El concepto leibniziano matemático de función en 1673

Una presentación en el contexto de su surgimiento

The Leibnizian mathematical concept of function in 1673. A presentation within the context of its emergence

Laura E. Herrera Castillo

Edición electrónica

URL: <http://journals.openedition.org/cultura/1998>

DOI: 10.4000/cultura.1998

ISSN: 2183-2021

Editor

CHAM — Centro de Humanidades

Edición impresa

Fecha de publicación: 2 diciembre 2013

Paginación: 127-144

ISSN: 0870-4546

Referencia electrónica

Laura E. Herrera Castillo, « El concepto leibniziano matemático de función en 1673 », *Cultura* [Online], Vol. 32 | 2013, posto online no dia 04 fevereiro 2015, consultado a 10 dezembro 2020. URL : <http://journals.openedition.org/cultura/1998> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/cultura.1998>

Este documento fue generado automáticamente el 10 diciembre 2020.

© CHAM — Centro de Humanidades / Centre for the Humanities

El concepto leibniziano matemático de función en 1673

Una presentación en el contexto de su surgimiento

The Leibnizian mathematical concept of function in 1673. A presentation within the context of its emergence

Laura E. Herrera Castillo

NOTA DEL AUTOR

Este trabajo se ha realizado con el apoyo de los siguientes proyectos de investigación: *Leibniz en español* (P09-HUM-15914, Consejería de Ciencia, Innovación y Empresa de la Junta de Andalucía), *Leibniz en español-2* (FFI2010-15914, Ministerio de Ciencia e Innovación); y la Acción Integrada *El surgimiento de la ciencia moderna en Europa: G. W. Leibniz* (Ministerios de Ciencia de España y Portugal, AIB2010PT-00167).

Introducción

- 1 El problema general que convoca esta acción integrada es el de la relación del pensamiento de G. W. Leibniz con el nacimiento de la ciencia moderna en Europa. Mi trabajo se circunscribe a la matemática y, en particular, al cálculo, una herramienta cuya surge gracias a G. W. Leibniz y a I. Newton, y que desde sus comienzos ha tenido una utilización en las ciencias de la naturaleza. En efecto, con el cálculo quiere llegarse a la solución de incógnitas que muestran los fenómenos de la naturaleza, para cuya resolución no bastan las herramientas existentes hasta entonces. Dentro de este marco, el propósito de mi investigación durante la acción integrada gira en torno de la noción de función en los escritos de matemática de Leibniz. En este escrito se centra en el manuscrito de agosto de 1673, *De functionibus plagulae quattuor*, donde aparece por vez primera en la historia el

término *función* en un sentido matemático. A manera de contexto, para llegar a la exposición de dicho concepto en su lugar específico, en la primera parte del presente escrito se hace un brevísimo recorrido por la *prehistoria* del concepto de función.

- 2 La noción de *función* en la matemática moderna quiere decir la relación de dependencia existente entre los elementos de un primer conjunto y elementos bien determinados del segundo, dado un criterio que permita la relación misma. Así, esta noción es un caso restringido de la de *aplicación*; mientras que la noción de función se restringe al caso de conjuntos de números,¹ la aplicación se refiere a conjuntos en general.² En una función, el tipo de relación que hay entre los conjuntos es unívoca, de manera que la relación se da en *una sola dirección*. Por ejemplo, para una función que define la velocidad de un móvil en términos de distancia (s) y tiempo (t), en la expresión $s = f(t)$, donde s es función de t , se muestra que la distancia depende del tiempo. Para cada tiempo, un cuerpo dado recorrerá una cierta distancia. Pero la expresión no dice en sí misma nada sobre el caso contrario, es decir, que el tiempo dependa de la distancia.³
- 3 Son numerosas las dificultades para definir el concepto de función en la matemática moderna; normalmente se encuentran aproximaciones a una definición tan abstractas que no llega a especificarse el carácter de la relación funcional, es decir, no se fija por alguna relación, operación o ley, sino a través de una descripción verbal, gráfica, tabla, o una regla cinemática.⁴ Las dificultades se presentan al intentar dar una definición completa y no circular de función, pues a menudo se la define a través de los conceptos de *correspondencia* o *relación*, y *conjunto*, pero estos conceptos quedan indefinidos.⁵ Hay diferentes definiciones generales de lo que sea una función, dependiendo de si se la define desde el punto de vista de la lógica o de la matemática, o del término que quede sin definir. Cuando se busca reducir a uno el número de conceptos indefinidos, generalmente se toma el concepto de conjunto. De acuerdo con este modelo de definición, hay una relación funcional entre los conjuntos de números X e Y si para cada elemento del conjunto X hay un, y sólo un, elemento de Y que satisfaga el criterio de la relación que los une.⁶ Hermann Weyl define la función de la siguiente manera: “Eine Funktion f ist gegeben, wenn auf irgendeine bestimmte gesetzmäßige Weise jeder reellen Zahl a eine Zahl b zugeordnet ist [...]. Man sagt dann, b sei der Wert der Funktion f für den Argumentwert a ”.⁷ Así, la función puede entenderse como el resultado de una asignación unívoca de elementos entre dos conjuntos o, dicho con otras palabras, “a function is a single-valued binary relation defined on a pair of sets X and Y ”.⁸
- 4 Pero una definición como la actual no se encuentra en la matemática del siglo XVII. A este respecto vale advertir sobre dos dificultades respecto de la pregunta de la que surge el presente trabajo: por una parte, es posible acercarse al concepto leibniziano de función buscando determinar si dicho concepto equivale al del cálculo actual; por otra parte, cabe preguntarse si, en efecto, el concepto de función, central en el cálculo actual, tiene cabida dentro del modelo de cálculo planteado por Leibniz. Es decir, por una parte es preciso aclarar si cuando Leibniz utiliza el término *functio* en sus escritos de matemática quiere decir lo que queremos decir hoy con él; por la otra, puede plantearse la cuestión de si el cálculo de Leibniz operaba con funciones, como hoy se las entiende. Si bien ambas preguntas se relacionan en un estudio sobre el cálculo de Leibniz, en el presente trabajo es el primer aspecto el que más interesa, por cuanto presentamos aquí lo que Leibniz entiende por función cuando usa el término en sentido matemático, tomando como herramienta central para el análisis el manuscrito de agosto de 1673, *De functionibus*

plagulae quattuor. Abordemos, pues, la prehistoria del concepto contemporáneo de función como el camino para comprender dicho concepto leibniziano matemático.

El instinto de funcionalidad de Euclides a Oresme

- 5 Desde apenas el siglo XIX contamos con una definición del concepto de función bastante similar a la actual.⁹ La historia del concepto o, mejor, su prehistoria, se remonta empero muchos siglos atrás. Si bien sólo desde el siglo XIV se hace un uso consciente de las funciones y hace falta esperar aún hasta finales del siglo XVII para encontrar, en los escritos de Leibniz, el término *función* utilizado en un sentido matemático, algunos consideran que hay una cierta idea de función o, usando la expresión de E. T. Bell, un *instinto de funcionalidad* operando en la aritmética de los antiguos griegos y babilonios. Puesto que una función puede definirse sucintamente como una tabla o correspondencia,¹⁰ en la aritmética de los babilonios se manifiesta el instinto de funcionalidad en el frecuente uso de tablas para hacer cálculos astronómicos. Por su parte, en la matemática griega se hace un uso de la teoría de las proporciones, por ejemplo en la resolución de problemas geométricos. En los *Elementos* de Euclides, que retoma la teoría de las proporciones de Eudoxo y la aplica a problemas concretos, hay un uso de las *razones* con el que se anticipa claramente una idea temprana de funcionalidad. Así reza la tercera definición contenida en el libro V de los *Elementos*: “Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas”.¹¹ Tal es el concepto que sirve de base para resolver problemas geométricos, cuando se considera, por ejemplo, que *dos círculos están entre ellos a razón doble de sus diámetros*. Este procedimiento es considerado por J. Dhombres como un paso decisivo para la posterior concepción de la idea de función, pues con él se abre un camino evolutivo que continuarán las escuelas cinemáticas medievales, como se verá a continuación.¹²
- 6 El uso de las proporciones en las matemáticas griegas equivale, en cierto modo, al uso contemporáneo de las ecuaciones como expresión de relaciones funcionales. Sin embargo, con la teoría de las proporciones se establece una relación de tipo analógico entre los elementos, mientras que una función pone en relación de dependencia, y no de analogía, los elementos del dominio con los elementos del codominio. Así, pese al instinto de funcionalidad que puede leerse en las relaciones entre elementos estudiadas por la aritmética antigua, no puede decirse que los antiguos griegos y babilonios conocieran y utilizaran un concepto de función sin darle denominación propia. La matemática griega carece de una idea general para dependencias funcionales, de una definición o descripción verbal de algo que pueda identificarse como el reconocimiento de una función operando, y de términos para denominar esa idea general; carece también de la concepción de una cantidad en movimiento, un elemento característico del uso de las funciones entre los siglos XIV y XIX. Es preciso decir entonces, con A. P. Youschkevitch, que hay una buena distancia entre un instinto de funcionalidad y la percepción de la idea de función.¹³
- 7 La noción de función aparece en el siglo catorce, cuando la matemática empieza a considerarse como la principal herramienta para estudiar los fenómenos naturales. En este marco surgen las teorías de las calculaciones o latitudes de las formas, que ofrecen representaciones abstractas del movimiento, y en ellas se encuentra un acercamiento a la definición de función por descripciones verbales de sus propiedades específicas o por gráficas.¹⁴ Estas teorías tienen como antecedentes la obra de Roger Bacon¹⁵ y de Thomas

Bradwardine,¹⁶ pero fueron desarrolladas por científicos como Richard Swineshead y William Heytesbury, en el Merton College; y Nicole Oresme, máximo exponente de la escuela de París. En el primero, la dirección de trabajo era la cinemática, una ciencia que estudia el movimiento de objetos sin tener en cuenta sus causas; y en la segunda se trabajó en una dirección geométrica, llegando incluso a determinar formas gráficas para los mismos teoremas a los que llegó la escuela inglesa. En estas teorías intentan cuantificar *cualidades*, o fenómenos, como el calor, la densidad y la velocidad, tomándolos como *grados de intensidad* que pueden variar continuamente dentro de ciertos límites; para ello, se ayudan de escalas de tamaños cuantificables, a los cuales llevan las intensidades de las cualidades y de las formas.

- 8 Un caso particular para el uso de funciones está en lo que se conoce hoy como *regla del Merton College*. La regla se expresa en términos de distancia y de tiempo: sostiene que si un cuerpo se mueve de manera uniformemente diforme – nuestro movimiento uniformemente acelerado –, entonces la distancia recorrida será la misma que recorrería otro cuerpo que se moviera durante el mismo tiempo con un movimiento uniforme, cuya velocidad es igual a la del primer cuerpo exactamente en el punto medio del intervalo de tiempo. En términos actuales, para un cuerpo con un movimiento uniformemente acelerado, “la velocidad media será la media aritmética de las velocidades inicial y final”.

¹⁷ Nicolás Oresme probó esta regla haciendo uso de herramientas geométricas. Oresme consideraba que todo lo medible, a excepción de los números, podía imaginarse como cantidades continuas. Así, para representar el movimiento se toman en cuenta las variaciones (o intensidades) de cantidades continuas – como la distancia de un punto móvil en relación con un punto fijo –, a partir de otras cantidades – como el tiempo¹⁸ –. Esta consideración le permite aproximarse a la determinación de la velocidad valiéndose de gráficas y de relaciones proporcionales entre tiempos y espacios. De esta manera, en su adaptación de la regla de Merton Oresme grafica la velocidad total – la relación proporcional entre los cuerpos en movimiento – en el área de un trapecio o de un triángulo. Partiendo de una línea horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes de tiempo, denominados por Oresme *longitudes*, se traza un segmento perpendicular, que denomina *latitud*, que representa la velocidad en un punto dado; en la figura que se muestra a continuación las líneas verticales corresponden a las latitudes. Los segmentos limitan con una recta trazada entre el primer punto y el último; si el movimiento es uniformemente acelerado y parte del reposo, la gráfica resultante será la de un triángulo rectángulo, como el que se muestra a continuación:

Fuente: Boyer, Historia de la matemática..., p. 339

- 9 En la regla de Merton se ponen en relación proporcional elementos heterogéneos para hallar un resultado, como el tiempo, la velocidad y la distancia. Y si la regla de Merton es

una forma primitiva de ecuación funcional, su graficación a manos de Oresme es “una sugerencia primitiva de lo que ahora llamamos la representación gráfica de funciones”,¹⁹ pues es una de las primeras gráficas de la relación funcional que vincula el tiempo con la velocidad.

- 10 Tanto en los trabajos de la escuela de París como los de Oxford hay un uso consciente de ideas generales para medir cantidades variables, sean dependientes o independientes; ideas para las que no se ofrecen definiciones pero para las cuales se dan nombres, dependiendo de la operación específica. Este es un cierto nivel de abstracción en el que se juega con la idea de función, pese a que hubiera sido sólo descrita o graficada y no se hubiera dado un nombre específico para identificarla. Al poner en relación proporcional elementos y tiempos, en la teoría de las calculaciones o de la latitud de las formas se encuentra un antecedente importante para el cálculo que más adelante desarrollarán I. Newton y G. W. Leibniz. Si bien la noción de función que opera aquí no es exactamente el concepto actual y la idea de relaciones funcionales no se haya desarrollado a través de mediciones específicas sino que se plantea sólo en principio, esta se acerca mucho más al concepto actual que los usos aproximados a él que pueden rastrearse en la matemática de los antiguos griegos y babilonios.

La noción de función en *De functionibus plagulae quattuor*

- 11 La teoría de las calculaciones tuvo una amplia difusión durante los siglos XV, XVI y aún principios del XVII, una época en la que aún era enseñada en las universidades. Aunque no tuvo mayores contribuciones durante este periodo, varios de sus rasgos se encuentran en los desarrollos científicos de Descartes y, posteriormente, de Leibniz y Newton. No puede asegurarse con certeza que Descartes conociera de primera mano la obra de Oresme, pero algunos suponen que la conoció a través de I. Beeckman, de quien se sabe que estudió a fondo los desarrollos de Oresme. Aunque esta relación sea apenas probable, llama la atención la actitud de Descartes de representar cantidades variables y sus relaciones a partir de formas geométricas y segmentos de líneas rectas. Durante el siglo XVI, en general, hay un amplio uso de la geometría como método para resolver problemas de física. Leibniz, por su parte, era un conocedor y admirador de la obra de Swineshead y es probable que, por esta razón, heredara algunas de sus preocupaciones, como la consideración matemática del movimiento que aquél resolvió a través de la cinemática y que éste desarrolló mucho con su dinámica, al introducir el análisis de las fuerzas. Por último, Newton perteneció a la escuela inglesa en un tiempo en el que se seguían impartiendo las teorías de las calculaciones. Es probable, en consecuencia, que en el contexto intelectual en el que se formó Leibniz hubiera un conocimiento de esta puesta en relación de tiempo y velocidad, de este instinto de funcionalidad.
- 12 El nombre de Leibniz tiene un lugar en la prehistoria del concepto de función puesto que a él le debemos el nombre de *función*. Sin embargo, no es claro que la palabra tuviera el mismo sentido que tiene ahora, en la matemática moderna, cuando aparecía en sus escritos matemáticos. ¿Qué significa, pues, para Leibniz el concepto de *función*? Durante los primeros años de la década de 1670 el término aparece utilizado en numerosos de sus escritos matemáticos como uno de los conceptos del *nuevo método*: el cálculo. El primer documento donde el término aparece utilizado en un sentido matemático claro y fijo es el

manuscrito de agosto de 1673, *Methodus tangentium inversa seu de functionibus*, recogido en la edición de la Academia con el título *De functionibus plagulae quattuor*.²⁰ Antes de su uso en el *De functionibus*, las apariciones del término se reducen a usos generales del mismo, más cercanos a lo que por él comprendemos en el habla cotidiana que a lo que por él se entiende en la matemática moderna. Por ejemplo, en los manuscritos *Trigonometria inassignabilium* y *Triangulum characteristicum ellipsis*, ambos de los primeros meses del año 1673, aparece la expresión *facere functionem*. Con esta expresión o su equivalente *facere officium* Leibniz se refiere a formar un fragmento específico en una figura – una tangente, por ejemplo –, tocar una curva o construir su normal.²¹ Es preciso señalar que, al utilizar las expresiones *facere officium* o *facere functionem* en los manuscritos de esta época, Leibniz se refiere a la formación de fragmentos diferentes en cada caso, a varios tipos de elementos de una curva y, sin embargo, denomina todos los casos como “función”. Que construir un fragmento, sin importar cuál sea en cada caso, sea una actividad que se denomina también como *hacer una función* quiere decir que el término *función* equivale más a la acción de construir que a un fragmento específico. En este orden de ideas, el término no se refiere a un fragmento en particular; antes bien, es sinónimo de la actividad que un fragmento desempeña, sinónimo del hecho de que un fragmento *haga las veces de* tangente, subtangente o subnormal. De ahí que Leibniz utilice indistintamente las expresiones *hacer una función* y *hacer un oficio*. El término *función* tiene, entonces, en los manuscritos de 1670 a agosto de 1673 el sentido del habla cotidiana: designa una tarea por realizar u oficio.

- 13 En el *De functionibus* Leibniz se propone encontrar el método inverso de tangentes. Téngase en cuenta la importancia que para el cálculo de Leibniz tiene el problema entonces aún vigente sobre la cuadratura del círculo, para cuya solución la geometría no contaba con herramientas suficientes. Leibniz conocía bien los métodos de exhaustión y las nuevas variantes que durante el Renacimiento y la Modernidad temprana se ofrecieron, como lo es el método de los indivisibles. A través del estudio de los infinitamente pequeños, Leibniz quería ofrecer soluciones para los problemas de cuadraturas, en las que vio una inversión para las tangentes. Este carácter inverso entre cuadraturas y tangentes tiene a la base el hallazgo de Leibniz del carácter inverso entre derivadas e integrales. En la solución de los problemas de cuadraturas y tangentes se recurre al triángulo característico, al que Leibniz dedica numerosos estudios. Es un manuscrito donde muchas “primeras veces” se dan cita, pues es el lugar donde Leibniz llega brillantemente a importantes descubrimientos de diverso tipo en torno a su cálculo. En palabras de Dietrich Mahnke, no es demasiado decir:

dass diese Handschrift bereits alle wichtigen Entdeckungen der werdenden höheren Analysis, wenn auch z. T. noch im unausgereiften Embryonalzustand, enthält. Denn der Name und Begriff der Funktion, die Differentialquotienten von beliebiger Ordnung, der Grundgedanke der allgemeinen Taylorschen Reihe sowie die speziellen Reihen für $\sqrt{ax}$ und $\sqrt{2ax \pm x^2}$, die Zurückführung des geometrischen Tangentenproblems, der Rektifikations- und Quadraturprobleme auf die Summation unendlicher Reihen, deren Glieder diese Differentiale enthalten, also die Grundeinteilung des Gesamtgebietes der höheren Analysis in seine beiden inversen Regionen, den calculus differentialis und calculus summatorius, die Differential- und Integralrechnung, alles das findet sich in jener wichtigen Handschrift wenigstens schon keimhaft angedeutet.²²

- 14 El problema específico que el autor trata en su *De functionibus* es el de hallar las medidas dependientes de una curva conocida a partir de la ley de variación o progresión de la misma. Las *medidas dependientes* son tangentes, subtangentes, normales, secantes, y

cualesquiera otros fragmentos dependientes de la curva y son denominadas por Leibniz con el nombre general de *funciones*. Valga recordar en este punto que uno de los avances introducidos por Descartes en la historia de la matemática es la idea de que una curva pueda ser definida por cierta propiedad específica, y que dicha propiedad se mantiene tanto para la curva en su totalidad como para cada uno de los puntos que la componen. Así, hay una correspondencia entre las curvas y las ecuaciones con coordenadas en x e y , de manera tal que para cada curva hay una ecuación específica definida por estas coordenadas y, a la vez, para cada ecuación – definida por las coordenadas x e y – hay una curva específica.²³ Dando un paso más allá, se da una correspondencia entre, por una parte, las propiedades algebraicas y analíticas para la ecuación con ciertas coordenadas y, por otra, las propiedades geométricas de la curva. Así, en una dirección la geometría se reduce al álgebra y al análisis, pero también, en otra dirección, el análisis puede darse en términos geométricos. Téngase en cuenta aquí lo que Giusti²⁴ denomina la revolución cartesiana: con la geometría analítica, la curva deja de ser considerada desde su construcción y comienza a tratarse desde su expresión algebraica. Al considerar que una curva es su ecuación, todas las propiedades dependientes de ella deberían desprenderse también de la ecuación de la curva. Ahora bien, en el tratamiento que Leibniz da al problema de las tangentes se da un paso más y se reconoce el carácter de inversión entre los elementos de la curva y la ecuación de la curva misma: si hay una dependencia entre ambos, podría *caminarse* en sentido contrario. Así, el problema inverso de las tangentes consiste en deducir, *a la inversa*, las medidas basadas en la curva a partir de la ley de la variación dada. De ahí que el autor haya escogido como título para su manuscrito *Methodus tangentium inversa seu de functionibus*. En términos modernos, el problema trata sobre la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.²⁵

- 15 Hay una segunda tarea que Leibniz se propone resolver en el mismo manuscrito y que es de cierta importancia para nuestro estudio del término *función*: se propone llegar a la ordenada a partir de la subtangente o la subnormal. Para encontrar la ordenada correspondiente a una subtangente es menester conocer la relación entre dicha subtangente y su diferencia con la próxima subtangente conocida, en otras palabras, encontrar la relación entre la diferencia de las subtangentes y la diferencia de las abscisas que le son correspondientes; un problema que Leibniz, como Pascal, resuelve utilizando los infinitamente pequeños.²⁶
- 16 En este manuscrito, el nombre *functio*²⁷ es utilizado en relación estrecha con los conceptos del lugar geométrico, por una parte, y, por la otra, de la serie infinitamente progresiva, cuyos términos consecutivos resultan de una fórmula general donde se ponen ciertos valores numéricos uno tras otro – es decir, en una serie – para sus variables indefinidas. Ambos conceptos se relacionan también con lo que el concepto de función significa en el contexto de la matemática actual; además, vuelve a aparecer el término en conexión con el verbo *hacer*.
- 17 ¿Qué diferencia hay entre el uso que se hace del término *función* en el *De functionibus* con respecto a los manuscritos del verano temprano de 1673, donde ya había aparecido antes el término? Ahora el término deja de ser considerado desde esa perspectiva general de la lengua cotidiana, como sinónimo de *officium* y designando la *tarea* misma que una parte realiza con respecto a la curva. El término se refiere ahora a los trozos de líneas mismos, o magnitudes, de una curva que desempeñan con respecto a ella cierta tarea. Por ejemplo, si en los anteriores manuscritos con la función se designaba el “ser tangente” de una tangente, aquí se designa la tangente misma, esto es, el fragmento de recta, que

constituye una tangente de cierta curva. ¿Quiere decir esto que en el presente manuscrito Leibniz le da el nombre de ‘función’ a cualquier fragmento sin más? No. Con el término *función* se encuentra un nombre común para denominar distintas medidas *dependientes*. Lo que es denominado función está en una cierta relación con otra cosa, depende en cierto modo de otra cosa. Nótese que no depende de cualquier manera: las magnitudes funcionales dependen entre sí, son *interdependientes*. Esta es una relación entre dos partes tal que no sólo a partir del conocimiento de las propiedades de la primera es posible llegar a un cierto conocimiento de la segunda, sino que la vía contraria también es posible. La dependencia entre las magnitudes es recíproca.

- 18 Debe tenerse en cuenta todavía otro factor que se desprende de lo anterior. Los elementos que Leibniz denomina “funciones” no se refieren a constantes, sino a magnitudes *variantes* regulares, es decir, magnitudes que varían con respecto a una ley dada como, por ejemplo, lo son una abscisa u ordenada de la curva, y que están en una relación determinada con otras variables. Así, si antes de agosto de 1673 el término *función* denota una tarea, oficio o deber, a partir del *De functionibus* se denominan como *funciones* las magnitudes variables recíprocamente dependientes, conforme a una cierta ley dada.
- 19 Es de resaltar que al plantear el problema inverso de las tangentes como un regreso desde la ley del cambio de las funciones hacia la ecuación de la curva, el término mismo de *función* toma un sentido muy cercano al de la asignación recíproca o variación reglada; Dietrich Mahnke va más allá y dice que, debido a este aspecto, la segunda parte del título del manuscrito, es decir, *de functionibus*, tiene sentido.²⁸ Se equiparan, entonces, el sentido inverso del método entre tangentes y el término *función*: hay en la función un sentido de reciprocidad y regularidad. Lector de Mahnke, Yvon Belaval recoge a partir del análisis del alemán tres aspectos en torno a la noción leibniziana matemática de función que cabe resaltar:

Le mot *fonction* renverra, dans l'esprit de Leibniz, aux trois idées suivantes: 1. Celle d'une coordination réglée et réciproque de valeurs : il faut mettre l'accent sur *réciproque* pour mieux dégager, sur ce point, l'originalité de Leibniz par rapport à Descartes. 2. Celle d'un lieu géométrique, c'est-à-dire la courbe elle-même déterminée par une loi : c'est ici que Leibniz dépasse la méthode des indivisibles. 3. Celle d'une série en progression infinie, dont la formule générale peut donner les termes successifs, en remplaçant leur variation indéterminée par des valeurs numériques déterminées: et c'est en joignant cette idée aux précédentes que Leibniz dépasse, cette fois, l'*Arithmetica infinitorum*.²⁹

- 20 Que el carácter de la coordinación reglada entre magnitudes sea recíproco es un rasgo que debe ser señalado, no sólo para resaltar el avance de Leibniz con respecto a Descartes, sino la diferencia entre su idea de función y la de la matemática actual.
- 21 Leibniz hizo público su concepto de función por primera vez en 1692, en el artículo del *Acta eruditorum*, *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis...*³⁰ Aquí introduce los conceptos de *coordiinada* (para las ordenadas y abscisas), *variable* y *constante*, así como la expresión *ecuación diferencial*. El término *función* aparece aquí como una generalización del que se veía en los manuscritos de París, durante los primeros años de la década de los setenta. El concepto de función es ahora una denominación para tangentes y demás trozos dependientes de la curva dada,³¹ para cualquier magnitud equivalente a un punto de la curva, y sobre todo, también las coordenadas x e y .³² Más adelante le escribe a su maestro Huygens una definición de función, donde con tal nombre denomina fragmentos de líneas rectas como son la abscisa, tangente u ordenada, y, en general, aquellos fragmentos que se proyectan desde la curva correspondiente hacia un punto fijo.³³ Un

mismo nombre genérico puede aplicarse a tipos de fragmentos tan distintos porque el nombre no indica aquí exactamente la posición de un fragmento con respecto a la curva dada. Lo que indica es que el fragmento está en relación con esa curva, depende de ella. Es una prolongación a partir de uno de sus puntos y en cuanto que se prolonga de él está en relación con ella y es una función de ella.

- 22 En su correspondencia con Johann Bernoulli utiliza Leibniz con naturalidad su término *función*, como puede verse en la carta de 12/22 de noviembre de 1697:

Me alegra que te haya gustado tanto mi nuevo método con el que se ensanchan las fronteras de nuestro cálculo. En efecto, con él no solo se reduce a una ecuación diferencial de primer grado el descubrimiento de la curva que corta perpendicularmente a las dadas ordenadamente en posición o que concurre con ellas en un ángulo, ya sea de forma constante o dado ordenadamente, sino que lo mismo puede obtenerse aunque el ángulo no esté ordenadamente dado, con tal de que las que lo determinan constituyan con otras *funciones* algo ordenadamente dado.³⁴

- 23 Sin embargo, aquí el término no se limita para fragmentos de líneas rectas, pues parece utilizarse para designar algo equivalente a una curva u elemento cualquiera con el que pueda componerse algo dado ordenado, sea, o no, una línea recta. En la respuesta a esta carta puede verse cómo Johann Bernoulli se apropia de este uso del término *función*. En la carta del 4/14 de diciembre de 1697³⁵ Bernoulli utiliza el término para reemplazar el término *ángulo*, aunque tanto en la carta de Leibniz como en la de Bernoulli *función* se usa como sinónimo de fragmentos o, en general, elementos que constituyen algo *ordenadamente dado*.

- 24 La manera en la que Bernoulli utiliza el término *función* será reconocida más adelante por Leibniz como suya. En efecto, en el apéndice a la carta de 5/15 de julio de 1698, donde Bernoulli propone su solución al problema de las curvas isoperímetras, para lo cual se vale de los métodos discutidos con Leibniz, utiliza repetidamente el término en cuestión.³⁶ Lo usa para referirse a fragmentos de la curva en general, bien sean aplicadas o normales,³⁷ y a las operaciones entre dichos fragmentos las denomina operaciones entre funciones.³⁸ Aquí, una función puede significar no sólo el fragmento sin más, sino un fragmento resultante de alguna operación efectuada con otro fragmento. En esta carta Johann Bernoulli denomina *función* a los fragmentos dependientes de curvas, pero también a los fragmentos que dependen de elementos dependientes de la curva – esto es, que dependen de la curva en cuanto que dependen de elementos dependientes de ella. El hecho de denominar con un mismo nombre magnitudes distintas trae la posibilidad de tratar los problemas *de una forma analítica*, es decir, trascender el uso de la geometría para resolver problemas geométricos. Bernoulli ve las ventajas del cálculo descubierto por Leibniz, no sólo porque con él se agiliza la resolución de los problemas, sino que ella se hace posible en muchos casos en los que la geometría cartesiana no era suficiente. Por ello insiste en su resolución analítica del problema de las curvas isoperímetras y por eso le resulta útil trabajar con distintos fragmentos reducidos a nombres: al hacer de elementos específicos de la curva funciones de la misma puede resolver el problema por medio del cálculo. Y lo que significa aquí que los distintos fragmentos sean funciones, lo que se quiere decir con este nombre general, no es que un elemento dado sea la aplicada o subnormal para una curva dada, sino que, dada la curva, el fragmento depende de ella, se traza o se proyecta a partir de ella. A esta carta responde Leibniz: “me satisface que hayas empleado, a mi estilo, el término *funciones*”.³⁹

Balance final

- 25 En el manuscrito del verano de 1673 *De functionibus*, donde Leibniz se propone encontrar un método para el problema de tangentes, aparece la noción de función referida a magnitudes variables reguladas con respecto a una cierta ley y que están en relación de dependencia mutua con otras variables. En este planteamiento, donde aparece una dependencia entre la ley que regula la variación de funciones y la ecuación de la curva, o entre los fragmentos relativos a una curva y la curva misma, el término mismo de *función* toma un sentido muy cercano al de la asignación recíproca o variación reglada que se veía como un elemento de la definición de la noción de función en la matemática actual. Esta cercanía nos introduce en la polémica de si en la matemática de Leibniz tuvo cabida, o no, un concepto como el moderno de función o, al menos, uno cercano a él. De entrada, puede responderse que en el concepto moderno de función no tiene cabida la reciprocidad implícita en el uso leibniziano del término *función*, aunque se hable de dependencia. Es decir, la noción moderna de función consiste en una relación en una sola dirección entre elementos de un primer conjunto hacia elementos de un segundo conjunto. Dada una ley (la función), para todo elemento del primer conjunto corresponderá uno específico del segundo conjunto. Dependiendo del tipo de función en cuestión, es posible que el mismo elemento del segundo conjunto le corresponda a más de un elemento del primer conjunto pero lo que es indiscutible es el hecho de que la relación se da en esta sola dirección. A partir de la función dada no pueden asignarse elementos del primer conjunto para los elementos del segundo; esto requeriría una función diferente. Por el contrario, además de que, como es claro, Leibniz no habla en términos de teoría de conjuntos, con la noción de función que utiliza en su *De functionibus* la reciprocidad es posible. Aun reconociendo como similitud el hecho de que Leibniz hable de una variación reglada, la relación de dependencia entre dos magnitudes es recíproca y no unívoca: a partir de la ley de la variación de la primera se puede decir algo sobre la segunda magnitud y *viceversa*. Por último, no debe dejarse de lado el hecho de que Leibniz llega a concebir su término *función* dentro del marco de la geometría y como una herramienta para resolver problemas geométricos. Aunque el cálculo de Leibniz tenga dimensiones de abstracción mayores a las del cálculo de Newton, que se enfocaba en la utilización práctica del mismo, no debe, por esta diferencia, caerse en el error de interpretar el cálculo de Leibniz con el mismo nivel de abstracción que lo caracteriza hoy en día. Su método fue concebido como una vía para resolver de modo directo problemas que la geometría de Descartes no lograba resolver, esto es, problemas geométricos. Leibniz quiso prescindir de las figuras para llegar a un método de solución de problemas en el que el pensamiento no se perdiera atendiendo a las imágenes y se centrara en los conceptos. Pero los problemas mismos siguen siendo relativos a la geometría.
- 26 Ahora bien, si el término *función* según lo utiliza Leibniz es cercano al de la matemática moderna pero no idéntico a él, ¿puede decirse que hay cabida en el cálculo de Leibniz para un término equivalente a la función moderna? Dietrich Mahnke considera que sí y lo rastrea ya desde *De tangentium methodo*.⁴⁰ Para ello recuerda que en la formulación del problema aparece por segunda vez el término *función*, ahora estando en relación con dos conceptos que también se relacionan con el concepto actual de función, a saber: a) el lugar geométrico o la curva, cuya imagen representaba para los matemáticos de esta época lo que en el análisis superior se entiende por función, desde principios del siglo XX;

b) la serie infinitamente progresiva, cuyos términos consecutivos resultan de una fórmula general donde se ponen ciertos valores numéricos uno tras otro para sus variables indefinidas. Sin embargo, si pudiera seguirse de aquí que la idea moderna de función está presente en la matemática de Leibniz, no correspondería ella a lo que el autor entiende por tal término, sino al nombre *relatio*.⁴¹ En consecuencia, si se quiere buscar un paso firme en el desarrollo de un concepto de función al interior de la matemática de Leibniz, no es el término *función* sino *relación* el que debe perseguirse.

- 27 Según opiniones contrarias a la de Mahnke, como lo es la de H. J. M. Bos,⁴² el concepto moderno de función se originó en el siglo XIX frente a los vacíos que tenía su homólogo en los cálculos anteriores. Estas opiniones se basan, entre otras cosas, en el hecho de que la noción central del cálculo leibniziano sea la de variable y no la de función en un sentido moderno.⁴³ Si bien Bos señala correctamente el lugar central de la variable en el cálculo leibniziano, la observación de Mahnke no es, necesariamente, contradictoria. Mahnke no quiere hacer del cálculo leibniziano un cálculo funcional en sentido contemporáneo. Pero si la afirmación de Mahnke es correcta y Leibniz se anticipó a esta concepción de la función con su término *relatio*, entonces los hombres de su época o, incluso, Leibniz mismo, no pudieron ver la importancia del concepto.

BIBLIOGRAFÍA

Yvon Belaval, *Leibniz critique de Descartes*, Gallimard, París, 1960.

E. T. Bell, *The development of mathematics*, Dover Publications, NY, 1992.

H. J. M. Bos, "Newton, Leibniz y la tradición leibniziana", en I. Grattan-Guinness (ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*, trad. Mariano Martínez Pérez, Alianza, Madrid, 1984.

Nicolas Bourbaki, *Elementos de historia de la matemática*, trad. Jesús Hernández, Alianza, Madrid, 1972.

Carl B. Boyer, *Historia de la matemática*, trad. Mariano Martínez Pérez, Alianza, Madrid, 1986.

D. M. Casesnoves, *Diccionario de matemática moderna*, Editora Nacional, Madrid, 1982.

Amy Dahan-Dalmedico – Jeanne Peiffer, *Routes et Dédalles*, Études Vivantes, París, 1982.

J. Dhombres, "Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction. Présenté par A. P. Youschkevitch", en *Archive for History of Exact Sciences* 36, n. 2, 1986.

Euclides, *Elementos*, trad. M. L. Puertas, Ed. Gredos, Madrid, 1994.

Walter Fuchs, *Knaurs Buch der modernen Mathematik*, München-Zurich, 1966.

A. Enrico Giusti, "Le problème des tangentes de Descartes à Leibniz", en *Studia Leibnitiana – Sonderheft*, 14 (1986), p. 26-37.

Lentin – J. Rivaud, *Álgebra moderna*, Aguilar, Madrid, 1973.

Anneliese Maier, *Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert. Studien zur Naturphilosophie der Spätscholastik*, Edizioni di Storia e Letteratura, Roma, 1949.

Dietrich Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*, Abhandlungen der preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlín, 1926.

Fyodor Medvedev, *Scenes from the History of real Functions*, Basel u. a., Birkhäuser, 1991.

Peter Schulthess, *Relation und Funktion*, W. de Gruyter, Berlin – NY, 1981.

Hermann Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Oldenburg, Munich, 1966.

Adolf Pavlovic Youschkevitch, “The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century”, in *Archive for History of Exact Sciences*, 1976, 19/1, pp. 37-85.

A. P. Youschkevitch, “Die Entwicklung des Funktionsbegriffs”, trad. Karin Reich, en *Veröffentlichungen des Forschungsinstituts des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik*, Munich, 1972.

NOTAS

1. Cf. A. Lentin – J. Rivaud, *Álgebra moderna*, Aguilar, Madrid, 1973, p. 7.
2. Cf. D. M. Casesnoves, *Diccionario de matemática moderna*, Editora Nacional, Madrid, 1982, p. 35. Casesnoves define la función por la aplicación.
3. Cf. Walter Fuchs, *Knaurs Buch der modernen Mathematik*, München-Zurich, 1966, p. 248.
4. Cf. Fyodor Medvedev, *Scenes from the History of real Functions*, Basel u. a., Birkhäuser, 1991, p. 28. Las dificultades son señaladas en las páginas 25-28.
5. Cf. Medvedev, *Scenes from the History...*, p. 26.
6. Paráfrasis de Medvedev, *Scenes from the History...*, p. 26.
7. Hermann Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Oldenburg, Munich, 1966, p. 22; cf. Fuchs, *Knaurs Buch...*, p. 248.
8. Cf. Medvedev, *Scenes from the History...*, p. 26.
9. Cf. Adolf Pavlovic Youschkevitch, “The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century”, in *Archive for History of Exact Sciences*, 1976, 19/1, p. 37-40, 56, 62; A. P. Youschkevitch, “Die Entwicklung des Funktionsbegriffs”, trad. Karin Reich, en *Veröffentlichungen des Forschungsinstituts des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik*, Munich, 1972, p. 2-4.
10. Cf. E. T. Bell, *The development of mathematics*, Dover Publications, NY, 1992, p. 32.
11. Euclides, *Elementos*, trad. M. L. Puertas, Ed. Gredos, Madrid, 1994, p. 9.
12. Cf. J. Dhombres, “Quelques aspects de l’histoire des équations fonctionnelles liés à l’évolution du concept de fonction. Présenté par A. P. Youschkevitch”, en *Archive for History of Exact Sciences* 36, n. 2, 1986; p. 93.
13. Youschkevitch, *The Concept of Function...*, pp. 42-43.
14. Cf. Youschkevitch, *The Concept of Function...*, pp. 46-47; Dhombres, *Quelques aspects...*, pp. 95-97.
15. Bacon (1214-1294) fue el primero en intentar representar en una línea vertical los grados de variación de fenómenos físicos, como el calor, la densidad y la velocidad, pero él se topó con la dificultad de que al nivel de la cuantificación de leyes sólo contaba con las herramientas de los números enteros, que son insuficientes para una correcta medida de las variaciones. Cf. Amy Dahan-Dalmedico – Jeanne Peiffer, *Routes et Dédales*, Études Vivantes, París, 1982, p. 197.
16. Bradwardine (1290-1349) busca encontrar la regla matemática exacta con la que pueda expresarse la relación de dependencia existente entre la velocidad de un movimiento, la fuerza que lo provoca y la resistencia que lo frena. Así, estudia y refuta la ley aristotélica del

movimiento (Cf. Aristóteles, *Física*, VII, 5, 249b27ss.), vigente en la física de su época, y llega a plantear una relación de dependencia entre la fuerza y la resistencia en la consideración de la velocidad. Los estudios de Bradwardine sobre la velocidad tuvieron un enorme influjo sobre la física posterior; desde luego también sobre las escuelas cintemáticas de Oxford y París. Cf. Anneliese Maier, *Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert. Studien zur Naturphilosophie der Spätscholastik*, Edizioni di Storia e Letteratura, Roma, 1949, p. 94.

17. Carl B. Boyer, *Historia de la matemática*, trad. Mariano Martínez Pérez, Alianza, Madrid, 1986, p. 336.

18. Cf. Dhombres, *Quelques aspects...*, p. 94.

19. Boyer, *Historia de la matemática...*, p. 339.

20. A VII, 4, 656-710.

21. Cf. Eberhard Knobloch – Walter S. Contro, “Einleitung”, en *Gottfried Wilhelm Leibniz. Sämtliche Schriften und Briefe*, Reihe VII (Mathematische Schriften: Infinitesimalmathematik), Akademie Ausgabe, 2008, p. XVIII; Cf. Dietrich Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*, Abhandlungen der preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlín, 1926, p. 47. Cf. Peter Schulthess, *Relation und Funktion*, W. de Gruyter, Berlin – NY, 1981, p. 225.

22. Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte...*, p. 59.

23. Cf. Bell, *The Development of Mathematics...*, 139.

24. Cf. Enrico Giusti, “Le problème des tangentes de Descartes à Leibniz”, en *Studia Leibnitiana – Sonderheft*, 14 (1986), p. 26.

25. Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte...*, p. 45.

26. Cf. Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte...*, p. 45ss.

27. Cf. A VII, 4, 664 para la primera aparición del término *functio* en el manuscrito; es, a su vez, la primera aparición del término *función* en un sentido matemático claro y fijo.

28. Cf. Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte...*, p. 48.

29. Yvon Belaval, *Leibniz critique de Descartes*, Gallimard, París, 1960, p. 343.

30. Cf. GM V, 266-9.

31. Cf. Schulthess, *Relation und Funktion...*, p. 226.

32. Cf. Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte...*, p. 49.

33. GM V, 307: “J’appelle fonctions toutes les portions des lignes droites, qu’on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe et aux points de la courbe comme sont [...] abscisse [...], ordonné [...], corde [...], tangente [...], perpendiculaires [...]”. Cf. Schulthess, *Relation und Funktion...*, p. 227.

34. OFC 16A, 413 (GM III, 466); en estas versiones la carta data de 2/12 de noviembre de 1697. Para la fecha del 12/22 de noviembre, véase: A III, 7, 639.

35. OFC 16A, 416-420 (GM III, 469-473); A III, 7, 670-677.

36. Cf. OFC 16A, 458ss. (GM III, 507ss.); A III, 7, 804ss.

37. Cf. OFC 16A, 458ss. (GM III, 507ss.); A III, 7, 814ss.

38. P. e., “diferencia de funciones” para una diferencia entre fragmentos que se prolongan desde el diámetro de la curva, en OFC 16A, 460 (GM III, 507-8); A III, 7, 816.

39. OFC 16, 482 (GM III, 525-6); A III, 7, 859.

40. A VII, 4, 584. Cf. Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte...*, p. 47.

41. En palabras de Mahnke: “Leibniz gebraucht allerdings in der vorliegenden Handschrift für diese gesetzliche Beziehung, in der die Ordinate einer Kurve zu ihrer Abszisse oder das Glied einer Reihe zu dem in die allgemeine Formel eingesetzten Zahlenwerte steht, noch nicht das Wort Funktion; aber wie der Anfang der Handschrift beweist, hat er den Funktionsbegriff schon im weitesten Sinne gebildet und benennt ihn mit dem Wort *relatio*.” Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte...*, p. 47. Cf. También Schulthess, *Relation und Funktion...*, p. 226.

42. Cf. H. J. M. Bos, "Newton, Leibniz y la tradición leibniziana", en I. Grattan-Guinness (ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*, trad. Mariano Martínez Pérez, Alianza, Madrid, 1984; p. 84.
43. Cf. Nicolas Bourbaki, *Elementos de historia de la matemática*, trad. Jesús Hernández, Alianza, Madrid, 1972; Youschkevitch, *The Concept of Function...*, p. 50ss.; Dhombres, *Quelques aspects...*, p. 95ss.

RESÚMENES

Es indudable la importancia de la noción de función para la matemática y la lógica actuales y es sabido que es G. W. Leibniz quien utiliza por vez primera el término *función* en un sentido matemático, un término que, además, es introducido en el marco de su cálculo infinitesimal. Puesto que el pensador alemán es, junto con I. Newton, uno de los descubridores del cálculo, suele pensarse que también debemos a él el concepto de función. Sin embargo, poco se ha escrito sobre la manera específica en la que Leibniz utilizó el término *función*, evadiendo con frecuencia la pregunta de si acaso el término y el concepto han correspondido siempre. En el presente trabajo exploramos el significado del término en el contexto de su surgimiento: el manuscrito de 1673 *De functionibus plagulae quattuor*. Con tal objetivo, hacemos, en primer lugar, una breve reconstrucción de la historia del *instinto de funcionalidad* que sirva de marco para comprender el significado del término *función*. Este significado es obtenido, en segundo lugar, atendiendo a los usos que el autor hace del término en dicho manuscrito.

There is no doubt about the importance the notion of function has to Mathematics and Logics from our days. It is also known that it is G. W. Leibniz who uses the name *function* in a mathematical sense for the very first time, a name which is brought onto Mathematics in the frame of his infinitesimal analysis. Since the German thinker is, along with I. Newton, a discoverer of infinitesimal analysis, it is frequently assumed that we also owe him the concept of function itself. However, not much has been written about the specific way in which Leibniz uses the name *function* – and the question if the *name* and the *concept* of function have always been corresponding is by that frequently ignored. In this paper I aim to explore the meaning of the name *function* within the context of its rising, that is, 1673 manuscript *De functionibus plagulae quattuor*. Firstly, a brief reconstruction of the history of the *instinct of functionality* is on that purpose made – a reconstruction, which can be used as a framework to understand what the concept of function means. That meaning is, secondly, obtained by focusing on the uses the author makes of the name of function in that manuscript.

ÍNDICE

Keywords: function, history of mathematics, instinct of functionality, infinitesimal calculus

Palabras claves: función, historia de la matemática, instinto de funcionalidad, cálculo infinitesimal

AUTOR

LAURA E. HERRERA CASTILLO

Universidad de Granada.

Doctora en Filosofía por la Universidad de Granada, universidad donde también obtuvo su título de Máster en Filosofía Contemporánea. Es licenciada en Filosofía por la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, Colombia. Su tesis, *El carácter funcional de la metafísica leibniziana*, fue realizada bajo la dirección de Juan A. Nicolás. Ha realizado estancias de investigación en el Leibniz-Archiv de Hannover y la Leibniz-Forschungsstelle de Münster. Ha colaborado con la Biblioteca Hispánica Leibniz y la edición de las *Obras Filosóficas y Científicas* de G.W. Leibniz, publicadas por la editorial Comares, y coordina la colección Nova Leibniz de la misma editorial. Ha sido Doctora contratada por la Universidad de Granada, donde trabajó adscrita al proyecto *Leibniz en español*.

Laura Castillo has finished her PhD on Philosophy at the University of Granada, Spain; she received her Master degree on Contemporary Philosophy by the same university. She has completed her Bachelor studies on Philosophy at the Pontifical University Javeriana in Bogotá, Colombia. Her dissertation, *The functional Character of Leibnizian Metaphysics*, was written by her under the supervision of Prof. Juan A. Nicolás. She has made research visits to *Leibniz-Archiv* in Hannover and *Leibniz-Forschungsstelle Münster*, both in Germany. She has worked in the project *Biblioteca Hispánica Leibniz* and in the Spanish edition of Leibniz's works, *Obras Filosóficas y científicas*, published by Comares. She coordinates the collection of essays *Nova Leibniz*, published by the same house. She is member of the Spanish Leibniz Society (SeL) and the Ibero-american Leibniz Network. She has worked at the University of Granada, associated to the project *Leibniz in Spanish*.