Second essai de taxéométrie ou sur la mesure de l'ordre

Johann Heinrich Lambert

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/cps/961>

DOI : 10.4000/cps.961

ISSN : 2648-6334

Éditeur

Presses universitaires de Strasbourg

Édition imprimée

Date de publication : 27 novembre 2018

Pagination : 193-211

ISBN : 979-1-03440-024-9

ISSN : 1254-5740

Référence électronique

Johann Heinrich Lambert, « Second essai de taxéométrie ou sur la mesure de l'ordre », *Les Cahiers philosophiques de Strasbourg* [En ligne], 44 | 2018, mis en ligne le 15 décembre 2018, consulté le 13 novembre 2022. URL : <http://journals.openedition.org/cps/961> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/cps.961>

Creative Commons - Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International - CC BY-NC-SA 4.0

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Second essai de taxéométrie ou sur la mesure de l'ordre

Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres, année 1773, Berlin: Haude et Spener, 1775, p. 347-368.

Johann Heinrich Lambert

[347] § 1. Dans mon premier *Essai sur la mesure de l'ordre* j'ai supposé que l'espèce d'ordre dont on veut calculer les degrés ou les défauts, et les règles qu'il faut observer dans l'arrangement des objets, sont toutes prescrites, et que le degré d'importance de chaque règle est donné. Il ne s'agissait donc que de comparer l'arrangement fait ou à faire avec les règles prescrites, et d'évaluer pour chaque cas les degrés de l'ordre, ou ceux du désordre, ou enfin les défauts, et de voir comment cette évaluation peut être ramenée ou assujettie au calcul. C'est par là que j'ai cru devoir commencer, parce que les règles et leurs degrés d'importance étant donnés, le calcul se trouve considérablement simplifié.

§ 2. Je passerai maintenant à examiner les règles et le degré d'importance ou de préférence qu'une règle peut avoir sur l'autre. C'est ici qu'il paraît y avoir beaucoup d'arbitraire, et même au point que toutes les bizarreries de l'imagination semblent pouvoir s'en mêler. Il s'agit de *mesurer l'impression que fait sur nous le plus ou le moins de beauté de quelque arrangement, la symétrie, le mélange de ressemblances et de variétés que nous y apercevons*. Cette impression est très réelle, et ses différents degrés de force sont très perceptibles. Nous sentons ces différences, et quelquefois même au point que nous croyons pouvoir en assigner les rapports en disant par exemple que tel arrangement vaut 2 fois, 4 fois, 10 fois, 100 fois, incomparablement, infiniment mieux que tel autre. Avec tout cela lorsqu'il s'agit de rendre raison de ces jugements,

tantôt c'est un *je-ne-sais-quoi* [348] qui nous les fait porter¹, tantôt nous tombons dans le sophisme *non causæ ut causæ*²; souvent aussi la raison que nous alléguons, quoiqu'en soi très vraie, ne laisse pas d'être une pure imagination.

§ 3. Pour voir clair dans une matière assez obscure et assez confuse, il convient d'aller du plus simple au plus composé. Je suivrai cette règle, surtout dans le choix des exemples que je vais rapporter. Je me les suis proposés à moi-même, et j'ai fait attention aux différentes impressions qu'ils m'ont faites, et aux raisons que j'ai pu trouver; tout cela dans le dessein de voir si la comparaison que j'en ferais ensuite me conduirait à quelque principe qui pût servir de base pour les calculs. Je savais d'avance que les impressions dans le monde intellectuel sont très analogues aux impressions du monde physique, et que les degrés de tension des fibres du cerveau suivent plus ou moins les mêmes lois que ceux des muscles du bras, lorsque nous comparons différents poids en les tenant dans la main³.

- 1 Voir, par exemple, LEIBNIZ, *Méditations sur la connaissance, la vérité et les idées*, trad. P. Schrecker, Paris: Vrin, 2001, p. 15, dans la description de la connaissance claire mais confuse. Au point de vue littéraire, voir Dominique BOUHOURS, *Entretiens d'Ariste et d'Eugène*, 1^{re} édition, Paris: Cramoisy, 1671, Cinquième entretien «*Le je ne sais quoi*»; cf. Suzanne GUELLOUZ, «*Le P. Bouhours et le je ne sais quoi*», *Littératures*, 1971, n° 18, p. 3-14. Le paradoxe de la notion est que le *je ne sais quoi* apparaît comme la raison inconnue (par celui qui le porte tout au moins) d'un jugement sur une personne ou sur un objet (et qui paraît entraîner que l'amour ou le dédain pour l'objet précède sa connaissance au lieu de la suivre).
- 2 Ou, le plus souvent, *non causa pro causa*: «prendre pour une cause ce qui n'est pas une cause». Voir, par exemple, ARNAULD et NICOLE, *La logique ou l'Art de penser*, III, ch. 19, point 3 (édition Clair-Girbal, Paris: Vrin, 1981, p. 245-250).
- 3 Lambert examine la fonction du cerveau dans la connaissance et l'action à partir du § 98 de la *Phénoménologie* en montrant moins l'analogie des mouvements corporels et spirituels que la continuation des mouvements du corps dans le cerveau (sensation) et inversement (mouvement volontaire), avec cependant des changements dus à la finesse des fibres cervicales: le mouvement se conserve, mais pas nécessairement la structure de l'organe. Le § 99 souligne l'utilité qu'aurait l'explication parfaite du mécanisme et de la structure du cerveau pour la connaissance de l'apparence psychologique, utilité identique à celle de l'anatomie de l'œil en optique. Lambert pose ainsi que le cerveau est semblable à l'*atelier de l'âme* (*Werkstätte der Seele* – nous préférons traduire ainsi plutôt que *laboratoire* utilisé par G. Fanfalone,

§ 4. Voici donc maintenant quelques exemples isolés, et qui ne serviront encore qu'à faire voir les différents jugements, et même les plus simples, que nous portons sur les arrangements des objets. Je suppose trois tableaux de différente grandeur; il s'agit de les arranger. Qu'on les place horizontalement en ligne droite, cela fera peu d'effet, en quelque ordre qu'on les range. Si cependant il faut les placer ainsi, il me semble que le grand tableau doit être au milieu. Sa grandeur convient avec la préférence que les règles de la symétrie donnent à la place du milieu. Ensuite le défaut de symétrie est diminué en ce qu'il ne consiste que dans la différence de grandeur entre le petit tableau et le tableau moyen. Si ce tableau moyen se trouvait au milieu, le défaut serait égal à la différence de grandeur du plus petit et du plus grand. Donc il y aurait bien moins de symétrie, et l'arrangement ne ferait point d'effet.

§ 5. Plaçons à présent ces mêmes tableaux en ligne verticale. Ici tout change. La symétrie ne se compte guère de bas en haut ou de haut en bas. Tout se rapporte ou au sommet ou à la base. Ainsi nos trois tableaux pourront former ou une pyramide ou un pendant. L'un et l'autre est possible, parce que les tableaux diffèrent en grandeur. Mais, [349] généralement parlant, le pendant semble préférable, indépendamment des circonstances locales, telles que serait un buffet sur lequel le grand tableau serait appuyé et où il servirait de base aux deux autres.

§ 6. Les raisons que je viens d'alléguer pour ou contre ces arrangements, reviennent principalement à ce que dans l'ordre linéaire horizontal nous exigeons de la symétrie, c'est-à-dire un milieu connaissable et des ressemblances de côté et d'autre, tandis que dans l'ordre linéaire vertical cette symétrie nous paraît beaucoup moins nécessaire. La ligne verticale diffère assez de l'horizontale pour que leur différence nous serve de règle. Dans l'ordre linéaire horizontal, qui peut de côté et d'autre s'étendre à l'infini, il n'y a que le milieu d'où, comme d'un point fixe, nous puissions partir, et où nous puissions ramener tout ce qui se trouve de part et d'autre. Dans l'ordre linéaire vertical nous nous trouvons plus ou moins limités vers le bas, quoique d'un autre côté rien ne nous gêne par le haut. C'est donc à la base que nous nous en tenons comme à un point fixe.

trad. citée, p. 79); cf. Lambert, *Neues Organon*, éd. citée p. 696sq. Voir la même expression utilisée dans le chapitre suivant, au § 132 (trad. p. 98), conjointement à la notion, plus classique, de siège de l'âme. Cf. également *Anlage zur Architectonik*, Vorrede p. XII et § 252, p. 224, § 788 p. 412.

Cette base, ou ce point fixe, se trouve encore avoir lieu dans divers autres cas. Qu'une allée aboutisse d'un côté à un château et s'étende de l'autre à perte de vue, le château sera le terme d'où il faut la voir, et servira comme de base à l'ordre linéaire de l'allée.

§ 7. Si nous envisageons les deux ordres linéaires que nous venons d'examiner, simplement comme deux dimensions différentes de l'espace, la différence entre la direction horizontale et la verticale disparaît, du moins en grande partie, et il ne reste que l'idée générale de deux espèces différentes d'ordre linéaire. L'une sera celle de l'*ordre linéaire symétrique* ayant le milieu pour terme fixe et des ressemblances de côté et d'autre, de sorte que tout ce qui se trouve d'un côté doit également et de la même manière se trouver de l'autre. La seconde espèce, qui suit les lois de l'arrangement vertical, mérite également quelque nom particulier. Au défaut d'un autre plus expressif je lui donnerai celui d'*ordre linéaire fuyant*, ou d'*ordre de fuite linéaire*, ou d'*ordre linéaire asymétrique*. Les objets arrangés suivant les lois de cet ordre doivent être vus le long de la droite dans laquelle ils sont placés, telle que cette allée dont nous venons de parler, et à cet égard la [350] droite est ce qu'on appelle en perspective une *ligne fuyante*, et le point où elle se termine à l'horizon est *le point de fuite*. Voilà donc l'origine des deux premières dénominations. La troisième se fonde sur ce que dans cet ordre il n'y a point de symétrie proprement dite, quoiqu'il puisse y avoir quelque chose d'analogue. Ce qui se trouve vers l'une des deux extrémités peut plus ou moins se trouver vers l'autre, mais avec des rapports et des proportions sensiblement différentes, même indépendamment des circonstances locales et du but particulier de chaque partie. Le piédestal d'une colonne peut servir d'exemple. Si l'ordre devait y être symétrique, les ornements de la base seraient en tout semblables et égaux à ceux de la cimaise. Mais il n'y a ni ressemblance ni égalité parfaite. Aussi l'ordre n'y doit-il pas être symétrique.

§ 8. Je passe à un autre exemple. Supposons trois objets ou tableaux égaux et semblables, et un quatrième qui soit différent et plus grand. Il s'agit de les ranger. D'abord il est évident qu'en les plaçant dans une même ligne horizontale, il n'y a point de symétrie, et que cet arrangement sera sans effet. Qu'on les place l'un au-dessus de l'autre en ligne verticale, le grand tableau devra être ou tout en haut ou tout en bas. Si c'est au-dessus des autres qu'on le place, le pendant paraîtra un peu trop long et le terme inférieur ne différera point des deux intermédiaires. Si c'est en

bas, on aura une colonne sans chapiteau. L'un et l'autre arrangement sera sans effet. Il y a du trop et du trop peu. Ainsi ces quatre pièces ne sont point pour l'ordre linéaire. Passons donc à l'ordre de double dimension. Ici s'offrent d'abord les quatre manières que voici :

Il s'agit de savoir laquelle mérite la préférence, indépendamment des circonstances locales qui dans des cas particuliers peuvent faire préférer l'un de ces arrangements à l'autre. Il me semble que les deux premiers doivent être rejetés, parce que le défaut de symétrie y est plus grand que dans les deux derniers. Voyons ce qu'il faut de part et d'autre pour rendre la [351] symétrie complète ou absolue. Dans tous les quatre cas il manque une pièce. Dans les deux derniers c'est évidemment un $\bigcirc$. La place pour cet $\bigcirc$ est vide. Ainsi c'est un défaut simple. Dans les deux premiers cas la place vide exigerait un $\square$, et en le suppléant on aura

Mais cet arrangement ne fait point d'effet. Ces pièces s'arrangeraient mieux en ligne droite

et avec tout cela le milieu n'aurait rien de distinctif. Il faut donc dans les deux premiers cas compléter la symétrie au moyen d'un $\bigcirc$ qu'on mettra à la place vide. Mais outre cela il faut encore mettre le $\square$ au milieu. Donc le défaut de symétrie y est double, au lieu que dans les deux derniers arrangements il n'est que simple. Rejetant donc les deux premiers, il reste encore à voir s'il y a quelque préférence à donner à l'un ou à l'autre des deux derniers. Il y a même défaut de symétrie. Il faudra donc se décider par d'autres raisons, et ces raisons doivent être indépendantes des circonstances locales. Le troisième approche de l'ordre de fuite, pour lequel cependant il a trop peu de parties, trop de base et trop peu à porter. Le quatrième offre un pendant. Peut-être aussi que la place vide étant plus reculée le défaut est censé moins sensible. Du reste la différence entre ces deux arrangements est très petite; mais c'est précisément ce qu'il faut lorsqu'en se décidant pour l'un ou pour l'autre on veut voir si les raisons qu'on peut alléguer sont réelles ou illusoires.

§ 9. Dans les exemples que je viens de rapporter, il y a défaut de symétrie, et à cet égard il ne s'agissait que de voir de quelle manière ce défaut peut être diminué le plus qu'il est possible. Je vais en proposer d'autres qui sont symétriques, mais qui nonobstant cela laisseront quelque choix à faire. Il s'agira encore des principes qu'il faut suivre. Mais je tâcherai outre cela de proposer ces exemples de telle sorte qu'en allant [352] du plus simple au plus composé je puisse suivre quelque plan systématique. Voici comment.

§ 10. L'ordre sera encore linéaire et symétrique. De là le milieu connaissable, et l'arrangement de part et d'autre sera semblable. Les caractères $\square \circ \triangle \star \mathcal{O} \mathcal{X}$ etc. me tiendront lieu d'objets, et le nombre de ceux que j'emploierai ira en croissant. Chaque arrangement sera suivi de ce que je crois pouvoir en dire, sauf ce que chaque lecteur en pensera.

L'unité toute simple.

Couple à parfaite ressemblance.

Défaut simple de variété, milieu aisément connaissable.

Première base de la symétrie.

Défaut de milieu et trop d'uniformité.

Milieu ou nul ou double.

Milieu moins connaissable.

§ 11. Dans les cas suivants je ferai abstraction du nombre pair des objets, de même que de leur entière uniformité. On voit sans peine que dans les cas de 7, 9, 11, 13 etc. objets semblables, celui du milieu se reconnaît toujours moins, et que cela est contraire à la facilité avec laquelle l'ordre de l'arrangement doit être perceptible.

Milieu connaissable, mais qui ne diffère point des extrêmes.

Milieu triple.

[353]

Arrangement supportable.

Arrangement indéterminé, parce qu'il peut se faire de deux manières. Outre cela trop de variété dans les objets eu égard à leur nombre.

Arrangement supportable, quoiqu'avec trop peu de variété.

Ici le troisième arrangement non seulement l'emporte sur les deux premiers, mais il a quelque chose d'absolu en soi, en ce qu'il a encore une *symétrie latérale*.

Trop de variété.

Le premier de ces arrangements, quoiqu'encore supportable, commence à être trop uniforme. Le second a plus de variété, mais il n'a point de symétrie latérale, le nombre des $\circ$ étant impair.

Arrangement indéterminé, pouvant se faire de deux manières.

Défaut de symétrie latérale.

Même défaut, et outre cela nombre égal des, $\star \triangle$. Ce qui de chaque côté est isolé ou unique ne doit point être à l'extrémité.

[354] § 12. Il semble en général que s'il y a plus de deux sortes d'objets, le nombre pair de chaque côté offre plus d'imperfections que le nombre impair, qui admet une symétrie latérale. Je passerai donc aux cas où il y a 11 objets, sans cependant rapporter toutes les variations possibles, dont la plupart s'excluent sans peine en suivant les mêmes principes.

Arrangement supportable, quoique trop uniforme à l'égard des $\circ$, qui partout sont doubles.

Alternative des $\circ \triangle$ trop uniforme.

Trop de variété, et nombre égal des $\triangle$, $\circ$.

Ce dernier arrangement est susceptible de plus de perfections si nous augmentons le nombre des $\circ$. Ajoutons-y d'abord quatre $\circ$, pour séparer les $\star$ d'avec les $\triangle$; nous aurons 15 objets arrangés de la façon suivante

$\circ \triangle \circ \star \circ \triangle \circ \square \circ \triangle \circ \star \circ \triangle \circ$

Mais ici les $\circ$ sont tous isolés. Pour éviter cette monotonie il faut y joindre encore quatre $\circ$ vers le milieu des deux côtés; ce qui donne

$\circ \triangle \circ \circ \star \circ \circ \triangle \circ \square \circ \triangle \circ \circ \star \circ \circ \triangle \circ$

§ 13. Voilà donc l'arrangement que j'ai trouvé le plus absolu pour quatre sortes d'objets. Il en faut 19. J'ai repassé les cas les plus supportables pour 15 objets, mais il m'a paru y manquer quelque chose. Il y en avait trop pour une symétrie latérale simple, et trop peu pour une double que je n'obtins que pour 19 objets de 4 espèces différentes. Et comme j'ai déjà trouvé des arrangements absolus pour 1, 2, 3 sortes d'objets, je vais les mettre ici dans leur ordre, afin de pouvoir ensuite les comparer ensemble. Les voici :

$\square$
 $\circ \square \circ$
 $\circ \triangle \circ \square \circ \triangle \circ$
 $\circ \triangle \circ \circ \star \circ \circ \triangle \circ \square \circ \triangle \circ \circ \star \circ \circ \triangle \circ$

[355] § 14. Or j'ai trouvé que ces arrangements suivent une loi bien déterminée, en sorte que les deux premiers étant donnés, les autres en peuvent être déduits par de simples substitutions. Voici comment.

§ 15. Le milieu étant unique, il reste tel qu'il est. Et c'est de ce point qu'on part de côté et d'autre, en faisant les substitutions suivantes :

Pour chaque $\circ$ on met $\circ \triangle \circ$.

Pour chaque $\triangle$ on met $\circ \star \circ$.

Pour chaque $\star$ on met $\circ \vartheta \circ$.

Pour chaque ϑ on met $\circ \times \circ$.

Et c'est ainsi qu'on peut continuer à l'infini. Voici p.ex. le premier côté ou la première moitié du cinquième arrangement, tel qu'il se déduit du quatrième.

$\circ \triangle \circ \circ \star \circ \circ \triangle \circ \circ \triangle \circ \circ \vartheta \circ \circ \triangle \circ \circ \triangle \circ \circ \star \circ \circ \triangle \circ \square$

§ 16. Chacun de ces arrangements se change en son précédent en effaçant tous les $\circ$. On le déprime encore d'un degré, en effaçant outre cela tous les $\triangle$, et ainsi de suite.

§ 17. De la manière dont chaque arrangement se déduit de celui qui le précède immédiatement, on voit que de chaque côté du milieu

le nombre des objets devient triple. Cela fait que le nombre total croît dans la progression 1, 3, 7, 19, 55, 163, 487 etc. Et pour le nombre de chacune des différentes espèces d'objets on formera sans peine la table suivante :

Ordre	□	○	△	★	δ	⋈	etc.
1	1						
2	1	2					
3	1	4	2				
4	1	12	4	2			
5	1	36	12	4	2		
6	1	108	36	12	4	2	
etc.	etc.						

§ 18. Dans ces arrangements il y a partout même facilité de compter, parce que partout on ne compte que jusqu'à trois, et chaque substitution se fait par trois. C'est ce nombre fameux dont Virgile dit : *Numero deus impare gaudet*⁴. Je dirai encore en forme de corollaire, que l'œil ne [356] compte que jusqu'à trois, et même pour trois il demande que le milieu se distingue des extrêmes. Mais considérons un peu de plus près le mélange de ressemblances et de variétés qui se trouve dans le cinquième arrangement, dont l'un des côtés se trouve à la fin du § 15. Nous y voyons d'abord le centre ou le milieu □, qui diffère du centre du flanc δ en sorte que le nombre des ○ △ ★ qui sont près du □ ne fait que la moitié des ○ △ ★ qui de part et d'autre sont près du δ. Ainsi la qualité du milieu d'être *isolé, seul, unique*, s'étend en partie aussi sur ce qui l'environne. Le milieu □ avec les centres des deux flancs δ forment le nombre trois fondamental. Dans chaque flanc le centre δ avec les deux ★ forment les deux nombres trois du second degré. Mais ces ★ ne se trouvent pas à égales distances du milieu □, des deux extrémités et des centres des flancs δ. Car ces centres δ sont moins isolés que le milieu □. Et cela doit être. De chaque côté du δ il y a trois △, et trois fois trois ○. Mais l'arrangement est encore différent, en ce qu'entre le second et le troisième △ il y a un ★, ce qui double l'intervalle. De plus ces six △ forment un triple ternaire △ ★ △, △ δ △, △ ★ △, à tous égards symétrique. Les ○ dans chaque flanc sont au nombre de 18. Ils sont isolés au bout et près du milieu □, mais doublés tout autre part.

4 Virgile, *Bucoliques*, Églogue 8, v. 75 : « Dieu se réjouit du nombre impair ».

C'est pour conserver la symétrie tant à l'égard des $\mathcal{Q}$ qu'à l'égard des $\star$ et même des $\triangle$. C'est encore pour la facilité de compter, qui paraît cesser d'être absolue dès qu'on va au-delà de 3. Ajoutons encore que les $\bigcirc$ sont déjà assez entremêlés avec les $\mathcal{Q}$, $\star$, $\triangle$, et que les intervalles entre les $\star$, $\triangle$ sont déjà assez variés pour qu'on n'introduise pas encore une différence entre le nombre des $\bigcirc$ qui se suivent immédiatement.

§ 19. Les arrangements absolus que nous venons de trouver peuvent encore servir pour les cas où les objets sont placés en cercle. La circonférence du cercle est censée avoir 1, 2 ou 4 milieux. On peut même en supposer 6 ou davantage. Tout cela se décide d'après les vues particulières que l'on peut avoir. Le cas d'un seul milieu est celui d'une *bague*. Le cas de deux milieux suppose qu'ils soient diamétralement opposés, et que le diamètre transversal doive être moins essentiel à l'ornement [357] que celui qui joint les deux milieux. Dans le cas contraire il faut quatre milieux, placés au bout de deux diamètres qui se coupent à angles droits.

§ 20. S'il ne doit y avoir qu'un seul milieu, nos arrangements y satisfont tels qu'ils sont, et la circonférence sera divisée en 3, 7, 19, 55 etc. parties. Ces nombres étant impairs, on voit sans peine qu'il n'y a point d'objet qui soit diamétralement opposé au milieu, et cela contribue d'autant plus à faire voir qu'il est unique.

§ 21. Quant aux cas de deux milieux nos arrangements suffisent encore tels qu'ils sont, à condition que chacun soit augmenté d'un objet égal à celui du milieu. On aura donc pour la division tétragonale

$\square \bigcirc \square \bigcirc$

pour la division octogonale, ou pour huit objets

$\square \bigcirc \triangle \bigcirc \square \bigcirc \triangle \bigcirc$

pour la division icosagonale, ou pour 20 objets

$\square \bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \star \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc \square \bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \star \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc$

et ainsi de suite. Dans ce dernier arrangement on voit qu'il n'y a que deux milieux, tant parce que les objets $\star$, $\star$ placés à 90 degrés de distance sont censés inférieurs en dignités aux objets $\square$, $\square$ placés aux deux milieux, que parce que les $\triangle$ sont plus près des $\square$ qu'ils ne sont des $\star$.

§ 22. S'il faut faire quatre milieux, ce qui est le cas le plus symétrique, le nombre des objets qu'il faut pour deux milieux se double, et on aura

$\square \square \square \square$

Les quatre milieux tout simples.

$\square \bigcirc \square \bigcirc \square \bigcirc \square \bigcirc$

Pour la division octogonale, ou pour 8 objets.

□ ○ △ ○ □ ○ △ ○ □ ○ △ ○ □ ○ △ ○

Pour la division hexadécagonale, ou pour 16 objets, et ainsi de suite.

[358] §23. Ce que je viens de dire à l'égard des arrangements circulaires peut s'étendre plus ou moins aux rectangles, à condition que si le rectangle est plus long qu'il n'est large, l'arrangement à milieu simple ou double paraît préférable à celui où il y a 4 milieux. Mais le rapport entre les côtés du rectangle n'est pas indifférent, parce que les quatre coins ne doivent point être occupés par des objets de la moindre valeur. Il semble de plus que l'inégalité des côtés introduisant déjà par elle-même une variété de plus, il faudra, ou diminuer la variété des objets, ou en prendre un nombre assez grand pour que la différence des côtés ne déroge du moins pas sensiblement aux ressemblances. Voici donc deux exemples.

△ ○ ○ ★ ○ ○ △
○ ○ ○ ○ ○ ○
□ - - - - - □
○ ○ ○ ○ ○ ○
△ ○ ○ ★ ○ ○ △

Ici ces objets suivent le même ordre que dans le quatrième arrangement. Il fallait nécessairement placer le milieu □ au centre du côté le plus court, afin que les △ se trouvassent aux quatre coins, et rendre chaque côté symétrique. Le rapport des côtés est comme 4 à 6, c'est-à-dire comme 2 à 3. Voici le second exemple, où les objets suivent l'ordre du cinquième arrangement.

★ ○ ○ △ ○ ○ △ ○ ○ △ ○ ○ △ ○ ○ ★
○ ○ ○ ○ ○ ○
△ △ △ △ △ △
○ ○ ○ ○ ○ ○
□ - - - - - □
○ ○ ○ ○ ○ ○
△ △ △ △ △ △
○ ○ ○ ○ ○ ○
★ ○ ○ △ ○ ○ △ ○ ○ △ ○ ○ △ ○ ○ ★

Les côtés sont ici dans le rapport de 10 à 18, c'est-à-dire de 5 à 9. Si dans cet arrangement les objets sont trop variés, ce qui pourtant dans [359] quelques cas particuliers pourra ne pas avoir lieu, on n'aura qu'à mettre des ○ à la place des △, et il n'y aura plus rien à dire. Les milieux des côtés et les quatre coins doivent naturellement se distinguer du reste. À ces deux exemples j'en joindrai un troisième encore, où il

s'agit de remplir un carré en suivant à tous égards l'ordre du troisième arrangement. Le voici :

Ici le rang ou la dignité des objets est $\square \triangle \star \circ \lrcorner \bowtie$. Les séries parallèles aux côtés ont toutes le même arrangement, et on trouve encore cet arrangement dans les diagonales. Quant aux séries qui sont parallèles aux diagonales, il y a aussi de la symétrie, mais d'un degré moins absolu, surtout lorsque le nombre des objets dans ces séries est pair. Tout cela ne regarde que la symétrie linéaire, qui aurait encore lieu si chaque série existait toute isolée. Mais en considérant cet arrangement dans sa totalité, on trouvera un entrelacement de croix, de carrés et d'octogones aussi varié que la nécessité de rapporter chaque partie au milieu et de conserver le nombre requis de ressemblances peut le permettre. En retenant une diagonale et de chaque côté une ou deux séries parallèles et équidistantes, on aura encore des arrangements symétriques, quoique moins absolus. Comme ces sortes d'arrangements moins absolus sont applicables aux cas où l'on est borné par le nombre des objets ou par celui des espèces, les séries parallèles aux diagonales offrent à cet égard ce qu'on peut faire de mieux. C'est dans cette vue que je présenterai encore le quatrième arrangement linéaire absolu, étendu en carré. On y trouvera 17 séries parallèles [360] aux diagonales, où le nombre d'objets va depuis 2 jusqu'à 18. On peut en tirer encore quelques arrangements à triple rangée comme par exemple

où l'entrelacement de cinq objets en forme de croix et de quatre objets en forme de carreau s'aperçoit du premier coup d'œil.

§ 24. Mais sans m'arrêter à ces détails d'application je vais repasser la façon dont j'ai trié ces arrangements que je nomme *absolus*, d'entre un plus grand nombre d'autres que je trouvais plus ou moins défectueux. Si c'est [361] avec raison, j'aurai chemin faisant trouvé quelques principes qui jusque-là m'étaient inconnus, et par lesquels je pourrai compléter ceux qui m'étaient déjà connus. Voici donc, dans un ordre plus synthétique et plus en détail, les règles qui m'ont décidé pour ou contre les arrangements que j'ai examinés.

1° *Le milieu doit être unique, différent, et éminemment connaissable.*

Cette règle est la règle fondamentale de tout arrangement symétrique.

2° *Tout ce qui se trouve d'un côté du milieu doit se trouver encore de l'autre, à même distance et semblablement placé.*

C'est la seconde partie de la règle fondamentale que je viens de rapporter. Elle établit que le nombre total des objets doit être impair, le milieu ne devant pas être vide.

3° *L'arrangement n'est absolu que lorsque chaque objet a sa place entièrement déterminée.*

C'est simplement la définition de l'arrangement absolu, qui ne doit rien laisser d'arbitraire ou d'indécis. Il est donc toujours unique en son espèce, parfait, complet et exempt de défauts.

4° *Dans l'arrangement absolu les objets qui diffèrent en espèce doivent encore différer en nombre.*

Supposons que les objets de deux espèces différentes soient en même nombre. Qu'on les arrange le mieux qu'on pourra, je dis qu'à la place des uns on peut mettre les autres sans que l'ordre en soit changé. Donc leur place n'est pas absolument déterminée, ce qui est contre n° 3. Donc, etc.

5° *Chaque variété doit être rachetée et réciproquement chaque ressemblance doit être contrebalancée par quelque variété*⁵.

C'est l'unique moyen de se tenir également éloigné de la bigarrure et de la monotonie. Mais comme cette règle se fonde sur un principe plus général, il convient d'exposer ce principe.

[362] 6° *Le degré de perfection dans l'ordre est en général comme le produit du nombre des ressemblances par le nombre des variétés.*

J'observe, comme je l'ai déjà dit dans mon premier *Essai*, que je fais entièrement abstraction de ce que j'ai appelé *ordre de liaison*, par opposition à l'*ordre de ressemblance* ou à l'ordre purement symétrique, qui est le seul dont il est ici question⁶. Car l'ordre de liaison se mesure tout autrement.

7° *Chaque variété s'introduit aux dépens d'une ressemblance et chaque ressemblance aux dépens d'une variété.*

Cela veut simplement dire que ce qu'on fait d'une même manière on ne le fait pas de deux manières différentes, et réciproquement. Or l'un et l'autre ne peut pas se faire à la fois et dans un même sens.

8° *Dans un arrangement symétrique quelconque fait, la somme du nombre des ressemblances et des variétés est déterminé.*

C'est-à-dire qu'il n'y en a ni plus ni moins qu'il n'y en a effectivement.

5 Cette règle rappelle précisément une définition de l'harmonie fréquente chez Leibniz depuis l'époque de la *Confessio philosophi*, « *varietas identitate compensata* ». Voir sur ce point Francesco PIRO, *Varietas identitate compensata. Studio sulla formazione della metafisica di Leibniz*, Naples: Bibliopolis, 2007; F. de BUZON, « L'harmonie: métaphysique et phénoménalité », *Revue de Métaphysique et de Morale*, 100^e Année, 1995, n° 1, p. 95-120.

6 Cf. *Essai*, §7, *supra* p. xxx.

9° *Si, la somme des variétés et des ressemblances restant la même, on change l'ordre proposé en sorte que le nombre des variétés augmente ou diminue, on diminue ou on augmente de tout autant le nombre des ressemblances; et le degré de perfection de l'ordre en est changé.*

La première partie de cet énoncé est claire par elle-même. La dernière se déduit sans peine du principe n° 6.

10° *Le degré de perfection dans ce cas devient un maximum, si le nombre des variétés est égal au nombre des ressemblances.*

Soit a la somme des unes et des autres, x le nombre des variétés, on aura le nombre des ressemblances $= a - x$. Et en vertu du principe n° 6 le degré de perfection de l'ordre sera $p = x(a - x)$. Donc p sera un *maximum* lorsque $x = 1/2 a = a - x$. Donc ce que j'ai dit au sujet de la règle n° 5 est vrai au pied de la lettre, c'est que pour avoir un ordre absolu il faut se tenir également éloigné de la bigarrure et de la monotonie.

[363] 11° *Les objets de même espèce ne doivent pas être partout placés à distances égales entre eux, ni partout à distances inégales.*

Ces objets étant d'une même espèce fournissent déjà par eux-mêmes tout autant de ressemblances. Qu'on les mette tous à égales distances entre eux, on augmentera encore le nombre des ressemblances. Or le moyen de les racheter par un nombre égal de variétés? On ne pourra le faire sans introduire une bigarrure dans les autres objets et dans leurs distances mutuelles, surtout si le nombre de ces objets est plus grand que celui de ceux qu'on veut placer à distances égales. Supposons, en second lieu, qu'on place tous ces objets à distances inégales entre elles; on pêchera contre la règle fondamentale n° 2. Car dès qu'il y en a au moins deux d'un côté du milieu, il faut qu'il y en ait autant de l'autre et à même distance. À cette raison il s'en joint une autre, dont nous parlerons dans la suite.

12° *Outre les variétés et les ressemblances qu'il peut y avoir entre les objets d'une même espèce et de différentes, et entre les distances des objets d'une même espèce, il doit y en avoir encore relativement à la manière dont les objets de différente espèce sont entrelacés.*

C'est encore pour éviter la bigarrure et la monotonie qu'il faut avoir égard à la façon dont les objets de différente espèce se succèdent. Nous venons de voir que la ressemblance des objets d'une même espèce ne saurait se compenser entièrement par la variété dans leurs distances. C'est de cette nouvelle source qu'il faudra tirer ce qui est requis pour égaler les variétés aux ressemblances.

13° *Les objets de chaque espèce doivent être distribués par toute la série de l'arrangement, et d'autant plus également que leur nombre sera plus grand.*

Chaque espèce a également droit à dominer dans toute la série; à quoi se joint encore que les objets de différentes espèces pourront être mieux entrelacés.

14° *Dans l'arrangement absolu le nombre des objets de chaque espèce doit être le plus petit qui soit possible eu égard à ce que le nombre pour chaque espèce doit être différent de celui des objets pour chaque autre espèce (n° 4.)*

La raison en est que l'arrangement absolu exige qu'avec le moindre nombre d'objets on ait le plus grand nombre de variétés et de ressemblances. Je dirai encore que les petits nombres ont par eux-mêmes l'avantage d'être plus connaissables et de donner les rapports les plus simples.

15° *À l'exception de l'objet unique en son espèce, qui doit occuper le milieu, les nombres des objets de toutes les autres espèces doivent être des nombres pairs.*

Car ils doivent se trouver à côté du milieu de part et d'autre.

16° *Dans l'arrangement absolu le nombre des objets de chaque espèce est déterminé.*

Car c'est encore à cet égard qu'il ne doit rien y rester d'arbitraire. Nous pourrions donc distinguer ou numéroter les espèces dans le même ordre que le nombre des objets va en augmentant (n° 4). De cette manière la première espèce est celle qui fournit l'objet du milieu.

17° *La seconde espèce ne fournit que deux objets. La troisième en fournit quatre.*

Le moindre nombre après l'unité est le binaire. Comme c'est un nombre pair, et même le plus simple de tous, il ne se trouve pas exclu pour la seconde espèce. Il en est de même du nombre 4 pour la troisième classe.

18° *Si on emploie des objets de plus de deux espèces, les deux objets de la seconde espèce doivent occuper le centre des deux côtés du milieu.*

C'est ainsi qu'ils domineront également tous les objets des espèces subalternes (n° 13). Si donc on n'emploie que trois espèces, on aura $1 + 2 + 4 = 7$ objets, et l'arrangement absolu qui en résulte est le troisième de ceux que nous avons exposés au § 13.

[365] 19° *Dans l'arrangement absolu les objets de même espèce qui se succèdent immédiatement ne sauraient être en plus grand nombre que deux.*

Cet énoncé se fonde d'un côté sur la facilité d'apercevoir l'ordre sans qu'on ait besoin de compter les pièces. D'un autre côté, en supposant qu'il y ait trois objets ou plus, d'une même espèce, qui se succèdent immédiatement, on aura trop de ressemblances sans quelque variété entremêlée, les objets étant de même espèce et placés à distances égales. Dans le cas de trois objets l'un d'eux fait naître l'idée d'un milieu, qui ne serait connaissable que par le nombre des objets, tandis qu'il devrait être plus marqué.

20° *Il n'y a que les objets de la moindre espèce qui puissent se succéder immédiatement.*

Car les objets de chaque classe doivent être distribués par toute la série (n° 13). Or ceux des autres classes étant en moindre nombre (n° 16), il est évident qu'il faut les placer à des intervalles d'autant plus grands qu'ils sont moins nombreux. Joignons à cela que les raisons qu'on peut avoir pour placer les objets d'une classe ne doivent pas être les mêmes pour les autres classes.

21° *Les objets de la moindre classe doivent se succéder deux à deux, à l'exception du milieu et des extrémités.*

D'abord c'est pour éviter la bigarrure qui aurait lieu si trois places ou plus étaient occupées par des objets d'autant de classes différentes. Ensuite les objets de la moindre classe étant plus nombreux que ceux des autres classes, il est clair qu'à moins de les placer par couples il y en aurait de reste, et ce surplus se succéderait immédiatement. Enfin le milieu et les extrémités doivent se distinguer du reste, ce qui ne pouvant se faire par un nombre excédant le binaire, doit se faire par l'unité.

22° *Quant aux objets des classes moins nombreuses, ils ne sauraient être placés en sorte qu'ils se suivent deux ou plus de fois par un même intervalle.*

[366] Les mêmes intervalles supposent un même arrangement des objets intermédiaires, sans quoi il y a de la bigarrure. Mais si ces mêmes intervalles se suivent deux ou plus de fois immédiatement, on tombe dans la monotonie, parce qu'il pourrait y avoir quelque variété de plus.

23° *Chaque objet d'une classe moins nombreuse doit servir de milieu tout au moins à deux objets des classes plus nombreuses.*

Par-là la règle fondamentale de l'arrangement symétrique s'étend jusque sur les moindres parties, et suivant toutes les subdivisions, comme l'exige l'unité de l'arrangement. Cette règle s'observe comme d'elle-même par les substitutions que nous avons indiquées au § 15.

24° De chaque côté du milieu le nombre des objets d'une classe quelconque doit être le double du nombre des objets de toutes les classes supérieures ou moins nombreuses.

C'est ce qu'exige l'entrelacement des objets de ces classes supérieures, dont chacun doit servir de milieu à deux ou plus de deux objets de chacune des classes inférieures. Il y aura donc de chaque côté

1 objet de la seconde classe,
 2 objets de la troisième classe,
 $(1 + 2) \cdot 2 = 6$ objets de la quatrième classe,
 $(1 + 2 + 6) \cdot 2 = 18$ objets de la cinquième classe,

et ainsi de suite.

Doublant ces nombres et ajoutant l'objet du milieu, qui est unique, le nombre des objets pour un arrangement d'un degré quelconque sera

$$1 + 2 + 4 + 12 + 36 + 108 + 324 + \text{etc.}$$

§ 25. Voilà donc un grand nombre de règles et de principes pour discerner l'arrangement linéaire absolu. Toutes ces règles se trouvent observées dans les arrangements proposés ci-dessus (§ 13 suiv.). Elles découlent en grande partie les unes des autres, et à cet égard elles peuvent être réduites à un moindre nombre, si on veut se borner à celles qui déjà par elles-mêmes suffisent pour déterminer l'arrangement absolu au point que tout autre arrangement en soit exclu. Mais j'ai préféré de les rapporter indifféremment. Il aurait même été facile d'y en joindre encore plusieurs autres, quoique moins en forme de règles qu'en forme de théorèmes aboutissant à faire voir tout ce qu'il y a de général dans les variétés et les ressemblances qu'on trouve dans l'arrangement absolu. J'ai déjà fait voir (§ 15) comment cet arrangement peut successivement devenir plus composé par des substitutions très simples et suivant une loi très générale. J'ai fait voir encore (§ 16) comment en ôtant simplement les objets de la moindre classe, cet arrangement se simplifie par degrés. Voici maintenant encore une autre manière de le former et de le rendre de plus en plus composé, en commençant par le centre du flanc. Soient les côtés gauches du 2, 3, 4^e arrangement

Qu'il s'agisse d'en former le côté gauche du 5^e arrangement qui les suit immédiatement. Comme cet arrangement a une espèce δ de plus,

je commence à mettre $\mathcal{Q}$ dans le centre du flanc et je l'entoure du flanc du second arrangement, comme suit

$$\bigcirc \mathcal{Q} \bigcirc$$

J'entoure ces trois objets du flanc du troisième arrangement, ce qui donne

$$\bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \mathcal{Q} \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc$$

J'entoure ces 9 objets du flanc du quatrième arrangement, ce qui donne

$$\bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \star \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \mathcal{Q} \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \mathcal{Q} \star \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc$$

ce qui est le flanc du cinquième arrangement, qu'il s'agissait de former.

§ 26. On pouvait, au lieu de commencer par le centre $\mathcal{Q}$ commencer par les extrémités, en mettant d'abord le flanc du quatrième arrangement, ensuite celui du troisième, après cela celui du second et enfin le centre $\mathcal{Q}$.

[368] § 27. Le même arrangement pouvait encore se faire par subdivision et suivant l'ordre des espèces. Voici comment.

$$\overbrace{\bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \star \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc} \overbrace{\bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \mathcal{Q} \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc} \overbrace{\bigcirc \triangle \bigcirc \bigcirc \star \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc}$$

On commence par l'objet de la seconde espèce, qui doit occuper le centre du flanc $\mathcal{Q}$. Ensuite on place les deux objets de la troisième espèce $\star$ au centre du premier et du troisième tiers du flanc. Chaque tiers se subdivise encore en trois parties, qui sont des neuvièmes parties de tout le flanc. Trois centres de ces neuvièmes étant déjà occupés par $\star \mathcal{Q} \star$ il en reste six où l'on placera les objets de la quatrième espèce ou dignité $\triangle$. Ces neuvièmes parties sont encore subdivisées en 27^{es} et les centres de ces 27^{es} parties, qui ne sont pas déjà occupés par les $\triangle \star \triangle \triangle \mathcal{Q} \triangle \triangle \star \triangle$, seront occupés par les objets de la cinquième espèce $\bigcirc$, et par là le flanc du cinquième arrangement se trouvera tout formé. S'il s'agissait de passer au sixième arrangement, on subdiviserait les 27^{es} parties en 81^{es} et les centres de ces 81^{es} parties, qui resteraient encore vides, seraient occupés par les objets de la sixième espèce, et ainsi de suite. Cette manière de former ces arrangements est la même que celle dont nous apercevons l'ordre qui y règne, comme du premier coup d'œil, surtout lorsque les objets des différentes espèces diffèrent de telle sorte qu'ils attirent d'autant plus nos regards qu'ils sont moins nombreux.