Quelle réalité physique l'élaboration théorique mathématique permet-elle de discerner ?

À partir de l'article de Hadamard : « Comment je n'ai pas découvert la
relativité »

Jean-Jacques Szczeciniarz

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/cpuc/1362>

DOI : 10.4000/cpuc.1362

ISSN : 2677-6529

Éditeur

Presses universitaires de Caen

Édition imprimée

Date de publication : 15 décembre 2008

Pagination : 193-223

ISBN : 978-2-84133-332-5

ISSN : 1282-6545

Référence électronique

Jean-Jacques Szczeciniarz, « Quelle réalité physique l'élaboration théorique mathématique permet-elle de discerner ? », *Cahiers de philosophie de l'université de Caen* [En ligne], 45 | 2008, mis en ligne le 04 septembre 2020, consulté le 02 février 2023. URL : <http://journals.openedition.org/cpuc/1362> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/cpuc.1362>

Creative Commons - Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 4.0 International - CC BY-NC 4.0
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

QUELLE RÉALITÉ PHYSIQUE L'ÉLABORATION THÉORIQUE MATHÉMATIQUE PERMET-ELLE DE DISCERNER ?

À partir de l'article de Hadamard :
« Comment je n'ai pas découvert la relativité »

J'étais satisfait, j'avais trouvé quelqu'un qui, comme nous tous, n'avait pas inventé la relativité. Nous avons tous des excuses puisque le grand mathématicien Jacques Hadamard, auteur de l'une des grandes œuvres du XX^e siècle, non seulement n'a pas inventé la relativité mais en donne en outre les raisons. Dans cet article au titre attrayant, « Comment je n'ai pas découvert la relativité », du Colloque de philosophie de Naples de 1924, Hadamard explique pourquoi et surtout comment il n'a pas inventé la relativité ; ce qui veut dire qu'il aurait pu le faire. Outre le fait qu'intervient ici un concept d'un certain type de contingence de l'histoire réelle des sciences, Hadamard se place dans l'après-coup de cette invention pour en concevoir les mécanismes qui reposent bien sûr sur la signification de la théorie elle-même. Mon propos se divise en quatre grandes parties : la première suit le raisonnement de Hadamard, la seconde pose la question du domaine de réalisation (intégration) des équations différentielles dont traite la physique mathématique, la troisième traite, à partir de ce constat, de la question de la réalité des objets de la théorie physique et de leur rapport aux objets mathématiques relativement au problème du temps, enfin la quatrième fait un point épistémologique.

Introduction

Dans cet article, un modèle du genre, Hadamard commence par reprendre à son compte les idées courantes concernant les relations entre mathématiques et physique :

La première, à savoir l'Analyse, est l'obligée de la seconde, à savoir la Physique Mathématique, qui apporte bien plus et qui fait précisément de la première son obligée¹.

Mais la situation respective des deux sciences n'est plus la même pour la théorie de la relativité. Hadamard mentionne les noms de Poincaré, de Minkowski, de Ricci et de Levi-Civita, et reconnaît que grâce à eux l'instrument préparé par Gauss et par Riemann est devenu ce splendide algorithme du calcul différentiel absolu qui semblait avoir anticipé la venue de la relativité. Cette considération dans l'après-coup est tout à fait justifiée : on peut montrer comment les auteurs précités ont construit dans la géométrie la physique conceptuelle advenue par la suite. L'histoire de la géométrie différentielle aboutit en effet à la construction des mathématiques de la théorie de la relativité, et le calcul tensoriel est la forme même qu'a revêtue la relativité. Il y a à cela des raisons conceptuelles sur lesquelles je reviens ici sans toutefois les développer pleinement. Les concepts mathématiques requis se trouvaient là à point nommé. Il est remarquable que ce thème de la Providence traverse toute l'histoire des sciences et de la philosophie. Ici, c'est le concept de tenseur qui se trouve là à point nommé et qui assure les progrès au sens où, sans lui, la théorie de la relativité aurait attendu longtemps pour émerger. On peut s'interroger sur cette rencontre de fait. De Gauss à Riemann, de la surface à la variété en passant par l'élaboration du concept de courbure, il y a en effet plutôt une sorte de « physicalisation » originaire de la géométrie et donc cette progressivité incessante de la géométrie est aussi déjà celle de la physique. Le concept le plus marquant de ce point de vue est bien celui de courbure. Inversement, à mesure qu'elle se développe, la géométrie est elle aussi, d'un autre côté, le lieu de réalisation de la physique qui est toujours à la limite du mathématique, comme il est facile de le montrer dans le cas du calcul différentiel.

Comment se fait précisément la rencontre entre géométrie et physique ? Pour la théorie de la relativité, la virtualité du calcul tensoriel et du calcul différentiel est celle d'une conceptualisation : la compréhension des concepts physiques se fait à travers leur élaboration mathématique, leur contenu de signification physique est conceptualisé dans le mathématique. Je reprendrai ici rapidement le cas du tenseur, de façon exagérément modernisée. L'expression

1. Hadamard 1924, p. 441.

mathématique complète de la courbure de l'espace-temps à quatre dimensions (qui doit rendre compte des effets de marée subis par les particules se déplaçant dans n'importe quelle direction et situées en n'importe quel point) fait intervenir le tenseur de Riemann. Ce tenseur, noté R_{ijkl} est un objet mathématique dont la spécification fait appel à la donnée de vingt nombres, ses composantes, lesquelles sont liées à la courbure de l'espace-temps dans les diverses directions. Plus précisément, on décompose le tenseur de Riemann en deux parties, appelées tenseur de Weyl et tenseur de Ricci, comportant chacune dix composantes. Le tenseur de Weyl mesure la distorsion liée à l'effet de marée de la sphère de particules en chute libre considérée (c'est une modification de forme) et le tenseur de Ricci mesure un changement initial de volume. Dans la théorie de la gravitation de Newton, la masse entourée par la sphère en chute libre est proportionnelle à la réduction initiale du volume. En gros, la densité de masse (ou la densité d'énergie) doit être identifiée au tenseur de Ricci, lequel rassemble, si nous simplifions les choses, toute l'information concernant l'énergie, la pression et l'impulsion de la matière et des champs électromagnétiques². Ce sont les affirmations essentielles des équations du champ d'Einstein. D'où le problème posé par Hadamard :

Si Ricci et Levi-Civita ont sauvé l'honneur des mathématiciens dans leur ensemble, celui des autres mathématiciens n'en est que plus compromis. Et ils ne sont que plus portés à faire sur eux-mêmes un retour plus ou moins pénible. [...]

Quel titre pourrais-je avoir à prendre la parole devant vous ? Moi dont l'actif se réduit à avoir parlé un jour au Collège de France, lorsque nous y avons reçu Einstein, d'une catastrophe qui pourrait se produire le jour où tel ou tel astre se permettrait de grossir au-delà des limites normales : c'était une catastrophe purement logique d'ailleurs³...

Il y aurait donc des mathématiciens qui contribuent au développement de la physique mathématique, et d'autres qui n'y contribuent pas, parmi lesquels Hadamard se rangerait, du moins pour la théorie de la Relativité. C'est pourquoi il se propose d'expliquer négativement ce qui constitue le lien entre mathématiques et physique.

2. Je reprends les formulations de Penrose 1992.

3. Hadamard 1924, p. 441.

Il ne me reste donc qu'une ressource que je vais employer si vous le permettez et qui est de vous dire comment je n'ai pas découvert la relativité⁴.

En l'occurrence, il s'agirait de développer un concept d'échec instructif au regard d'une situation déterminée, ce qui veut dire expliquer comment une forme de mathématisation et un certain type de conceptualisation mathématique impliquent la méconnaissance et le refus de la théorie de la relativité. Cette conceptualisation met directement en question la relation de la géométrie différentielle et de ses techniques d'une part et les concepts physiques de la théorie de la relativité d'autre part, en particulier le concept de temps.

Sur l'histoire des équations différentielles : quelques problèmes de méthode et de domaine

Hadamard reconstitue une partie de son travail sur les équations différentielles (EDP) et son insertion dans l'histoire générale de cette branche des mathématiques. Les équations aux dérivées partielles sont les équations les plus répandues de la physique mathématique, de sorte que la théorie générale de ces équations « constitue comme le premier domaine abstrait où retrouver le jeu pur des relations que soutiennent entre eux les différents aspects du temps physique »⁵.

Hadamard est resté célèbre pour avoir formulé de plain-pied ce que doit être ce qu'il appelle un « problème bien posé ». Un problème est bien posé au sens de Hadamard s'il satisfait aux trois conditions suivantes :

- 1) la solution existe ;
- 2) la solution est unique ;
- 3) la solution dépend continûment des données.

La première condition exprime la consistance du problème mathématique, la seconde le fait que la situation réelle est bien définie, la troisième correspond à l'intuition de l'observateur que de petites erreurs sur les conditions initiales ou sur les termes sources n'entraînent que de petites variations dans la solution. Nous avons là les principes de base qui régissent la formulation des problèmes de physique mathématique. Dans ce cadre, Hadamard réfléchit sur le problème aux limites bien posé⁶, dont l'histoire importante traverse

4. Hadamard 1924, p. 442.

5. Lautman 2007, p. 288.

6. Maz'ya et Shaposhnikova 2005, p. 397 *sq.*

tout le XIX^e siècle et qui est à la base de la problématique de la constitution de la physique mathématique. Je note dès maintenant que cette histoire se déroule en développant deux concepts de temps qui vont apparaître dans le champ des équations différentielles aux dérivées partielles.

À la différence des équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles contiennent des dérivées d'une fonction inconnue de plusieurs variables. Elles décrivent des processus de la physique mathématique incluant l'électromagnétisme, l'élasticité, la conduction de la chaleur, l'hydrodynamique, la gravitation et beaucoup d'autres domaines⁷ ; et c'est dans le cadre de tels développements que, selon Hadamard, s'inscrirait une conception possible de la mise en place de la Relativité restreinte (RR). Cette théorie, ou plutôt le cadre dans lequel elle se situe, serait donc déjà à l'œuvre dans la physique mathématique du XIX^e siècle, notamment, pour avancer un peu dans les concepts mis en forme, dans la théorie des équations aux dérivées partielles portant sur les ondes planes sphériques puis hyperboliques, et plus particulièrement dans la conception géométrique des solutions de ces équations. Mais dans la constitution même de l'analyse de telles solutions, la relativité comme théorie à l'œuvre aurait fait l'objet, quasiment en un sens freudien, d'une sorte de dénégation. Plus elle était là, moins on la voyait ; plus elle est là, moins on la veut donc.

Partons de l'équation des ondes sphériques. Cette équation régit aussi bien l'acoustique, que l'optique et l'électromagnétisme dans les milieux diélectriques isotropes, ou encore comme on l'a dit l'hydrodynamique. Les difficultés du traitement de telles équations tiennent au fait que les solutions générales dépendent de fonctions arbitraires et non de constantes comme dans le cas des équations différentielles ordinaires. Pour trouver une solution unique, on doit ajouter certaines conditions à la frontière du domaine dans lequel on considère l'équation. Pour l'équation des ondes, il est possible de préciser les conditions initiales,

$$u \Big|_{t=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

c'est alors un problème dit « de Cauchy ». Poisson détermine les petits mouvements d'un milieu obéissant à cette équation, connaissant l'état initial relatif à $t = 0$, *i.e.* les écarts initiaux et les vitesses

7. Lützen 1994, p. 452-469.

initiales de toutes les molécules à cet instant. Une onde sphérique est une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

qui ne dépend que de r et t , et où Δu est le laplacien, i.e.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

et $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. On montre que

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

si φ est une fonction de x, y, z qui ne dépend que de r . Une onde sphérique est donc solution d'une équation de la forme

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

que Hadamard commente dans les termes suivants :

Analytiquement, cela signifie que l'on se donne pour $t = 0$, la valeur de u et celle de du/dt en chaque point de l'espace, lesquelles sont ainsi des fonctions données f et g de x, y, z , ce que nous appelons aujourd'hui le problème de Cauchy relatif à l'équation donnée en $t = 0$ et à la multiplicité ou hypersurface⁸.

La méthode de résolution n'est pas extensible à des cas moins « spéciaux ». Kirchhoff doit étudier de tels cas, lorsqu'il se met à l'étude analytique du principe de Huygens. Pour donner un aperçu de ce principe, on peut reprendre les explications simplifiées suivantes⁹. Une perturbation produite par une source lumineuse placée au point O à l'instant $t = 0$, propage une onde sphérique à vitesse constante. Chaque point de passage de la lumière devient à son tour une source de lumière et produit une onde sphérique. L'effet global à l'instant $t = t_0$ est l'enveloppe des ondes sphériques secondaires se produisant à $t = t'$ pour chaque t' tel que $0 \leq t' \leq t_0$. Le principe de Huygens se présente comme construction du front d'onde. L'équation aux dérivées partielles reste la même que précédemment

8. Hadamard 1924, p. 443.

9. Maz'ya et Shaposhnikova 2005, p. 428.

dans cette nouvelle question mais les données accessoires, ce qu'on appelle les conditions définies ont changé.

La portion R de l'espace à 4 dimensions à l'intérieur de laquelle on étudie la solution n'est plus définie par l'unique hyperplan $t = 0$; sa frontière n'emprunte à l'hyperplan en question que certaines de ses parties que nous [*c'est Hadamard qui parle*] appellerons S , le reste Σ étant fourni par des hypercylindres parallèles à la direction t , c'est-à-dire pour revenir au langage de la géométrie ordinaire, par des surfaces σ (au sens ordinaire du mot), surfaces fermées et dont chaque point est considéré non plus seulement pour $t = 0$ mais pour toutes les valeurs positives de t ¹⁰.

Dans tous ces cas (il faut ajouter les travaux de Coulon et d'Adhémar auxquels se réfère Hadamard), on utilise une variante de la formule de Green. Et on parvient à contourner l'apparition d'intégrales divergentes.

En chaque point de cette frontière, qu'il s'agisse d'un point de S ou de Σ , Kirchhoff se donne encore la valeur de u et celle de l'une de ses dérivées premières : savoir du/dt s'il s'agit d'un point de S et du/dn (n désignant la normale à la surface σ) s'il s'agit d'un point de Σ . Ce sont les données de Cauchy. Dans cette nouvelle situation, il faut une nouvelle méthode de recherche, une méthode analytique et non plus une formule synthétique qu'il aurait été tout à fait incapable d'inventer de but en blanc¹¹.

Rappelons une dernière fois que les problèmes qui consistent à trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles satisfaisant certaines conditions initiales sont appelés « problème de Cauchy »¹². Green, dès 1828, étudiant un problème d'électrostatique, considère le problème dit « premier problème aux limites » qui sera appelé par la suite « problème de Dirichlet », *i.e.* $\Delta u = 0$ dans Ω , $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$. Le « second problème aux limites » pour l'équation de Laplace correspond au cas où la dérivée par rapport à la normale de la fonction inconnue est imposée sur le bord :

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi \text{ sur } \partial\Omega$$

10. Hadamard 1924, p. 444.

11. *Ibid.*

12. Cf. Bottazzini, 1986.

$\nu = \nu_1, \dots, \nu_n$, est la normale unité à $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i$$

La formulation de ce second problème est essentiellement due à Kirchhoff¹³, lequel applique à l'équation à 4 variables proposée des méthodes aussi semblables que possible à celles qui ont réussi pour l'intégration de l'équation des potentiels. Rappelons en effet que les représentations des solutions pour le « problème de Cauchy » associé à l'équation des ondes et à l'équation de la chaleur sont l'œuvre de Poisson, lequel a également fourni la solution du « problème de Dirichlet » dans un disque et dans une boule. Green de son côté avait introduit une fonction particulière $g(P, Q)$ de deux points, portant son nom et lui permettant de donner la solution du « problème de Dirichlet », $\Delta u = f$ dans Ω , $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$ comme somme de deux intégrales. La fonction de Green pour l'opérateur de Laplace dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, est définie par

$$g(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log|P - Q| + h(P, Q) \text{ si } n = 2$$

$$g(P, Q) = \frac{1}{4\pi|P - Q|} + h(P, Q) \text{ si } n = 3$$

où h est une fonction harmonique en chaque variable P , Q , et $g = 0$ dès que P ou $Q \in \partial\Omega$.

Kirchhoff applique donc ces méthodes à l'étude des fonctions harmoniques pour résoudre le « second problème aux limites », comme nous l'avons dit. Reprenons le texte d'Hadamard,

1) À l'intégration triple classique de la formule de Green, il superpose une quadrature supplémentaire par rapport au temps.

2) De même en ce qui concerne l'intégrale double de surface.

Le choix des limites de ces différentes intégrations donne au calcul un aspect relativement compliqué lorsqu'on l'expose dans le langage de la Géométrie ordinaire. Mais dans le langage de la géométrie à 4 dimensions, on constate tout simplement que le domaine d'intégration quadruple de Kirchhoff est la portion R' de R qui est comprise à l'intérieur d'une nappe de l'hypercône

$$c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2$$

13. Maz'ya et Shaposhnikova 2005, p. 367.

x_0, y_0, z_0, t_0 désignent les coordonnées de l'espace-temps qu'on s'est données et où on calcule u ¹⁴.

Il faut insister, comme le fait Hadamard, sur la différence de situation. On travaille déjà dans un hypercône. S'il s'agissait du problème de Poisson, cette nappe d'hypercône, représentée en projection (x, y, t) par son contour apparent, devrait être prolongée jusqu'à son intersection (à savoir une sphère ordinaire de centre x_0, y_0, z_0 , et de rayon ct_0) avec la « multiplicité plane », $t = 0$, qui constituerait l'unique frontière. Dans le problème de Kirchhoff, elle pourra éventuellement, suivant la situation relative du sommet, être limitée, totalement ou partiellement, par ces derniers cylindres.

Un problème de domaine spécifique

Passons maintenant à une étape plus importante de l'analyse. Le domaine d'intégration ne coïncide plus avec le domaine donné, cela tient à ce que le 4^e terme figurant dans l'équation des ondes sphériques est négatif, de sorte que cette équation est de type hyperbolique, au lieu que l'équation des potentiels ordinaires est elliptique. Du Bois-Reymond est un des premiers mathématiciens à avoir en effet distingué systématiquement trois types d'équations aux dérivées partielles : le type elliptique dont l'exemple est l'équation de Laplace, le type parabolique dont l'exemple est l'équation de la chaleur, et enfin le type hyperbolique dont l'exemple est l'équation des ondes¹⁵. L'équation

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

où a, b, c sont des fonctions des variables x, y , est de type elliptique, hyperbolique ou parabolique au point (x, y) selon que respectivement :

$$b^2 - ac < 0, \quad \text{ou} \quad b^2 - ac > 0, \quad \text{ou} \quad b^2 - ac = 0.$$

14. Hadamard 1924, p. 445.

15. Maz'ya et Shaposhnikova 2005, p. 367-368.

Par un changement de variables¹⁶, on peut transformer l'équation d'un des trois types ci-dessus en l'une des trois formes canoniques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f(\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \quad (\text{elliptique}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f(\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \quad (\text{hyperbolique}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + f(\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \quad (\text{parabolique}).$$

Si nous sommes sur une métrique minkowskienne, la nouvelle équation est compatible avec une propagation par ondes. Hadamard donne alors l'explication suivante :

La nappe hypercônique représente le front d'une onde qu'il faudrait appeler rétrograde, c'est-à-dire suivie en remontant le cours du temps (conformément à la propriété de réversibilité des phénomènes ici considérés et au principe du retour inverse des rayons lumineux).

C'est le lieu des points de l'espace-temps tels qu'une onde (ordinaire) qui en serait issue passe par (x_0, y_0, z_0, t_0) (c'est-à-dire dans le langage classique que son front passe au point (x_0, y_0, z_0) à l'instant t_0), dans le langage auquel nous sommes habitués aujourd'hui, c'est le cône du passé par rapport au point A. On a donc un premier changement du domaine d'intégration¹⁷.

Le deuxième point est de savoir ce qu'il y a sous le signe somme.

Dans la théorie des fonctions harmoniques s'introduisent sous le signe somme l'inconnue U que l'on se propose d'étudier et le potentiel élémentaire $V = 1/r$ (ou une fonction de Green qui en dérive). Ce potentiel élémentaire est infini pour $r = 0$, r désignant la distance d'un point déterminé $A(x_0, y_0, z_0)$ au point arbitraire M par rapport aux coordonnées duquel on intègre. Le potentiel élémentaire est donc infini en ce point et en ce point seul, du moins dans le domaine réel (sans quoi il y aurait tout un lieu de points où il devient infini, à savoir le cône isotrope de sommet A).

Toute la question se pose dans le cadre de la stratégie d'intégration. On a un analogue de la quantité $1/r$ pour notre espace à quatre dimensions et pour l'équation des ondes sphériques. [...]

16. i.e. $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$.

17. Hadamard 1924, p. 445.

L'analogue de la quantité $1/r$ pour l'espace à quatre dimensions et pour l'équation des ondes sphériques est la quantité

$$\frac{1}{c^2}(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2$$

Elle devient infinie non seulement au point A mais sur toute la surface de l'hypercône qui a ce point pour sommet. C'est-à-dire sur tout le front de l'onde rétrograde ainsi que sur celui de l'onde ordinaire correspondante.

Comme il n'est pas possible d'introduire cette quantité dans la formule intégrale analogue à celle de Green, celle dont se sert Kirchhoff lui était fournie par les résultats antérieurs d'Euler, c'est $V = 1/r F(r+t)$ où F désigne une fonction arbitraire de la variable unique $(r+t)$.

Le dénominateur dans cette expression est le r qui figurait dans le potentiel élémentaire ordinaire. (celui qui est relatif à l'équation de Laplace $\Delta u = 0$), il est donc infini, au sens de la géométrie classique, en un point unique $A(x_0, y_0, z_0)$. Mais dans la conception de l'espace à quatre dimensions, de l'espace-temps, où nous avons à nous placer pour le moment tout le long d'une droite, à savoir la parallèle à l'axe des t menée de A , l'intégration de Kirchhoff fait connaître directement non point la valeur de l'inconnue U au point A , mais celle de l'intégrale

$$\int_0^{t_0} U(x_0, y_0, z_0, t) F(t) dt$$

prise suivant le segment de la droite L compris entre son pied sur la multiplicité $t = 0$ et le point A ¹⁸.

L'exposition de Hadamard présente des problèmes de domaines d'intégration et montre comment les singularités sont utilisées dans ce cas. Dans le cas de Kirchhoff, Hadamard reprend le passage à quatre dimensions qui nous fait passer d'un point singulier à toute une droite. Le résultat est ici simplifié par la présence dans V de la fonction F : il suffit de connaître ainsi chaque élément de cette intégrale et on écrit directement la valeur cherchée $U_A = U(x_0, y_0, z_0, t_0)$.

Telle est la marche suivie par Poisson d'une part, et Kirchhoff de l'autre dans l'étude de l'équation des ondes sphériques¹⁹.

18. *Ibid.*, p. 446-447.

19. *Ibid.*, p. 447.

La troisième étape de cette reconstitution porte sur l'équation des ondes cylindriques. L'exposé procède suivant le même ordre.

Poisson s'était déjà attaqué à l'équation des ondes cylindriques, la variable indépendante n'y intervient pas, l'inconnue est fonction des variables x, y, t ;

$$(E') \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

Le premier problème est celui de Cauchy relatif à $t = 0$. Il s'agit de la recherche d'une fonction U vérifiant l'équation E' et telle que pour $t = 0$, quels que soient x, y , on ait

$$U(x, y, 0) = g(x, y) \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, y, 0) = h(x, y)$$

Le problème fut résolu par la formule de Poisson et de Parseval. Un problème analogue à celui de E se posait pour cette équation E' si l'on veut également y discuter le principe de Huygens.

C'est à Volterra que l'on doit le développement ultérieur de la théorie. L'équation étant hyperbolique, on limite la région R par une nappe de cône qui a pour sommet le point A et qui représente encore une onde rétrograde compatible avec l'équation. On doit transformer l'intégrale. Pour la transformer en intégrale double de frontière, on écrit une certaine intégrale triple où figure la fonction inconnue U et on utilise aussi une quantité auxiliaire. L'analogue du potentiel élémentaire et de la quantité V est

$$V' = \frac{1}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}}$$

et c'est cette expression que l'on fait figurer sous le signe d'intégration. Mais on ne pouvait procéder ainsi, on était conduit à des intégrales dépourvues de sens²⁰.

Volterra grâce à « sa rare pénétration » a pu trouver « l'expression qui pouvait conduire au but », à savoir

$$V' = \log \frac{c(t_0 - t) + \sqrt{c^2(t_0 - t)^2 - r^2}}{r}$$

20. Hadamard 1924, p. 447-448.

à propos de laquelle Hadamard fait le commentaire suivant :

Cette quantité appelle des observations analogues à celles sur la quantité V de Kirchhoff. Elle est comme la surface du cône singulière au point A mais aussi tout le long de la ligne L menée par ce point parallèlement à l'axe des t .

La formule obtenue fait connaître en fonction des données l'intégrale

$$\int_0^{t_0} U(x_0, y_0, t) dt$$

prise, comme dans le cas de Kirchhoff, le long du segment de la ligne L compris entre le point A et le plan $t = 0$. La seule différence est que cette intégrale ne contient aucune fonction arbitraire pour en déduire la valeur U_A , il faudra en prendre la dérivée par rapport à la coordonnée t du point A , ce qui est différent du cas de Kirchhoff.

On sait que l'entreprise générale de Hadamard a été « d'étendre les résultats de Volterra aux équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients variables, en d'autres termes à la propagation des ondes dans les milieux continus »²¹.

Une autre équation des ondes aux dérivées partielles de la même famille, celles des *ondes sphériques amorties* a été intégrée, grâce aux travaux de Weber, Carvallo, Birkeland Brillouin. À cette dernière peut se ramener toute EDP linéaire (du type considéré) à coefficients constants.

L'équation des ondes cylindriques amorties offrait des difficultés particulières. Les chercheurs qui s'en étaient occupés n'avaient pas réussi à former une quantité analogue à V et à V^n ²².

Hadamard, « frappé de la beauté des résultats de M. Volterra », s'est donc proposé d'étendre les résultats de Volterra aux équations aux dérivées partielles, comme on l'a vu plus haut. Il dit ne pas avoir donné « un sens véritablement physique à l'extension de la méthode des équations aux dérivées partielles au cas des coefficients quelconques »²³, car cette théorie lui semblait seulement n'avoir pas atteint sa forme véritable, ainsi qu'il le précise dans la suite du texte :

21. Hadamard 1935, p. 129-130 dans *Œuvres* 2, p. 993-994.

22. Hadamard 1924, p. 449.

23. *Ibid.*

La situation théorique pour Kirchhoff avait été favorable. Il avait pu aller plus loin que le cas où la frontière est $t = 0$. Il a supposé le problème résolu et a trouvé les bonnes formules qui étaient disponibles pour les introduire dans l'intégrale. La situation était différente pour Volterra. Il a réussi à trouver la formule V' particulièrement astucieuse²⁴.

Aux yeux de Hadamard, la sagacité de Volterra rendait toutefois l'extension aux cas voisins d'autant plus difficile. Le mathématicien français ajoute en effet :

Dans le cas où nous n'avons besoin que des quantités V et V' analogues au potentiel élémentaire $1/r$, Les quantités V et V' ont été indiquées par MM. Picard, Hilbert, Sommerfeld, Fredholm, Holmgren²⁵.

Un article de Hadamard sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations aux dérivées partielles était paru dans les *Annales de l'École Normale Supérieure* ; et un procédé de construction de solutions particulières y est donné pour les équations de la forme

$$\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^m B_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i} + C(y)u = 0$$

où les coefficients sont des fonctions analytiques de $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Picard a présenté une méthode de calcul des solutions fondamentales, celles qui présentent des singularités logarithmiques, pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + C(y)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

L'algorithme de Picard conduit à la représentation de la solution sous la forme d'une série convergente, plus tard Sommerfeld, Hilbert et Hadamard résoudront le même problème pour l'équation générale à coefficients analytiques pour $m = 2$. Des résultats pour le cas multidimensionnel ont été obtenus par Fredholm et Holmgren.

Mais retournons à l'argumentation de Hadamard dans l'article en question.

Dans ce cas [i.e. dans le cas où nous n'avons besoin que des quantités analogues au potentiel $1/r$] les solutions V et V' sont liées à l'équation elle-même. La surface singulière est imposée par la

24. Hadamard 1924, p. 450.

25. *Ibid.*, p. 450-451.

forme même de l'équation, la quantité $1/r$ devient infinie le long d'un cône isotrope. Il en est de même en ce qui concerne les solutions élémentaires V et V' des équations des ondes sphériques et cylindriques ; le lieu des points où l'une ou l'autre de ces deux quantités devient infinie n'est autre que la surface conique représentative de l'onde rétrograde issue du point A [...] ²⁶.

Hadamard décrit alors la perception qu'il a de la nature de la solution :

Pour les quantités V et V' de Kirchhoff et Volterra la situation est très différente. Les quantités deviennent singulières non seulement le long de l'onde rétrograde mais aussi le long d'une droite obtenue en laissant x, y, z constants (Kirchhoff) ou x et y constants (Volterra). Comme il est toujours possible de trouver un changement de variable qui ne conserve pas à la droite de Kirchhoff sa situation privilégiée, mais peut l'amener à coïncider avec n'importe quelle autre droite issue du même point A ²⁷.

Mais ce changement de variable n'a pour Hadamard qu'une signification mathématique et *il reconnaît avoir attribué à tort à la droite de Kirchhoff une signification physique intangible*.

Sur la signification fictive de la physique en mathématique et sur la signification propre de la physique

Dans la question des domaines de singularités examinée précédemment, le lieu des points où les solutions élémentaires de l'équation des ondes sphériques ou cylindriques deviennent infinies est une surface parfaitement déterminée, la surface conique représentative de l'onde rétrograde issue du point A , qui est définie pour chaque position de ce point dès que l'on a l'équation et qui par suite est liée au phénomène physique auquel on a affaire. Nous avons ainsi une sorte d'adéquation de la forme mathématique de l'équation et de sa signification physique. Ce lien apparent et explicite entre l'équation même et la physique qu'elle contrôle est précisément ce que Hadamard ne voit plus dans le cas des quantités V et V' (Kirchhoff, Volterra). On obtient une singularité supplémentaire, le long d'une droite en laissant x, y, z constants et en faisant varier t . Il est toujours possible, et Hadamard le sait comme n'importe quel

26. *Ibid.*, p. 451.

27. *Ibid.*

mathématicien, de faire un changement de variable linéaire conservant à l'équation sa forme.

Et il était bien visible que de tels changements de variables ne conservaient pas à la droite de Kirchhoff sa situation privilégiée, mais bien au contraire pouvait l'amener à coïncider avec n'importe quelle autre droite issue du même point A et intérieure au cône d'onde²⁸.

Puisqu'il s'agit d'un changement de variable (mathématique), il ne saurait avoir de portée physique. Tel est le ressort psychologique que décèle rétrospectivement Hadamard.

Mais de là à penser que cette droite de Kirchhoff n'avait pas une signification physique nécessaire et intangible, c'était trop d'audace pour moi²⁹.

On peut néanmoins essayer de donner à la reconstitution de Hadamard une signification qui aille au-delà de la psychologie, en mettant en œuvre une distinction proposée par Lautman : celle du temps comme variable et du temps comme paramètre, sans toutefois imputer à Hadamard l'idée que « le temps physique sous toutes ses formes n'est que la réalisation sensible d'une structure qui se manifeste déjà dans le domaine intelligible des mathématiques »³⁰, car il ne partageait certainement pas cette forme de platonisme. Cette vision des mathématiques, poussée un peu plus en détail, serait cependant en parfait accord avec la possibilité pour un changement de variable de produire des effets sur la conception physique de l'équation sur laquelle il opère.

Rappelons que la distinction fondamentale entre les deux concepts de temps procède selon Lautman des propriétés du temps physique que présupposent les théories physiques.

Les propriétés sensibles du temps qui constituent comme les faits expérimentaux dont toute théorie physique doit rendre compte, peuvent être exprimées par les propositions suivantes :

1. Le temps s'écoule toujours dans le même sens. Cette propriété établit une dissymétrie entre le temps orienté du passé vers l'avenir, et l'espace qui ne connaît ni direction, ni sens privilégiés.
2. Les objets matériels persistent au cours du temps. Cette propriété rattache l'existence des objets matériels à l'écoulement et à l'orientation du temps. Un objet matériel peut être en effet indépen-

28. Hadamard 1924, p. 452.

29. *Ibid.*

30. Lautman 2007, « Le problème du temps », p. 287.

dant d'autres objets matériels qui existent simultanément ailleurs, mais son existence à un moment déterminé est indissolublement liée à son propre passé et à son propre avenir. La continuité du temps est ainsi un élément essentiel de la permanence des objets.

3. Les grandeurs, autres que le temps, qui caractérisent les systèmes physiques varient en fonction du temps.

Les deux premières propriétés sont distinctes en ce sens que l'une concerne l'irréversibilité de ce que l'on pourrait appeler le temps pur, et l'autre, l'étalement dans le temps selon cet ordre irréversible de l'avant et de l'après, des objets physiques de l'univers mais elles n'en sont pas moins étroitement solidaires. Jointes ensemble, elles font du temps une direction orientée, associée nécessairement aux directions d'espace pour le repérage des phénomènes physiques. Cette direction du temps n'en possède pas moins par rapport à l'espace une dissymétrie spéciale qui lui vient précisément de son orientation du passé vers l'avenir. La troisième propriété, au contraire, ne concerne pas le sens du temps ; elle ne concerne même qu'indirectement le temps puisqu'elle est relative aux changements que subissent les autres grandeurs physiques de l'univers. Il se trouve que c'est par rapport au temps que le physicien étudie les changements de positions, de vitesse, de température, de densité, d'énergie, etc., au sein d'un système physique quelconque, mais ces changements n'obéissent en eux-mêmes à aucune exigence d'irréversibilité. [...] Le temps qui intervient dans l'énoncé des lois de la nature, en cinématique, en dynamique, etc. n'est donc pas le temps irréversible de la durée des choses ; le rôle qu'il y joue est simplement celui d'un facteur d'évolution et il serait parfaitement possible d'étudier l'évolution des phénomènes physiques en fonction d'une autre grandeur prise comme variable indépendante. Il résulte de ces considérations que nous pouvons distinguer nettement deux sortes de propriétés sensibles du temps, celles qui, se rattachant aux notions de *dimensions* et d'*orientation* sont des propriétés *géométriques* du temps, et celles qui, se rattachant à la notion d'*évolution*, déterminent en particulier les propriétés *dynamiques* des corps³¹.

Si nous disposons de la possibilité de déduire *a priori* les lois de la mécanique où le temps intervient comme paramètre d'évolution, nous pouvons aussi, comme le prétend Lautman, mettre en évidence, au sein même précisément de la théorie des équations aux dérivées partielles, « la genèse d'une conception dimensionnelle du temps physique distincte en son principe de la conception paramétrique servant à résoudre les mêmes problèmes »³². Retenons

31. *Ibid.*, p. 277.

32. *Ibid.*, p. 287.

l'élément essentiel de la démonstration que propose Lautman à partir de l'ouvrage de Courant-Hilbert³³, à savoir que, si, dans l'espace à $n + 1$ dimensions, l'on envisage l'équation aux dérivées partielles $F(x_1, \dots, x_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1})$ qui ne contient pas la fonction $u(x_1, \dots, x_{n+1})$ cherchée, le fait de résoudre l'équation proposée par rapport à une dérivée partielle concernant l'une de ces variables fait jouer à cette variable le rôle de variable temporelle.

Il y a dans ce cas équivalence absolue entre le rôle de paramètre et le rôle de coordonnée dimensionnelle d'une même variable distinguée, mais il n'en subsiste pas moins le fait que la théorie purement mathématique des équations aux dérivées partielles permet ainsi la naissance de deux conceptions différentes d'une même variable qui sont à l'origine de la dualité des propriétés sensibles du temps³⁴.

Et Lautman de noter que

si [la conception de Hamilton et de Jacobi] est à la base de la théorie classique des équations canoniques d'Hamilton [...], elle est également le point de départ de la mécanique ondulatoire où la dérivation par rapport au temps [...] a un sens opératoire bien distinct du sens paramétrique du temps³⁵.

Cette distinction du temps paramètre et du temps coordonnée intervient dans une « synthèse spatio-temporelle affectée de cette dissymétrie spéciale par rapport à l'espace qui se manifeste par une différence de signe »³⁶. Il suffit de reprendre un instant le cas simple de l'équation hyperbolique.

$$\sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_l u_l + cu + d = 0$$

$$u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}; \quad u_l = \frac{\partial u}{\partial x_l}$$

On sait associer à toute équation de ce genre, une forme quadratique

$$\sum a_i X_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad a_i = \pm 1$$

Comme nous l'avons vu plus haut, la forme associée aux équations qui décrivent une propagation hyperbolique comporte $n - 1$ carrés positifs et un carré négatif. À chaque équation aux dérivées partielles, on associe une surface intégrale engendrée par des courbes

33. Courant et Hilbert, 1931.

34. Lautman 2007, p. 291.

35. *Ibid.*

36. *Ibid.*, p. 292.

caractéristiques, de sorte qu'étant donné une courbe caractéristique définie par des équations différentielles, cette courbe peut être assujettie à la condition supplémentaire d'être située sur une surface intégrale. Une surface intégrale de l'équation ci-dessus est engendrée par des variétés caractéristiques qui satisfont à l'équation

$$\sum \alpha_i \varphi_i \varphi_k = 0$$

Ces variétés caractéristiques sont à leur tour engendrées par des rayons caractéristiques donnés dans l'espace à n dimensions par les équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \varphi_k$$

On peut distinguer une variable x_n et résoudre l'équation par rapport à x_n . On identifie alors la variable dimensionnelle avec le paramètre d'évolution, tout en distinguant nettement les deux aspects du temps. Considérons l'équation d'onde

$$u_{44} - u_{11} - u_{22} - u_{33} = 0$$

Dans l'espace-temps à quatre dimensions, on définit la distance de deux points par la forme suivante

$$ds^2 = dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

Les droites de longueur nulle ($ds = 0$) issues d'un point quelconque définissent le cône caractéristique attaché à ce point et toute direction située à l'intérieur du cône satisfait à l'inégalité $ds^2 > 0$. Pour l'axe des temps x_4 que définissent les relations $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$, on a bien $dx_4^2 > 0$; ce qui montre le caractère « orienté » de la variable x_4 .

Dans la suite de son travail, Lautman renforce la distinction qu'il a proposée entre « temps dimension » et « temps paramètre ».

Le sens géométrique des équations aux dérivées partielles que nous avons envisagées était en effet le suivant : l'équation définit en chaque point d'un espace, un cône caractéristique de ce point et l'intégration de l'équation consiste à trouver des courbes et des surfaces tangentes en chaque point au cône caractéristique de ce point. La distinction du temps dimension et du temps paramètre se rattache dans une certaine mesure à la dualité suivante : le sens d'ouverture du cône caractéristique assigne en chaque point de l'espace un rôle privilégié à une direction qu'on peut considérer comme une direction temporelle, et d'autre part les courbes et les surfaces tangentes à ce champ de cônes sont fonction d'un paramètre que l'on peut

considérer également mais en un autre sens, comme une variable temporelle³⁷.

Les conclusions auxquelles Lautman parvient et qui se fondent sur une analyse de résultats d'Ehresmann³⁸ sont donc les suivantes. Il existe une distinction entre le temps repère qui est une dimension associée de façon dissymétrique à l'espace dans une synthèse quadridimensionnelle et un temps facteur d'évolution qui est un paramètre. Il est amené par l'étude de ces deux aspects mathématiques du temps dans la théorie des équations aux dérivées partielles à distinguer deux genres d'êtres mathématiques : les champs de vecteurs et les courbes solutions. C'est à partir de ces êtres qu'il élabore ses deux concepts de temps.

La théorie des champs de vecteurs montre une liaison nécessaire entre l'existence d'une direction privilégiée en chaque point d'un univers géométrique et le défaut d'une forme quadratique, la différence de signe entre termes d'espace et termes de temps. La même théorie montre de plus que la distinction en chaque point d'une direction privilégiée n'est possible que si l'univers tout entier satisfait à certaines conditions globales³⁹.

L'autre aspect du temps, celui auquel mène l'étude de courbes intégrales définies en fonction d'un paramètre, entraîne des réflexions en termes de problèmes plus explicitement et classiquement philosophiques :

L'évolution d'une grandeur en fonction du temps peut être décrite par une équation différentielle ou aux dérivées partielles telle que la connaissance de données initiales, à un temps t_0 , détermine l'évolution ultérieure de la grandeur en question. C'est là un déterminisme local opérant de proche en proche, comme dans la propagation de la lumière par exemple⁴⁰.

En approfondissant cette analyse du temps nous voyons à quel point la remarque de Hadamard sur le lien dialectique entre réalité mathématique et signification physique méritait d'être réélaborée. Je vais essayer pour finir d'en donner une autre version.

37. Lautman 2007, p. 294.

38. Ehresmann 1943.

39. Lautman 2007, p. 298.

40. *Ibid.*

Réflexions ontologiques

La question posée par les affirmations de Hadamard est celle du rapport entre physique et mathématiques, et, plus précisément dans le cas de la relativité, celle du statut du temps et plus largement de l'espace-temps. Je voudrais reprendre cette question dans un cadre plus récent en montrant, à partir des analyses de M. Friedman, comment se sont opposées les positions absolutistes et relationnistes.

Toutes nos théories de l'espace-temps affirment l'existence d'une « coordination » de la variété espace-temps [*coordinatization of space-time*] par $\mathbf{R}^4$, à savoir une application $\phi : A \rightarrow \mathbf{R}^4$ où A est un ouvert de la variété espace-temps. Pourtant les théories diffèrent sur le point de savoir quels sont les aspects de la structure mathématique de $\mathbf{R}^4$ – *i.e.* quelles fonctions, propriétés et relations définies sur $\mathbf{R}^4$ – qui représentent des structures physiquement réelles sur la variété espace-temps. Les théories physiques posent en effet une structure :

$$A = \langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$$

dont certains traits ou éléments doivent être pris au sens littéral, c'est-à-dire dont on estime qu'ils présentent une réalité physique, tandis que d'autres éléments de cette même structure mathématique ne sont pas à considérer littéralement. Dans cette dernière catégorie, on trouve des choses aussi diverses que, par exemple, des choix de coordonnées, des unités, etc.

Plus précisément, la structure théorique de l'explication en physique suit le schéma général suivant⁴¹ : une théorie physique postule une structure théorique $A = \langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$ avec des propriétés mathématiques intéressantes et l'explication consiste à interpréter une structure observationnelle $B = \langle B, R'_1, \dots, R'_m \rangle$ ($m < n$) comme une sous-structure de A , de sorte que la structure postulée A fonctionne comme une véritable *explication* ou une *réduction* des propriétés de B , car les éléments de cette dernière sont identifiés avec la première,

$$B \subseteq A \text{ et } R'_i = R_i|_B$$

41. Friedman 1983, p. 236.

Mais nous pouvons aussi, précise Friedman, interpréter notre usage de la structure théorique A comme une pure représentation des propriétés de B . Au lieu d'affirmer que B est un sous-modèle de A , nous pouvons considérer que B est seulement plongeable dans A , c'est-à-dire qu'il existe une application injective

$$\phi : B \rightarrow A \text{ telle que } \phi(R'_i) = R_i \Big|_{\phi(B)} (i \leq m)$$

Selon cette interprétation, A doit être considérée comme un objet purement mathématique ; et c'est précisément ainsi qu'il convient d'envisager l'usage d'un système de coordonnées spatio-temporelles, puisque lorsque nous posons l'existence d'une application injective $\phi : A \rightarrow \mathbf{R}^4$ où A est un ouvert de la variété espace temps, $\mathbf{R}^4$ fonctionne comme une *représentation* et non comme une *réduction*. Nous n'identifions pas l'espace-temps avec $\mathbf{R}^4$, mais le corrélons avec $\mathbf{R}^4$ dans le but d'obtenir une représentation mathématique.

Les théories newtoniennes par exemple affirment l'existence de coordonnées euclidiennes rigides : elles postulent ainsi des applications injectives $\phi : A \rightarrow \mathbf{R}^4$ telles que les fonctions $t(a,b)$ et $d_s(a,b)$ vérifient les relations suivantes⁴² :

$$\begin{aligned} t(a,b) &= |\phi(a)_0 - \phi(b)_0| \\ d_s(a,b)^2 &= ((\phi(a)_1 - \phi(b)_1)^2 + ((\phi(a)_2 - \phi(b)_2)^2 \\ &\quad + ((\phi(a)_3 - \phi(b)_3)^2 \quad \text{si } \phi(a)_0 - \phi(b)_0 = 0 \end{aligned}$$

La théorie cinématique de l'espace absolu pose ainsi une relation à deux places $R(a,b)$ de repos absolu et implique pour l'application ϕ

$$R(a,b) \text{ si et seulement si } \phi(a)_i = \phi(b)_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

La théorie de la relativité galiléenne en revanche rejette $R(a,b)$ et demande une relation à trois places $R(a,b,c)$ que M. Friedman nomme « relation d'inertialité » :

$$R(a,b,c) \text{ si et seulement si } \phi(a), \phi(b), \phi(c) \text{ sont collinéaires.}$$

42. Friedman 1983, p. 237. Rappelons que ϕ associe un quadruplet de nombres réels $\phi(a) = \langle x_i(a) \rangle$, $i = 0, 1, 2, 3$ à tout point a d'un voisinage de la variété espace-temps, et que par conséquent $\phi(a)_0 = \phi(b)_0$ représente la relation de simultanéité, par suite les fonctions distinctes $t(a,b)$ et $d_s(a,b)$ représentent respectivement et séparément l'intervalle temporel et la distance spatiale entre deux points événements simultanés a et b .

Cette relation $R(a,b,c)$ a bien une signification selon la théorie de la relativité galiléenne, mais pas la relation $R(a,b)$. Selon que l'application injective de A dans $\mathbf{R}^4$ satisfait l'une ou l'autre des conditions, nous avons une théorie plus ou moins large. Nos différentes théories de l'espace-temps postulent donc, par isomorphisme, dans la variété sous-jacente M des pièces variées de la structure théorique $\mathbf{R}^4$: ensemble de fonctions, propriétés et relations définies sur $\mathbf{R}^4$, et font usage de ces représentations pour caractériser la variété sous-jacente.

Par conséquent, nous avons affaire à des représentations équivalentes lorsqu'elles s'accordent sur tous les aspects de la structure mathématique définie sur $\mathbf{R}^4$ correspondant à des quantités physiquement réelles, ou encore à des propriétés de la variété sous-jacente M , mais pas nécessairement sur les aspects de la structure mathématique qui ne présentent pas cette signification.

Sur quelle base pouvons-nous assigner certaines pièces de la structure au « monde » de la réalité physique A et d'autres au monde de la représentation mathématique $\mathbf{R}^4$? La réponse de M. Friedman est en substance la suivante : pour que nous soyons fondés à conférer une réalité physique à une pièce particulière de la structure postulée, elle doit avoir un pouvoir unifiant relativement à la théorie en cause⁴³.

Nous avons au départ l'idée d'une représentation dans $\mathbf{R}^4$, i.e. $\phi: A \rightarrow \mathbf{R}^4$ où A est le domaine d'individus de la théorie, l'ensemble des points de l'espace-temps. La liaison ϕ fournit un domaine important d'entités mathématiques, propriétés relations, fonctions sur $\mathbf{R}^4$, qui, comme dit Friedman, sont « candidats » pour représenter les items physiquement réels selon la conception, ou, pour utiliser à la suite de Friedman un concept quinién, l'« idéologie » de la structure théorique A . Une théorie particulière T attribue une réalité physique à certaines de ses entités mathématiques et pas à d'autres, en imposant des conditions à ϕ qui la restreignent à une certaine classe d'applications Φ . Certains aspects de la structure mathématique sont physiquement réels selon T s'ils sont invariants dans la classe Φ , faute de quoi ils sont purement représentatifs et à ce titre n'ont pas de réalité physique.

Nous devons distinguer deux usages de $\mathbf{R}^4$, comme représentation de la structure théorique A et comme coordination de A . Dans le premier cas, nous postulons (localement) un isomorphisme entre

43. *Ibid.*, p. 324.

les éléments de la structure mathématique de $\mathbf{R}^4$ et ceux de la structure géométrique définie sur A , et nous nous focalisons sur une sous-classe privilégiée de systèmes de coordonnées ϕ pour lesquels les éléments représentants sont invariants. Dans le second cas, nous utilisons $\mathbf{R}^4$ seulement pour représenter certaines propriétés de la structure topologique et différentiable de A et à cet effet tout système de coordonnées admissible est bon.

Une théorie T donnée est liée à la classe de représentation de $\mathbf{R}^4$ supposée par T . La structure théorique est réelle selon T si elle est invariante sous cette classe. Pour des théories physiques constituées, nous pouvons déterminer sur quelles bases méthodologiques nous pouvons assigner telle pièce particulière de la structure théorique au monde de la réalité physique ou à celui de la réalité mathématique. Nous postulons des entités observationnelles comme les trajectoires des particules et les « variables sources » sur A et les autres objets sont rejetés dans $\mathbf{R}^4$. Et pour chaque élément de la structure théorique on se demande quel avantage il apporte en termes de « pouvoir unifiant ».

Un morceau particulier de la structure postulée par une théorie initiale de la forme

$$\exists \phi \in \Phi : A \rightarrow \mathbf{R}^4$$

(où Φ est une classe d'applications) a un pouvoir unifiant dans le contexte d'une seconde théorie de la forme

$$\exists \psi \in \Psi : A \rightarrow \mathbf{R}^4$$

(où Ψ est une seconde classe d'applications) si elle facilite l'inférence à

$$\exists \chi \in \Phi \cap \Psi : A \rightarrow \mathbf{R}^4$$

Si cette inférence peut être conduite même sans la structure en question, comme dans l'exemple du repos absolu et de la théorie de la gravitation, le morceau de structure n'a pas de pouvoir unifiant et peut être rejeté de A en toute sécurité. Mais si d'un autre côté, la structure en question joue un rôle nécessaire dans de nombreuses inférences de ce type, nous n'avons pas d'autre choix que de la prendre littéralement, de lui assigner une place légitime dans le monde de la réalité physique A , car autrement notre théorie totale de A serait beaucoup moins bien confirmée⁴⁴.

44. Friedman 1983, p. 250.

C'est là un point essentiel dans l'argumentation développée par Friedman. Si le passage à l'expression finale

$$\exists \chi \in \Phi \cap \Psi : A \rightarrow \mathbb{R}^4$$

peut s'opérer même en l'absence de l'élément de structure en question comme c'est le cas, par exemple, du repos absolu dans la théorie de la gravitation, cet élément n'a pas de pouvoir unifiant et peut être supprimé de la structure théorique A . Mais si l'élément de structure en cause joue un rôle unifiant dans les inférences des théories partielles aux théories plus compréhensives, nous devons les prendre à la lettre et leur assigner une place dans le monde de la réalité physique.

Considérons par exemple le passage de la théorie newtonnienne de la gravitation à la relativité restreinte. Nous changeons de géométrie de l'espace-temps mais aussi d'objets. Nous remplaçons la paire de fonctions $t(a, b)$, i.e. l'intervalle temporel, et $d_s(a, b)$, la distance spatiale entre points-événements simultanés, par la métrique de Minkowski g , c'est-à-dire une simple fonction d'intervalle

$$I(a, b) = (\phi(a)_0 - \phi(b)_0)^2 - ((\phi(a)_1 - \phi(b)_1)^2 - ((\phi(a)_2 - \phi(b)_2)^2 - ((\phi(a)_3 - \phi(b)_3)^2$$

Dans ce cas, nous ne dirons plus que la variété A est euclidienne rigide, mais lorentzienne.

Nous devons prêter attention au rapport entre la structure théorique postulée $A = \langle M, D, g \rangle$ et la structure observationnelle $B = \langle P, t(a, b), d_s(a, b) \rangle$ où P est constitué des points-événements « occupés » de la variété espace-temps, ou bien $\langle P, I(a, b) \rangle$ si nous passons à la relativité restreinte.

Partons alors de la structure $A = \langle M, D, g \rangle$, où la métrique g est de signature $\langle 1, 3 \rangle$ et compatible avec la connexion D . Rappelons qu'une surface abstraite, c'est-à-dire considérée en elle-même comme entité en soi dans l'espace ambiant ne possède pas d'emblée de géométrie et que le concept de connexion permet précisément de définir une géométrie sur la variété. Retraçons à grands traits la démarche qui conduit à la connexion. On commence par introduire une structure qui permet de spécifier les courbes nommées géodésiques qui sont les courbes que l'on considère comme les « plus courtes » ou des droites. Pour dire quelles sont les courbes les « plus courtes » on doit introduire une manière de les mesurer ou encore une métrique. Mais on considère aussi comme des droites les courbes dont le champ de vecteur tangent est constant : les vecteurs tangents à la courbe en tout point ont la même direction : ils sont

tous parallèles les uns aux autres. On définit alors une « dérivée généralisée » pour un champ de vecteurs : la dérivée dans une direction.

Dans l'espace euclidien, si $\vec{r}(t)$ est une courbe de vecteur tangent $d\vec{r}(t)/dt$ et si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ est un champ de vecteurs alors $\vec{a}$ est constant le long de $\vec{r}(t)$ si et seulement si

$$D_i \vec{a} = 0 \text{ c'est-à-dire } da_i/dt = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Donc $\vec{r}(t)$ est une ligne droite ou une géodésique si

$$D_i (d\vec{r}(t)/dt) = 0, \text{ i.e.}$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3,$$

$$\text{où } \vec{r}(t) = (x_1, x_2, x_3).$$

On généralise cette situation à une variété, une connexion affine étant alors une application qui assigne un champ de vecteurs différentiable $D_X Y$ à chaque paire de champs de vecteurs X et Y satisfaisant certaines conditions opératoires. Comme pour l'espace euclidien, on dit que Y est parallèle le long d'une courbe s de la variété si et seulement si $D_{T_s} Y = 0$ et s est une géodésique si et seulement si T_s est lui-même parallèle le long de s , i.e. $D_{T_s} T_s = 0$.

Par conséquent nous remplaçons toutes les propriétés correspondant à l'existence d'une fonction distance sur les plans de simultanéité et d'une fonction intervalle temporel entre les plans de simultanéité, propriétés qui sont à la base de toute théorie newtonienne d'espace-temps, par la fonction suivante :

$$I(a, b) = \left[\int_a^b |T_\sigma| d\tau \right]^2$$

où σ est une géodésique reliant a et b . Nous avons alors deux interprétations possibles du rapport entre structure observationnelle et structure théorique.

Nous pouvons partir de $A = \langle M, D, g \rangle$, supposer que A est plate et identifier l'« accélération » avec la structure affine de D , i.e.

$$a^i(\sigma)_{\langle x_i \rangle} = (D_{T_\sigma} T_\sigma)_{\langle x_i \rangle}^i$$

de manière à obtenir la *réduction* ou l'*explication* suivante

$$\langle P, I(a, b) \rangle \subseteq A = \langle M, D, g \rangle$$

Mais nous pouvons à l'inverse partir de $B = \langle P, I(a, b) \rangle$ et l'enrichir en « ajoutant » les composantes de l'accélération $a^i(\sigma)$ comme éléments constants de notre structure observationnelle, de manière à obtenir la *représentation* suivante

$$\exists \xi : \langle P, I(a, b), a^i(\sigma) \rangle \rightarrow \mathbb{R}^4$$

vérifiant l'identification suivante

$$a^i = \frac{d^2 \xi_i}{du^2}$$

où la relation $I(a, b)$ est conforme à la métrique g et à l'application ξ .

La notion de « pouvoir unifiant » permet alors de trancher entre la conception relationniste qui fait prévaloir la structure observationnelle $B = \langle P, I(a, b) \rangle$ et la conception absolutiste qui fait prévaloir la structure théorique $A = \langle M, D, g \rangle$.

L'avantage décisif de la structure relationniste B sur la structure absolutiste A ne tient pas seulement au fait que A contienne une connexion affine, car B contient une contrepartie à la structure affine, à savoir les quantités $a^i(\sigma)$. Ce qui est en cause, c'est plutôt que la structure affine de l'absolutiste est partout : son domaine de définition est la variété M entière, et par conséquent elle sert de cadre d'arrière-plan général à toutes les autres propriétés et relations spatio-temporelles. Par conséquent, les assertions fondamentales qui concernent cette structure affine – à savoir qu'elle est plate, ou euclidienne rigide, ou einsteinienne – ont des conséquences importantes pour toutes les autres propriétés et relations spatio-temporelles. Nous pouvons donc faire des inférences conjointes [...] Par opposition, la quantité primitive du relationniste $a^i(\sigma)$ ne remplira pas cette fonction⁴⁵.

Retour au temps

La distinction développée par Friedman entre *réduction* et *représentation* permet de qualifier les structures mathématiques en spécifiant leur contenu physique et, dans le cas du temps, recoupe en partie la distinction lautmanienne entre coordonnée et paramètre.

Revenons donc à la structure temporelle dont nous sommes partis avec Hadamard. Cette structure fournit un contenu déterminé

45. *Ibid.*, p. 257.

aux lois du mouvement en distinguant une classe de trajectoires du genre temps. Pour définir cette notion de genre temps, il faut ajouter quelque chose. Un tenseur métrique riemannien est une forme bilinéaire à valeurs réelles $g(X, Y)$ définie sur l'espace tangent en chaque point, respectant des conditions de symétrie, de définition positive, et de non-singularité. Cette métrique permet de définir la longueur d'un vecteur par exemple, et bien entendu la longueur d'une courbe sur une surface ou une variété. On définit ensuite la notion de courbe « extrémale », ou géodésique. Les géodésiques affines sont du genre temps si $g(T_\sigma, T_\sigma) > 0$, et du genre espace si $g(T_\sigma, T_\sigma) < 0$, nulle sinon.

Dans une théorie newtonnienne d'espace-temps, nous nous restreignons aux fonctions du temps t , tandis que dans un contexte relativiste, nous nous en tenons à des fonctions linéairement reliées au temps propre τ . Essayons de spécifier ce changement. Soient les deux lois du mouvement, newtonnienne

$$m(D_{T_\sigma(t)}T_\sigma(t)) = F$$

où F est un champ de vecteurs du genre espace, t une fonction du temps, et où

$$dt(X) = Xt \text{ pour tout vecteur } X \text{ dans l'espace tangent}^{46},$$

et relativiste

$$m_0(D_{T_\sigma(\tau)}T_\sigma(\tau)) = F$$

où F est un champ de vecteurs orthogonal à T_σ , τ le temps propre et m_0 la masse de la particule au repos. Nous sommes passés du paramètre t au temps propre τ . Rappelons les aspects principaux de cette différence. Si on remplace le paramètre des courbes données par l'équation ci-dessus par un paramètre u arbitraire, on obtient

$$m(D_{T_\sigma(u)}T_\sigma(u)) = F$$

F étant de genre espace au sens newtonien, $dt(F) = 0$, et le champ de vecteurs

$$D_{T_\sigma(u)}T_\sigma(u)$$

46. Rappelons que pour toute fonction t des points de la variété M vers les nombres réels, il y a une seconde fonction dt des vecteurs tangents à M vers les nombres réels, tel que pour tout vecteur tangent X , on ait $dt(X) = Xt$.

l'est aussi, par conséquent

$$dt(D_{T_\sigma(u)}T_\sigma(u)) = 0$$

et dt est compatible avec D :

$$D(dt) = 0$$

On voit alors par le calcul que

$$D_{T_\sigma(u)}T_\sigma(u)$$

est de genre espace si,

$$T_\sigma(u)(dt(T_\sigma(u))) = 0$$

mais

$$dt(T_\sigma(u)) = T_\sigma(u)[(t)] = d(t \circ \sigma) / du$$

Pour que u soit un paramètre adapté, il faut que $d^2u/dt^2 = 0$ soit $t = au + b$. Il doit donc être lui-même une fonction du temps. Dans la dynamique newtonienne, le vecteur force F est du genre temps : F doit se situer dans l'unique plan de simultanéité passant par p pour chaque point p de σ . Dans la théorie de la relativité, nous n'avons évidemment pas un unique plan de simultanéité. On sait que l'espace-temps de Minkowski ne possède pas un temps absolu ou un des plans de simultanéité absolue. Les plans de simultanéité sont relatifs au choix des trajectoires inertiales ; chaque trajectoire inertielle possède son propre plan de simultanéité. Mais pour chaque p sur σ , il y a un unique plan de simultanéité orthogonal à σ en p , c'est le plan de simultanéité du repère inerte qui est tangent à σ en p . Nous avons deux types de temps associés à la trajectoire d'une particule, le temps propre coordonnées-dépendant et le temps (paramètre) coordonnées-dépendant. De même, nous avons deux types de 4-vecteur vitesse. Et différents systèmes d'inertie induisent différentes coordonnées du vecteur vitesse tandis que tous les repères d'inertie induisent le même vecteur vitesse propre⁴⁷. Dans la dynamique relativiste, on doit en outre avoir

$$g(F, T_\sigma(u)) = g(D_{T_\sigma(u)}T_\sigma(u), T_\sigma(u)) = 0$$

La structure temporelle fournit un contenu additionnel déterminé aux lois du mouvement en sélectionnant une classe de trajectoires

47. Friedman 1983, p. 131.

de genre temps⁴⁸. Dans un contexte newtonien, ce rôle est rempli par le champ de covecteur dt (fonction $t(a, b)$), et dans un contexte relativiste, par la métrique g (fonction $I(ab)$). Dans une théorie newtonienne, nous nous restreignons à des fonctions du temps t , tandis que dans le contexte relativiste nous considérons des fonctions reliées de façon linéaire au temps propre τ . Nous obtenons à partir de la théorie T , une classe de coordonnées ϕ_0 dans la classe des représentations admissibles et nous avons des contraintes supplémentaires sur ces classes. On peut inversement prendre comme point de départ des variables de force et les équations de champ correspondantes qui ensuite induisent la structure temporelle. On voit par exemple que les équations qui postulent un potentiel gravitationnel induisent une métrique temporelle, $t(a, b)$.

Conclusion

Des éléments mathématiques sont pourvus d'une réalité physique de deux points de vue. Selon une première perspective, c'est la théorie qui la leur accorde, au sens où c'est la théorie qui sélectionne les entités pourvues de réalité, si l'on tient compte du pouvoir unifiant de la théorie comme d'un élément essentiel dans le processus de sélection. Si l'on reprend les éléments de l'analyse précédente, on peut présenter les conclusions suivantes. Une structure affine donne un contenu déterminé aux lois du mouvement ; elle permet d'unifier plusieurs théories de l'espace-temps. Une connexion plate est nécessaire pour donner un contenu aux lois cinématiques du mouvement et une connexion non plate pour les lois gravitationnelles du mouvement. La structure temporelle ajoute un contenu aux lois du mouvement en distinguant une classe de courbes de genre temps. Nous avons ainsi traité de deux problèmes : d'une part celui de la réalité des entités mathématiques dans le cadre d'une théorie physique, et d'autre part, celui de la situation ou du statut théorique du temps dans ce cadre.

Le second point de vue auquel on est susceptible de se placer lorsque l'on cherche à déterminer comment attribuer une réalité aux entités mathématiques – et ce second point de vue est compatible avec le premier et lui est même lié – est celui qui consiste à accorder à ces entités une réalité *a priori* que la théorie physique

48. Je reprends les conclusions de Michael Friedman.

cette fois ne sélectionne pas au sens strict mais réalise une deuxième fois si l'on peut dire. C'est cette réalité-là que nous commençons à comprendre et qui nous éclaire sur la première de caractère plus épistémologique.

Jean-Jacques SZCZECINIARZ

Université Denis Diderot – Paris 7

Références bibliographiques

- BOTTAZZINI U. (1986), *The Higher Calculus : A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, New York – Berlin – Heidelberg, Springer Verlag.
- COURANT R. et HILBERT D. (1931), *Methoden der Mathematischen Physik*, Berlin, Springer.
- EHRESMANN C. (1943), *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 3, mai.
- FRIEDMAN M. (1983), *Foundations of Space-Time Theories. Relativistic Physics and Philosophy of Science*, Princeton, Princeton University Press.
- HADAMARD J. (1924), « Comment je n'ai pas découvert la relativité », in *Atti del V Congresso Internazionale di Filosofia*, Naples, Guido Della Valle, p. 441-455 (traduction anglaise partielle par I.H. Rose, éditée par B.B. Mandelbrot sous le titre « How I did not discover relativity? », *Math. Intelligencer*, 10-2 (1988), p. 65-67).
- HADAMARD J. (1935), « Les développables circonscrites à la sphère », *Enseignement des Sciences*, 8, 75, p. 129-130 (rééd. dans *Œuvres*, 2, Paris, Éditions du CNRS, 1968, p. 993-994).
- LAUTMAN A. (2007), *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Paris, Vrin.
- LÜTZEN J. (1994), « Partial differential equations », in *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Ivor Gattan Guinness (éd.), Londres – New York, The Johns Hopkins University Press, vol. 2.
- MAZ'YA V. et SHAPOSHNIKOVA T. (2005), *Jacques Hadamard, un mathématicien universel*, G. Tronel (trad.), Paris, EDP Sciences.
- PENROSE R. (1992), *L'esprit, l'ordinateur et les lois de la physique*, Paris, Inter-Éditions.