d'une place,	3 = 3.1
1	de 2 places	2 = 1.2
2	de 2 places	4 = 2.2
La somme est		21

[335] J'observe en passant, que dans les six cas où le No. 4. est à sa place, les défauts sont les mêmes que lorsqu'il n'y a que trois objets; et comme ces défauts sont 0, 3, 5, 7, 8, 9 on voit qu'ils sont beaucoup moins grands. La raison en est claire; c'est que le No. 4. fait un grave personnage, et le nombre des places est pareillement augmenté d'une unité.

§ 12. Dans le cas que je viens d'exposer, on voit que ce ne sont pas les degrés de l'ordre, mais bien ceux des défauts, qui doivent être évalués. Chaque objet doit occuper la place qui répond à sa dignité, et dès que cela est, tous les rangs sont observés et l'ordre est absolu, en sorte qu'alors il n'y a rien à calculer. Car le nombre des objets et des places ne produit tout au plus qu'une série ou une procession plus ou moins longue ou nombreuse, et si c'est une solennité elle en peut devenir plus pompeuse. Mais tout cela n'en rend l'ordre ni plus ni moins grand, dès qu'il est absolu, ou qu'il n'y a point de rang blessé. Mais dès qu'il y en a, il est clair que les déplacements peuvent être comptés, et qu'ils s'aggravent encore en raison des dignités lésées par ces déplacements. Du reste il y a encore d'autres cas où, au lieu de ce qu'on croirait d'abord devoir être calculé, on trouve que c'est tout le contraire qui doit l'être. C'est ainsi, par exemple, que lorsqu'il s'agit des degrés de la vue distincte, ce ne sont pas ces degrés, mais les degrés de confusion qui doivent être calculés. Car la vue absolument distincte est une unité absolue, comme l'ordre absolu des rangs. L'un et l'autre a lieu partout où la confusion, ou le défaut d'ordre, est = 0.

§ 13. Mais passons à d'autres cas où l'ordre absolu est une unité, qui pour les degrés inférieurs admet des fractions. Ces cas sont ceux où les objets qu'il faut mettre en ordre ont leurs places assignées, mais en sorte que pour les remplir dignement ils doivent répondre en tout aux conditions attachées à chaque place. Tel est, par exemple, le cas d'une bibliothèque bien rangée. Les livres s'y classifient d'abord suivant les

sciences; ensuite on a égard à leur ancienneté, au format, à la reliure etc. Et il est clair que si chaque livre satisfait à toutes ces conditions, il occupera sa place par tous les titres, et la bibliothèque sera absolument bien arrangée. L'ordre dans lequel elle se trouve sera cette unité absolue dont je viens de parler. Elle ne saurait devenir plus grande, quoiqu'elle admette des fractions; et ces fractions [336] expriment les degrés inférieurs de l'ordre, qui aura lieu lorsqu'il y aura des exceptions à faire, c'est-à-dire, lorsque les livres d'une même classe ne satisfont pas à toutes les conditions.

§ 14. Observons cependant que quoique cette unité soit absolue dans tous les cas, elle ne laisse pas de dépendre d'autant d'unités qu'il y a de règles à observer. Et si ces règles ne sont pas d'une même importance, ces unités ne sauraient non plus être prises sur une même échelle, mais sur des échelles proportionnellement plus ou moins grandes, de sorte qu'après qu'on a fait le calcul, il faut y joindre la réduction que demande la diversité des échelles. Voici maintenant comment ce calcul doit être fait, et pour plus de clarté retenons l'exemple des livres et de la bibliothèque.

§ 15. Supposons que le nombre des livres soit $= n$, et que chaque livre doive satisfaire à 3 conditions, dont l'importance soit désignée par a, b, c . Je dis d'abord que le produit $n(a + b + c)$ est l'unité absolue. Et si tous les livres satisfont à ces conditions, chacun séparément, l'ordre sera pareillement absolu. Ensuite je remarque qu'il y a toujours moyen d'arranger les livres en sorte que du moins ils satisfassent tous à la condition principale, qui soit a . Supposons donc qu'ils ne satisfassent pas tous aux deux autres conditions b, c , mais qu'il y en ait

m qui y satisfassent,

p qui ne satisfassent qu'à la condition b ,

q qui ne satisfassent qu'à la condition c ,

r qui ne satisfassent à aucune de ces deux conditions.

Il est clair que l'ordre ne sera pas absolu, mais qu'il sera d'autant plus petit que les nombres p, q, r seront plus grands. Or, pour trouver ce degré inférieur, il faut multiplier le nombre de chaque espèce par la somme des valeurs a, b, c assignées aux conditions auxquelles elles satisfont, ce qui donne

$$m(a + b + c) + p(a + b) + q(a + c) + ra;$$

et la somme de ces produits étant divisée par $n(a + b + c)$ qui marque l'unité absolue, on aura la fraction

$$\frac{m(a + b + c) + p(a + b) + q(a + c) + ra}{n(a + b + c)}$$

qui exprime la valeur de l'ordre de la bibliothèque arrangée de la façon que nous venons de supposer.

[337] § 16. S'il s'agissait de calculer la valeur de l'ordre qui se trouve dans la versification, on procéderait de la même manière. Dans chaque vers les places pour les syllabes longues et brèves sont assignées, et c'est au poète à arranger son vers en sorte que la condition à l'égard de chaque place soit remplie. La langue offre des syllabes de trois ou quatre longueurs différentes, au lieu que le vers n'en veut que de deux espèces. Et si le poète remplit ces places en sorte que son poème soit bientôt achevé, il est clair qu'on trouvera souvent pour la valeur de l'ordre, non l'unité absolue, mais une fraction assez petite. Il y a une remarque assez semblable à faire à l'égard du nombre oratoire des périodes. Il faut que l'harmonie qui doit s'y faire sentir soit conforme au sujet, et quelques membres de la période étant données, les autres en sont d'autant moins arbitraires, si on veut que la période soit bien arrondie, et que l'ordre ou l'arrangement des paroles et des phrases soit absolu. Il en est de même de l'arrangement des différentes parties d'une théorie, lorsqu'on veut que l'ordre y soit absolu. Il s'agit, dans ce cas, non seulement d'éviter les redites, mais surtout de faire en sorte que tout ce qu'on établit soit précédé de ce qui est requis pour l'entendre, pour s'en convaincre, et pour l'exécuter lorsqu'il s'agit de la pratique⁸. Tel est, ou peu s'en faut, l'ordre qui règne dans les *Éléments* d'Euclide⁹. Mais si à cet égard on repasse la plupart des Institutions de Chimie¹⁰, on y trouvera un ordre

8 Comparer avec Descartes, *Méditations métaphysiques, Réponses aux secondes objections*, «L'ordre consiste en cela seulement, que les choses qui sont proposées les premières doivent être connues sans l'aide des suivantes, que les suivantes doivent après être disposées de telle façon, qu'elles soient démontrées par les seules choses qui les précèdent». René DESCARTES, *Ceuvres*, édition Adam-Tannery, Paris: Vrin, vol. IXa, p. 121.

9 Sur l'ordre des *Éléments* et plus généralement des textes mathématiques, voir *Neues Organon*, II, *Dianoilogie* ch. IX §679. Voir Paola BASSO, *Filosofia e geometria. Lambert interprete di Euclide*, Florence: La nuova Italia, 1999.

10 Par exemple, Jacob Reinbold SPIELMANN, *Instituts de chimie*, trad. par A. Cadet de Vaux, Paris: Vincent, 1770, plutôt sans doute que les

d'un degré bien Inférieur; et quand il s'agit des écrits où l'ordre est = o, c'est aux alchimistes qu'il faut s'adresser. Le calcul, dans tous ces cas et dans beaucoup d'autres, est à très peu près le même. Tout se réduit à évaluer les degrés d'importance des règles auxquelles chaque partie doit satisfaire. J'observe seulement que dans les écrits théorétiques il peut arriver que toutes les règles concourent à assigner sa place à chaque énoncé. Dans ces cas les défauts d'ordre s'évaluent suivant les déplacements. Et comme chaque énoncé peut être regardé comme d'autant plus important que sa place est plus près du commencement, il est clair que son déplacement s'aggrave par son degré d'importance; et voilà ce qui rend le calcul parfaitement semblable à celui que nous avons donné ci-dessus pour les rangs.

[338] § 17. Mais il se peut aussi que les règles ne s'accordent pas à assigner une même place à chaque objet, et que les déplacements puissent être comptés. Dans ces sortes de cas il se peut que l'une des règles l'emporte de façon qu'elle doit être absolument observée. Mais si cela n'est pas, et que chaque règle garde ses droits, il est clair que, de quelque façon que l'objet soit placé, l'ordre ne fera pas absolu, mais qu'il y aura des défauts qu'il convient de calculer. Pour cet effet il faut d'abord évaluer l'importance de chaque règle. Ce degré doit être multiplié par la distance qui est entre l'objet et la place que la règle lui assigne, et la somme de tous ces produits marquera le degré de défaut d'ordre qui, suivant l'arrangement qu'on a fait, peut être plus ou moins considérable. De là il suit que, quand il n'y a que deux règles, on manque le moins quand on s'en tient à celle qui est de plus grande importance. Quand il y en a plusieurs, c'est ordinairement à une des intermédiaires qu'il faut s'en tenir, à moins que celle qui demande la place la plus avancée ou la plus reculée ne l'emporte en importance sur la somme des degrés d'importance de toutes les autres. Comme dans ce calcul la distance de l'objet de la place que chaque règle lui assigne, se prend toujours positivement, de quelque côté de cette place que se trouve l'objet, cela fait qu'il n'y est pas question de la continuité; par cette raison le calcul reste toujours numérique, et le changement des signes + et – n'y a pas lieu. Cependant les règles que je viens de donner peuvent être d'usage en plusieurs cas. J'ai observé qu'on les suit assez bien dans les solennités, où

Institutions chimiques de J.-J. Rousseau (1747), dont le manuscrit n'a été publié qu'en 1822.

il s'agit d'évaluer les prétentions à tel ou tel rang, et où les différents titres font qu'il faut se décider pour l'un aux dépens des autres. Cela arrive également dans l'arrangement d'un système, d'un ouvrage théorique, où les règles de la méthode ne s'accordent pas à assigner une même place à quelque partie du système. Toute la difficulté qu'il y a c'est d'évaluer l'importance de chaque règle. Cependant ce que je viens d'établir fait voir que partout où il n'y a que deux règles il suffit de savoir en gros quelle est la plus importante, parce que c'est celle-là qu'il faut suivre. Mais quand il y en a plusieurs, alors sans doute la connaissance exacte du degré d'importance de chacune devient plus nécessaire, surtout où il faut s'en tenir à une de celles qui assignent une place intermédiaire. Du reste il est clair que si plusieurs règles exigent [339] une même place, elles équivaudront à une règle dont l'importance est égale à la somme de toutes celles qui assignent la même place.

§ 18. Éclaircissons néanmoins ce que nous venons de dire, par le cas où il n'y a que 3 règles.

$$\begin{array}{ccccc} A & \dots\dots\dots & B & \dots\dots\dots & C \\ & & m & & n \end{array}$$

Soient A, B, C les places assignées par chacune des trois règles. Que le degré d'importance soit pareillement désigné par A, B, C . Faisons m égal au nombre des places ou à l'intervalle AB , et n égal à l'intervalle AC . Soit enfin x la distance de l'objet de la place A , de sorte que cet endroit soit quelque part entre A et C . Nous aurons donc

$$\begin{array}{ll} x & \text{la distance de l'objet de la place } A \\ m - x & \dots\dots\dots B \\ n - x & \dots\dots\dots C \end{array}$$

et par conséquent le défaut d'ordre sera

$$y = Ax + B(m - x) + C(n - x)$$

séparons dans cette valeur les parties variables, et nous aurons

$$y = x(A - B - C) + Bm + Cn$$

D'où l'on voit d'abord que, dès que la règle A équivaut à la somme des règles $B + C$ on aura $A - B - C = 0$, et par conséquent

$$y = Bm + Cn$$

c'est-à-dire que dans ce cas il est indifférent laquelle des trois places on donne à l'objet; le défaut d'ordre sera toujours le même.

Mais supposons, en second lieu, que la règle A l'emporte sur la somme des deux autres; nous aurons $A > B + C$, et ainsi $A - B - C$ étant

une quantité positive, il est clair que le défaut d'ordre fera le moindre possible en faisant $x = 0$, c'est-à-dire, en plaçant l'objet en A .

Réciproquement, si la seconde règle B l'emporte sur les deux autres, la valeur, et nous aurons, puisque x tombe entre B et C ,

$$y = A(m + z) + Bz + C(n - m - z)$$

ou bien [340]

$$y = (A + B - C)z + Am + C(n - m)$$

Mais on a

$$n > m$$

$$A + B - C > 0$$

donc, pour avoir le moindre défaut, il faut faire $z = 0$, c'est-à-dire que l'objet doit être placé en B . Il convient ici de remarquer que suivant la loi de continuité il eût fallu faire

$$y = (m + z)A - Bz + C(n - m - z)$$

Mais j'ai déjà dit que les distances se prennent toujours positivement; et c'est à quoi il faut avoir égard dans les substitutions qu'on fait. C'est aussi ce qui rend l'énumération des cas plus diffuse.

Le cas où $C > A + B$, est le même que celui où $A > B + C$; car l'une et l'autre des places A , C , sont à l'extrémité. Ainsi dans ce cas l'objet doit être placé en C .

Mais il reste encore quelques autres cas. Supposons d'abord A plus grande que B ou C séparément, mais que A soit $< B + C$. Dans ce cas nous aurons

$$y = -x(B + C + A) + Bm + Cn$$

Ainsi le défaut d'ordre diminue du moins aussi longtemps qu'on place x entre A et B ; de sorte que tout au moins il faut le placer en B . Plaçons donc x entre B et C , en sorte que $x = m + z$, et nous aurons, comme auparavant,

$$y = A(m + z) + Bz + C(n - m - z)$$

ou bien

$$y = (A + B - C)z + Am + C(n - m - z)$$

Or

$$A > C$$

et d'autant plus

$$A + B > C$$

et

$$n > m.$$

Donc le défaut d'ordre s'accroît avec z . Donc il faut faire, et placer l'objet en B .

Il est clair que la même chose arrivera dans le cas où C surpasse en importance chacune des règles A , B séparément, sans cependant les surpasser conjointement.

[341] À d'autant plus forte raison faudra-t-il placer l'objet en B , lorsque cette règle l'emporte sur chacune des règles prises séparément, quand même elle ne l'emporterait pas sur les deux conjointement.

§ 19. Voici donc le résultat du calcul que je viens de détailler pour les cas de trois règles. Il faut s'en tenir à celle qui a le plus d'importance. Si elle l'emporte sur les deux autres conjointement, l'objet doit être mis à la place qu'elle assigne. Mais si les deux autres règles l'emportent, quoique chacune prise séparément soit de moindre valeur, alors l'objet occupera la place intermédiaire B , quelle que soit la règle la plus importante. S'il y a deux règles d'une importance égale, ce sera encore la place intermédiaire, à l'exception du seul cas où la troisième règle est plus importante que la somme des deux égales, et que cette troisième règle demande une des places extrêmes.

§ 20. On voit aisément que s'il fallait faire l'énumération des cas où il y a plus de trois règles, cette énumération augmenterait considérablement en prolixité, surtout pour ce qui regarde les places intermédiaires. Car si l'une de ces règles l'emporte sur la somme de toutes les autres, elle s'arroe l'objet, quel que puisse être le nombre des règles. Mais voyons s'il y a moyen d'éviter cette énumération des cas, par quelques considérations générales. Supposons pour cet effet un nombre quelconque de règles et de places en succession linéaire. Supposons encore l'objet mis dans quelque place intermédiaire; il est clair que quand on l'avance d'un côté, par exemple, du côté droit, le degré du défaut d'ordre change de deux façons. D'abord il diminue à l'égard des places qui sont du côté droit, et ensuite il augmente à l'égard des places qui sont du côté gauche. Enfin il augmente encore à l'égard de la place dont il a été avancé du côté droit. Cette dernière augmentation a encore lieu, quand même l'objet serait reculé du côté gauche. Mais à l'égard des autres places il arrive tout le contraire. Car le défaut diminue du côté gauche, tandis qu'il augmente du côté droit. L'effet à l'égard de toutes ces places est le même; mais il change du positif au négatif, ou réciproquement. Il n'y a que l'effet de la place d'où l'objet a été avancé ou reculé, qui reste toujours positif, bien entendu que l'objet ne soit pas avancé ou reculé au-delà de la place la plus voisine de celle qu'il occupait [342] d'abord. Mais la condition du moindre défaut veut que

de quelque côté que l'objet soit avancé, le défaut aille en augmentant. De là il suit que la place qu'il doit occuper est telle que l'effet qu'elle produit dans le déplacement est plus grand que celui que produisent toutes les autres places. Il faut donc que la différence entre la somme des degrés d'importance du côté droit et celle du côté gauche soit moindre que le degré d'importance de la place qui donne le moindre défaut. Voilà donc la règle qu'il s'agissait de trouver. Elle est indépendante de la distance qu'il y a entre les places; il suffit qu'il y en ait une quelconque. Mais elle dépend de l'importance des règles, et de plus il faut savoir quel est l'ordre de ces règles à l'égard des places. Moyennant ces données, on trouvera de la façon suivante la place qui répond au moindre défaut. Qu'on prenne la somme des degrés d'importance de toutes les règles, afin d'avoir la moitié de cette somme. Si donc la règle qui demande la place extrême, par exemple, du côté droit, surpasse en importance la moitié de cette somme, alors elle s'arroge l'objet. Sinon, on prendra encore la seconde règle, c'est-à-dire celle qui assigne la seconde place du côté droit. Et si le degré d'importance de ces deux règles l'emporte sur la moitié de la somme de toutes les règles, c'est alors à cette seconde place qu'il faut mettre l'objet. Sinon, on prendra encore la troisième règle, c'est-à-dire celle qui assigne la troisième place du côté droit, et on verra si la somme des degrés d'importance de ces trois règles surpasse la moitié de la somme de toutes. Si cela est, l'objet doit être mis à cette troisième place. Sinon, on prendra encore la quatrième règle, et ainsi de suite. Cela veut donc dire qu'il faut ajouter selon l'ordre des places les degrés d'importance d'autant de règles, qu'il en faut pour que la somme commence à être plus grande que la moitié de la somme des degrés de toutes les règles. Et la règle qui commence à produire cet excédent, est celle qui assigne la place où l'objet doit être mis pour qu'il y ait le moindre défaut d'ordre. S'il arrive que les deux sommes soient égales, alors il y a deux places équivalentes, ou qui produisent le même moindre défaut.