

Pour une théorie de la relativité géographique (Vers une généralisation du modèle gravitaire)

Generalising the gravity model : towards a theory of geographical Relativity

[Daniel Parrochia](#)

(Université Jean Moulin - Lyon III)

Résumé

Depuis la fin du XIXe et le début du XXe siècle, la loi d'attraction universelle de Newton a été transposée en géographie, constituant ce qu'on a pu appeler le « modèle gravitaire ». Dès la fin des années 1960, les géographes utilisent, par ailleurs, des espaces non-euclidiens. Or on sait que les espaces de Riemann, depuis la théorie de la relativité générale d'Albert Einstein (1915), constituent le cadre formel le plus approprié pour comprendre la gravitation, assimilée à une courbure de l'espace-temps. Il restait à mettre en relation les phénomènes géographiques avec ce cadre physico-mathématique, en examinant les difficultés épistémologiques soulevées par cette transposition. Ce travail, qui trouve son inspiration dans un texte de R. Brunet, rappelle d'abord l'origine et la nature du modèle gravitaire ainsi que les problèmes posés par la généralisation de la formule de Newton. Après avoir rappelé quelques définitions concernant les notions mathématiques de distance, courbure et espace, il présente ensuite de façon succincte les fondements de la théorie einsteinienne, restreinte et générale, et développe, pour finir, les fondements d'une théorie de la relativité géographique.

Mots clés : modèles gravitaire, courbure, espace-temps, théorie de la relativité, espaces non-euclidiens, espaces riemanniens

Abstract

Inspired by Newton's law of gravitation, gravity models appeared in geography more than one century ago. For about forty years, non-euclidean spaces have been of current use in geography. We know also that riemannian spaces are the formal apparatus of General Relativity. In Einstein's theory (1915), gravitation is nothing but space-time curvature. All along this paper, we shall try to extend gravity models by substituting for the Newton's law a relativistic model based on a riemannian space. We also try to answer the different kinds of problems raised by our theory : for instance, discontinuity of space, non symmetric matrices of distances, non-constant curvature, locally non euclidean riemannian spaces, etc.

Keywords :

gravity models, space-time, curvature, General Relativity theory, non-euclidean spaces, riemannian spaces

1 Le modèle gravitaire et sa généralisation

La paternité du modèle gravitaire est communément attribuée à William J. Reilly, qui, dans un ouvrage intitulé *The law of retail gravitation*, publié à New York en 1931, transpose explicitement la loi de Newton en géographie. En réalité, Reilly reprenait des intuitions de Ernst Georg Ravenstein, lequel, dans ses *Laws of Migration*, ouvrage publié en 1885, dressait déjà une carte des courants migratoires fondée sur la loi de gravitation. Peu après, en 1889-92, le français Emile Levasseur qui étudiait alors les tendances de développement de la population française en la comparant aux autres en faisait également usage.

1.1 Une analogie formalisée

Comme on le sait, le modèle gravitaire est fondé sur une analogie formalisée : la transposition, en géographie, de la formule d'attraction universelle de Newton :

$$F = g \frac{mm'}{d^2}$$

Où g est la constante de gravitation.

La transposition géographique est immédiate et a été, de longue date, bien étudiée¹. Comme ont pu l'écrire R. Brunet et O. Dollfus, « tout se passe "comme si" tout lieu dans l'espace géographique exerçait sur les autres une attraction en fonction directe de sa masse et en fonction inverse de la distance qui les sépare de lui »². De nombreuses situations sont possibles : on peut trouver des sites de dimension réduite mais fortement attractifs (par exemple, une mine de métal précieux), capables de déclencher d'importants déplacements de populations (ruée vers l'or) ; on peut aussi rencontrer l'inverse : des espaces de grande étendue et faiblement attractifs (par exemple, la zone antarctique, longtemps déserte et où, il n'y a guère, la base Concordia n'attirait encore que quelques scientifiques, avant que ne se développe, tout récemment, le fameux « tourisme des glaces »). Toutes les situations intermédiaires sont possibles. On notera également que l'analogie, qui vaut localement (par exemple, pour le rapport entre une ville et sa périphérie³), vaut aussi globalement : dans le cas de l'« espace-monde », les masses sont les concentrations ou foyers de population qu'on appelle des « amas » ou des « nébuleuses », et les attractions se font suivant des « couloirs », c'est-à-dire, des lieux où se concentrent les voies de communication sous toutes leurs formes (route, fer, eau, air, voire également voie d'alimentation et de distribution énergétique, réseaux électriques, réseaux téléphoniques, câbles, etc.). En principe, l'analogie est valable à toutes les échelles.

1.2 Les trois concepts-clés

Formellement parlant, le modèle gravitaire repose sur trois concepts-clés, aujourd'hui bien connus des théoriciens de l'analyse spatiale⁴ : La notion de *force*, celle de *potentiel* et celle d'*énergie mutuelle*.

1.2.1 La notion de force

Le concept de force, qui est initialement la force de Newton, $F = k \frac{mm'}{d^2}$ se généralise en géographie en :

$$F = k \frac{mm'}{d^n}$$

où n est un coefficient de friction de l'espace, qui permet de moduler l'attraction, et k une constante de proportionnalité qui tient compte de paramètres tels que les moyens de transport, les revenus des consommateurs, le niveau du désir de déplacement, etc. Il arrive quelquefois qu'on ajoute encore une constante pour adapter le modèle aux conditions réelles.

1.2.2 La notion de potentiel

Second concept impliqué dans le modèle gravitaire, le potentiel est défini comme :

$$V = \sum_{j=1}^n (m_j / d_j)$$

Autrement dit, le potentiel géographique est le transposé exact du potentiel physique dans un champ de forces newtonien, lequel est défini, étant donné un nombre n quelconque de corps, par la somme des n rapports masse/distance de chaque corps au point où on calcule le potentiel. Comme en physique également, le potentiel géographique total en un point est la somme de tous les potentiels partiels.

1.2.3 L'énergie mutuelle

On définit encore l'énergie mutuelle des masses en interaction (ou, dans le cas géographique, ce qu'on appelle « indice d'interaction ») en posant tout simplement :

$$E = k \frac{mm'}{d}$$

D'une façon générale, et comme en physique, la force est dérivée du potentiel au signe près. Par conséquent, toute cette transposition de l'idée de gravitation en analyse spatiale est bien, comme le dit Brunet, une « application » de la loi de Newton.

1.3 Une demande de généralisation

¹ Cf. par exemple, H. Reymond, J.B. Racine, *L'analyse quantitative en géographie*, PUF, 1973 ; voir également H. Isnard, J.B. Racine, H. Reymond, *Problématiques de la géographie*, Paris PUF, 1981.

² R. Brunet, O. Dollfus, *Mondes Nouveaux*, Paris, Hachette-Reclus, 1994, p. 81.

³ Voir, par exemple, les études sur l'attraction créée par la ville de Rennes. Cf. E. Minvielle, S.A. Souiah, *L'analyse statistique et spatiale*, Paris, Editions du temps, 2003.

⁴ M.F. Cicéri, B. Marchand, S. Rimbart, *Introduction à l'Analyse de l'espace*, Paris, Masson, 1977, p. 83.

Dans un paragraphe de *Mondes Nouveaux* intitulé « De la gravitation à la relativité générale », il est suggéré une généralisation possible de la loi newtonienne de la gravitation qui pourrait s'appuyer sur la formule d'Einstein $E = mc^2$. Pour bien des raisons sur lesquelles nous n'insisterons pas, cette généralisation ne peut emprunter la voie suivie par les auteurs. En revanche, la question se pose de savoir quelle forme pourrait prendre une généralisation relativiste du modèle gravitaire et dans quelle mesure une telle démarche aurait un sens pour le géographe.

Il nous semble qu'une telle généralisation revient à transposer en géographie le postulat fondamental de la théorie de la relativité générale, à savoir que le phénomène de gravitation se traduit géométriquement par une courbure de l'espace. En géographie, le bénéfice de l'opération serait d'associer le modèle gravitaire aux « espaces courbes » dont les géographes font usage. En d'autres termes, les contractions de l'espace-temps que, sous différentes contraintes, certains auteurs mettent en évidence en produisant des anamorphoses cartographiques ou des espaces « chiffonnés », pourraient ainsi se trouver reliées à des phénomènes gravitaires.

1.4 Exemples d'espaces non euclidiens en géographie

Il n'est pas inutile, peut-être, de rappeler que, depuis une trentaine d'années, de nombreux géographes (Harvey (1969), Müller (1982), Tobler (1993), L'Hostis (1997), Miller (2000), Worboys (2000)...) ont marqué les limites de la géométrie euclidienne en géographie. Indépendamment de la cartographie et des différentes projections dont elle peut faire usage, les développements actuels de la géographie humaine semblent nécessiter le recours à des espaces non plus « plats » mais « courbes » dont l'intérêt est multiple. Il s'agit notamment, en les utilisant, de mieux traduire les déformations spatio-temporelles créées par certains phénomènes relevant de la géographie des populations, des transports, de la richesse, de la maladie, etc. Au lieu de faire varier des concentrations dans un espace homogène, on révèle alors les asymétries d'ensemble créées par l'hétérogénéité des distributions en modifiant la taille de la maille de l'espace substrat.

Ces déformations sont proches de celles que Colette Cauvin a décrit dans sa thèse de 1984 et de ce qu'elle a pu appeler des « transformations cartographiques de positions »⁵, dont la carte de l'immigration française citée par M. Béguin et D. Pumain est un exemple remarquable⁶. On prendra garde, cependant, que la carte de C. Cauvin n'est pas une carte anamorphosée selon des distances-temps, mais selon un modèle différent, relevant du calcul de structures avec résolution par la méthode des éléments finis. Jusqu'à présent, il ne semble pas que des transformations thématiques de poids aient intégré des distances. Les anamorphoses liées aux distances sont celles des transports, à partir de modèles issus de la biologie (D'Arcy Thomson, par exemple).

Cela dit, des transformations du même ordre peuvent affecter, d'une façon générale, les poids, les liens, les tendances, ou encore les modifications associées au développement de moyens de transport rapides :

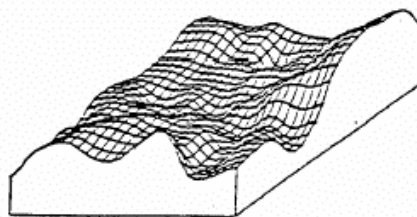
En cherchant bien, on trouverait également des exemples d'espaces non-euclidiens à trois dimensions. Ainsi les variations de vitesse d'un marcheur (Tobler, 1993) permettent de construire une sorte d'espace-temps caractéristique du piéton : à partir du calcul de la pente du terrain, on peut convertir celle-ci en unité de rapidité de marche. Il est facile de le faire, en particulier si le terrain est donné sous la forme d'une matrice géographique où les hauteurs sont indiquées à intervalles réguliers dans les deux directions. On obtient, alors, un espace localement déformé, avec puits et pics de potentiels.

De même, l'étude des distances temporelles dans une agglomération permet de tracer des pseudo-cercles d'isoaccessibilité⁷ et leurs lignes orthogonales (géodésiques) dont l'ensemble fait apparaître un système de coordonnées non-euclidiennes (coordonnées de Gauss) qui généralise le repère cartésien.

⁵ C. Cauvin, « Au sujet des transformations géographiques et des espaces cognitifs et transformations cartographiques ». Thèse de géométrie des espaces cognitifs, dont la géométrie riemannienne

⁶ M. Béguin, D. Pumain, *La représentation des données géographiques*, Paris, A. Colin, 2003, p. 185.

⁷ W. Tobler fait observer que F. Galton a introduit le terme d'« isochrones » pour qualifier de tels cercles dans les années 1880, bien que, très probablement, le terme ait déjà été utilisé par Snellius et Bernoulli dans d'autres contextes.



également déjà : C. Cauvin, *op. cit.*, avec 30 pages sur la

(Paris, A. Colin, 2003, p.

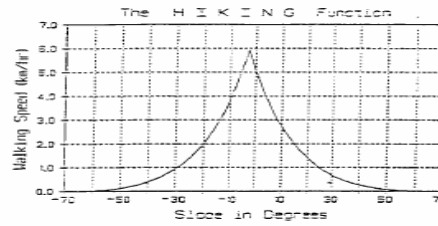


Figure 1 : L'espace-temps du marcheur (d'après W. Tobler 1993)

Pour comprendre ce genre d'entreprises, et en quoi elles peuvent être liées à une généralisation du modèle gravitaire, il faut, en toute rigueur repartir des notions mathématiques fondamentales de distance, d'espace et de courbure.

1.5 La notion de distance en mathématiques

La notion de distance obéit à des conditions bien précises en mathématiques. Est une distance une fonction d de \mathbf{R} dans \mathbf{R} qui satisfait aux axiomes suivants :

- (i) $d(x,y) \geq 0$
- (ii) $d(x,y) = d(y,x)$

Si, de plus, on a :

$$(iii) d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$$

alors, d est une métrique. Si, maintenant, d vérifie en plus :

$$(iv) d(x,y) \leq \text{Max} [d(x,z), d(y,z)]$$

alors d est une ultramétrie.

Toute une classe de distances est donnée par la formule de Minkowski

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right]^{1/p}$$

- Si $p = 1$, il s'agit de la distance de Manhattan, rectilinéaire ou rectangulaire.
- Si $p = 2$, il s'agit de la distance euclidienne (qui utilise le théorème de Pythagore).
- Si $p \rightarrow \infty$ ($p < \infty$), on a la distance de Chebychev ou métrique maximum.

Parmi les distances non-euclidiennes, on peut citer les distances-temps, les distances en coordonnées polaires, et nombre d'autres indices de distances dont certains sont très utiles au géographe.

1.6 La notion d'espace

Une distance pouvant s'exprimer sous la forme d'un produit scalaire de vecteurs, un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est :

- Un espace euclidien si la distance est euclidienne
- Un espace pseudo-euclidien si la distance est pseudo-euclidienne (certains termes du produit scalaire (négatifs) sont en fait imaginaires).
- Un espace non-euclidien si la distance n'est pas forcément la racine carrée d'une forme quadratique ou si elle est seulement définie entre deux voisinages infinitésimaux.

L'exemple typique d'espace euclidien est le plan cartésien \mathbf{R}^2 . Dans un tel espace, les coordonnées sont dites « rectangulaires ». Les mailles sont définies par des vecteurs unitaires invariables et elles sont toutes identiques. La distance entre deux points quelconques est la distance « euclidienne » (racine de la somme des carrés des coordonnées).

La généralisation de ce système de coordonnées à des coordonnées curvilignes (ou coordonnées de Gauss), consiste à faire des coordonnées des fonctions arbitraires du point. Un espace, muni d'un système de coordonnées de Gauss n'est plus euclidien.

1.7 Les coordonnées de Gauss dans le plan

Dans la figure ci-dessous, seules les courbes $u = 1$, $u = 2$, $u = 3$ sont tracées. Mais il faut imaginer une infinité de courbes entre elles. Aucune ne doit couper une autre et par tout point de l'espace doit passer une courbe et une seule. A deux points voisins P (de coordonnées u, v) et P' (de coordonnées $(u + du, v + dv)$) correspond une distance que Gauss mesure par : $ds^2 = g_{11}du^2 + 2 g_{12} dudv + g_{22} dv^2$ où les g_{ij} , nommés « tenseurs », sont des grandeurs dépendant de u et v .

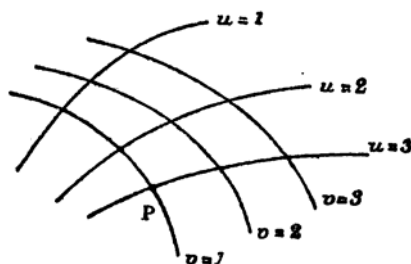


Figure 2 : Les coordonnées de Gauss (d'après [Einstein, 1969, p. 101])

La quantité ds , racine carrée de cette expression, est une distance non euclidienne. Mais on notera que si $g_{ij} = 0$ ou si $g_{ij} = g_{ji} = 1$, on se trouve ramené à une distance euclidienne, qui n'est donc qu'un cas particulier de la précédente.

1.8 Métriques riemanniennes

Les plus simples des espaces non-euclidiens sont les espaces de Riemann. Dans ce type d'espace, la métrique, définie entre deux voisinages infinitésimaux, est, la racine carrée d'une forme quadratique définie positive du type :

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$g_{ij} = 1 \text{ si } i = j, \quad g_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Le terme \sum est généralement omis et l'on somme sur les indices semblables en haut et en bas (convention d'Einstein)

Mais on peut aussi imaginer que certains termes de la métrique puissent être négatifs. On obtient alors une métrique « pseudo-riemannienne ». On peut aussi prendre des termes complexes plutôt que réels (métriques sous-riemannienne) ou abandonner l'idée d'une forme quadratique pour se contenter d'une fonction continue satisfaisant certains principes de régularité minimum.

1.9 La courbure⁸

Comme on le sait, le propre des espaces de Riemann est d'être des espaces « courbes ». Comment définir rigoureusement la courbure d'un espace?

Pour une courbe g , la courbure $k(t)$ est donnée, en tout point $p = g(t)$, par la longueur du vecteur accélération V d'un cercle tangent à ce point (cercle osculateur). Si R est le rayon du cercle, on a $k(t) = 1/R$.

⁸ On distingue en mathématiques deux types de courbure : la courbure intrinsèque et la courbure extrinsèque. Est intrinsèque une courbure qui dépend uniquement de l'espace considéré. Par exemple, la surface d'une sphère est intrinsèquement courbe, au sens où l'on peut s'apercevoir de cette courbure en traçant un triangle et en mesurant la somme de ses angles (nécessairement différente de 180 degrés). La courbure extrinsèque, en revanche, est une propriété qui ne dépend pas complètement de l'espace considéré mais de la manière dont on le visualise, c'est-à-dire de l'immersion de cet espace dans un espace de dimension supérieure. Dans un espace à courbure extrinsèque sans courbure intrinsèque (par exemple, une feuille de papier pliée sur elle-même), la somme des angles d'un triangle fera toujours 180 degrés. Au contraire, l'espace de la théorie de la relativité générale d'Einstein, ou espace-temps, est un espace à courbure intrinsèque.

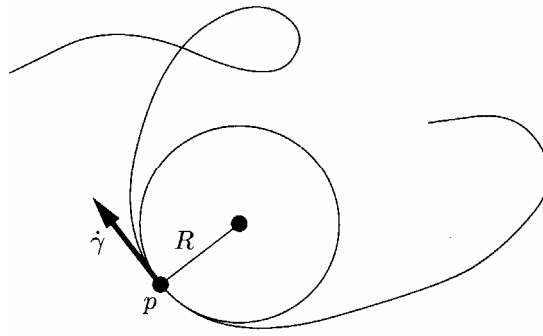


Figure 3 : Le cercle osculateur (d'après [John M. Lee, 1997, p. 3])

Pour une surface, la courbure est donnée par deux nombres appelées « courbures principales ». Soit une surface S , p un point, N un vecteur-unité normal à S . L'intersection de S avec tout plan sécant contenant N donne une courbe. Les courbures principales de S notées k_1 et k_2 sont les courbures maximum et minimum enregistrées. Le produit des deux ($k_1 k_2$), qui peut être négatif, donne un sens intrinsèque à la courbure.

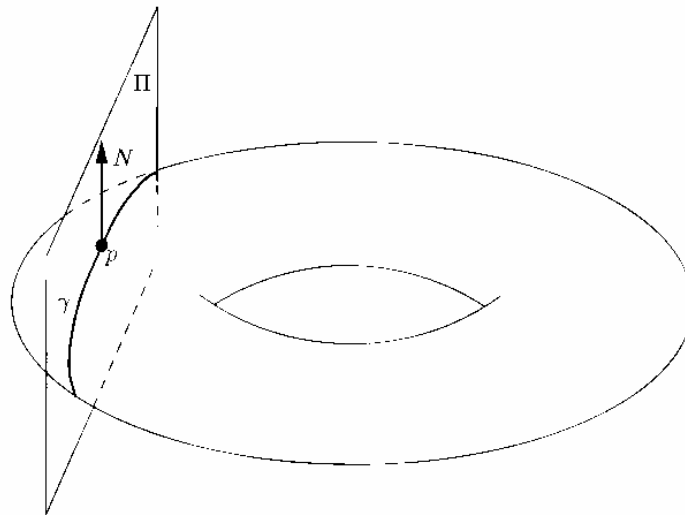


Figure 4 : Le calcul des courbures principales (d'après [John M. Lee, 1997, p. 5])

En dimension supérieure à 2, les espaces peuvent se courber dans plusieurs directions et il faut abandonner l'idée d'intersecter l'espace avec des plans sécants pour une définition plus intrinsèque. La courbure est alors donnée par la considération des géodésiques, ou courbes de plus court chemin entre deux points voisins. En tout point p de l'espace considéré, il y a une géodésique et une seule dont le vecteur tangent est le vecteur accélération V .

La courbure peut être ou non constante. Lorsqu'elle est constante, elle donne, en dimension 2 des espaces bien connus :

$k = 0$	plan euclidien R^2
$k = 1/R^2$	sphère de rayon R
$k = -1/R^2$	plan hyperbolique

En dimension supérieure, on a les généralisations de ces espaces : espace R^n , n -sphère S^n de rayon R , espace hyperbolique H^n de rayon R . Si la courbure en $1/R^2$ est adaptée à la gravitation classique, il faudra donc faire intervenir ces généralisations pour les formules dont l'exposant n est plus quadratique, comme c'est souvent le cas en géographie.

2 La théorie de la relativité restreinte (Einstein, 1905)

En physique classique, quand on cherche à repérer un événement, on a différentes possibilités : Les coordonnées (x, y, z, t) de l'événement peuvent être initialement données dans un repère cartésien R (au repos).

L'événement peut aussi avoir des coordonnées autres (x', y', z', t') dans un repère R' en mouvement par rapport à R. Le cas le plus simple est que R' se déplace à une vitesse v , constante, par rapport à R selon l'axe des x et pendant un temps t . Dans ces conditions, les nouvelles coordonnées peuvent être définies en fonction des anciennes par la transformation de Galilée. On a :

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Ces transformations expriment que le seul déplacement se fait le long de l'axe des x et que le temps est le même dans tous les repères.

La découverte des lois de l'électromagnétisme (Maxwell) tout comme la manifestation de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide (expériences de Michelson et Morley), devaient remettre en question cette transformation. La théorie de la relativité restreinte est née de la nécessité de résoudre la contradiction entre la loi d'invariance de la lumière et le principe de relativité des vitesses qu'exprimaient les transformations de Galilée. Celles-ci doivent alors être remplacées par les transformations de Lorentz :

$$x' = x - vt/\gamma$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t - (v/c^2)x / \gamma$$

$$\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

transformations formant un groupe mathématique (le groupe de Lorentz) qui laisse invariante l'expression $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$. Prise sous une forme différentielle ($ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$), celle-ci devient l'élément linéaire caractéristique de l'espace (pseudo-euclidien) sous-jacent à la théorie d'Einstein.

Les conséquences de cette nouvelle transformation n'induisent pas seulement des déformations de nos cadres spatio-temporels pour des mobiles se déplaçant à des vitesses non négligeables devant celle de la lumière. Elles tissent de nouvelles relations entre la masse et l'énergie.

Partant des formules classiques de l'énergie et de la force ($E = F \cdot \Delta x$, d'où $\Delta x = E/F$ et $F = m\gamma = m(\Delta v/\Delta t) = \Delta(mv)/\Delta t = \Delta p/\Delta t$, d'où : $\Delta t = \Delta p/F$), il est facile de retrouver la célèbre formule d'Einstein évoquée par R. Brunet ($E = mc^2$) qui rend manifeste l'équivalence entre la masse et l'énergie d'un corps, qu'il soit au repos ou en mouvement. En effet, lorsqu'on porte ces longueurs (Δx) et ces durées (Δt) dans les équations de Lorentz, on en déduit rigoureusement la formule d'Einstein. De plus, comme $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, on en déduit aussi que la masse d'un corps augmente avec sa vitesse.

A quelle condition cette relation pourrait-elle être utile au géographe ?

Il faudrait d'abord trouver, pour les espaces géographiques, des équivalents de la vitesse de la lumière, c'est-à-dire des invariants qui contredisent le principe de relativité de Galilée. Travaillant naguère sur la notion d'information, nous avons retrouvé une ancienne proposition du physicien canadien Guy Jumarie, qui associait à toute observation (par essence relative) un invariant de cette nature⁹. On en trouverait probablement différentes instanciations en géographie : par exemple, en dessous d'un certain seuil de pauvreté, la variation des revenus ou du pouvoir d'achat peut très bien n'avoir aucune incidence sur le niveau de vie des personnes concernées ; ou encore, dans un réseau dont les arcs ont atteint leur seuil de saturation, une variation en plus ou en moins n'affectera pas beaucoup la circulation. On peut ainsi définir des constantes dont le rôle est analogue à celui de la vitesse de la lumière.

La mise en relation de ces constantes avec les d'objets d'étude (niveau de vie, quantité d'information transmise, etc.) se traduira alors par des effets « relativistes » sur les grandeurs en question, induisant des déformations sur les composantes concernées de l'espace abstrait décrivant les phénomènes. La mise en équivalence de la « masse » et de l'énergie peut alors s'interpréter dans ce contexte et la relation d'Einstein pourrait alors, selon

⁹ Cf. D. Parrochia, *Cosmologie de l'information*, Paris, Hermès, 1993.

le vœu de R. Brunet, trouver un sens.

Le cadre de la relativité restreinte, qui est celui des mouvements galiléens, autrement dit continus et uniformes, est cependant insuffisant pour rendre compte des phénomènes d'attraction gravitationnels, liés à des accélérations. La véritable généralisation du modèle gravitaire passe donc nécessairement par la théorie de la relativité générale.

3 La théorie de la relativité générale d'Albert Einstein (1915)

Comme Einstein le rappelle dans l'un de ses écrits, la théorie de la relativité générale est née de sa conviction de l'identité de la masse inertielle et de la masse pesante, laquelle se traduit concrètement par l'énoncé du *principe d'équivalence* : la donnée d'un champ de pesanteur (homogène, d'étendue suffisamment petite) est complètement équivalente à celle d'un état d'accélération du système de référence. Comme les mouvements accélérés suivent les géodésiques de l'espace, dont la métrique est l'intégrale première, il en résulte que le champ d'attraction créé par les masses peut être assimilé à une courbure d'espace.

3.1 L'espace d'Einstein

L'espace de la théorie de la relativité générale n'est donc pas un espace «plat», comme l'espace euclidien, mais un espace courbe, de la classe des «espaces de Riemann». Il est défini par une métrique riemannienne de type hyperbolique normal, qui prend la forme :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

Cet espace satisfait les équations de la théorie de la relativité générale dans leur expression tensorielle, c'est-à-dire :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R = - 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2)$$

Avec :

$g_{\mu\nu}$ tenseur métrique

$R_{\mu\nu}$ tenseur de courbure contracté de Ricci-Einstein

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ courbure riemannienne scalaire

$T_{\mu\nu}$ tenseur d'énergie-impulsion

3.2 L'espace de Lorentz

En un point quelconque M de l'espace d'Einstein, l'espace pseudo-euclidien tangent à cet espace en M, est l'espace normalisé par le tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a alors, pour tout point M de l'espace d'Einstein :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3)$$

3.3 Dédution des équations (2)

Ces équations, rappelons-le¹⁰, sont obtenues par passage à la limite newtonienne, lorsqu'on considère une particule de masse m se déplaçant lentement dans un champ de gravitation stationnaire. En effet, le déplacement de la particule étant négligeable, un certain nombre de simplifications peuvent intervenir dans l'équation des géodésiques, d'autant que, dans un système presque plat, où :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec } |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (4)$$

¹⁰ Cf. D. Parrochia, *Les grandes révolutions scientifiques du XXe siècle*, Paris, P.U.F., 1997.

la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ est constante et $h_{\mu\nu}$ est indépendant du temps (puisque le champ est stationnaire). Dès lors, l'équation des géodésiques se réduit à :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = (1/2) \square h_0$$

L'équation de Newton pour un potentiel gravitationnel, dont la forme générale est :

$$\Phi = - GM / r \quad (6)$$

s'écrit, à une distance r d'une masse m :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \square \Phi \quad (7)$$

Il vient donc :

$$h_{00} = - 2 \Phi + \text{constante} \quad (8)$$

Et comme, à l'infini, la constante est nulle, on obtient :

$$h_{00} = - 2 \Phi \quad (9)$$

$$g_{00} = - (1 + 2 \Phi) \quad (10)$$

Par ailleurs, on sait qu'une masse de matière de densité ρ soumise au potentiel de Newton Φ vérifie l'équation de Poisson :

$$\square^2 \Phi = 4\pi\rho \quad (11)$$

où G est la constante de gravitation universelle.

Quant au tenseur des contraintes, il est relié à la densité de matière, et l'on a :

$$T_{00} = \rho \quad (12)$$

Il en résulte qu'on a finalement :

$$\square^2 g_{00} = - 8\pi G T_{00} \quad (13)$$

Cette équation statique et non invariante pour la transformation de Lorentz, n'en est pas moins le point de départ de l'équation générale, qui, en faisant jouer le principe d'équivalence, généralise la formule (13) sous la forme de l'équation (2) :

$$G_{\mu\nu} = - 8\pi G T_{\mu\nu}$$

4 Théorie de la relativité géographique

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la généralisation du modèle gravitaire passe donc par une théorie de la relativité géographique, transposition, en géographie, de la théorie de la relativité générale.

En géographie, les masses matérielles pourront être remplacées par des masses de population, des concentrations de richesses, des distances temporelles, des coûts, etc. Dans tous les cas, une stricte application de la géométrie riemannienne impliquera que la propriété géométrique de l'espace (la courbure) doit se trouver reliée à la présence de masses pesantes (populationnelles, financières, etc.) distribuées dans l'espace.

Voici, d'après Tobler (1993), un ensemble d'applications possibles, pour une métrique du type :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Les $g_{\alpha\beta}$ pourraient être ;

- Des distances routières entre villes dans un pays quelconque.

- Des temps de trajet automobile entre ces différents lieux
- Des temps de trajet entre deux adresses dans une grande ville.
- Des temps de trajet aérien entre deux villes d'un même pays.
- Des coûts de trajet aérien de ces voyages
- Des temps de trajet en autocar entre 2 villes, et coût de ces trajets
- Des coûts des envois de colis entre villes dans un pays donné.
- Des distances entre villes estimées à partir d'un échantillon d'entre elles.
- Des longueurs de routes océaniques entre ports du monde
- Etc ...

Le cas des coûts de transport est particulièrement significatif. Selon Tobler, ils augmentent généralement selon un taux décroissant avec la distance, autrement dit, peuvent être approchés par une fonction concave. La courbure gaussienne de l'espace des coûts est alors relativement facile à exprimer en coordonnées polaires. On a généralement une fonction du type :

$$ds/dt = g_x^2 \cos^2 \alpha + 2 g_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + g_y^2 \sin^2 \alpha$$

qui est une métrique riemannienne dont on peut envisager, pour des représentations cartographiques, différentes projections azimutales¹¹.

Les avantages de ce genre de présentation sont connus. Non seulement on peut faire des cartes centrées sur n'importe quel point mais on pourra calculer les coûts de transport (en temps) entre les lieux en connaissant seulement leur latitude et leur longitude; En calculant la courbure gaussienne, on pourra également estimer le changement introduit par une route ou une autoroute nouvelles. Si le changement se traduit par une déformation, alors une mesure comme celle que donne l'indicatrice de Tissot permettra d'évaluer le changement géométrique correspondant. Connaissant maintenant le déplacement d'une masse et le potentiel gravitationnel de Newton, on peut en déduire l'équation générale du champ de gravitation.

On suppose, comme précédemment, que le carré de l'élément linéaire en tout point M de l'espace, peut se mettre sous la forme :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, l'équation des géodésiques se simplifie et celle de Newton, pour le potentiel gravitationnel, prend la forme :

$$\Phi = - KM/r \tag{14}$$

On a successivement :

$$h_{00} = - 2 \Phi \tag{15}$$

$$g_{00} = - (1 + 2 \Phi) \tag{16}$$

$$\square^2 \Phi = 4\pi\rho \tag{17}$$

Comme le tenseur des contraintes est relié à la densité, on a :

$$T_{00} = \rho \tag{18}$$

Il en résulte qu'on a finalement :

$$\square^2 g_{00} = - 8\pi K T_{00} \tag{19}$$

où K est la constante de proportionnalité..

Point de départ de l'équation du champ, cette formule se généralise sous la forme de l'équation

$$G_{\mu\nu} = - 8\pi K T_{\mu\nu}$$

4.1 Hypothèses de validation

Le raisonnement précédent tient sous la condition qu'un certain nombre d'hypothèses soient satisfaites.

¹¹ Tobler définit $r = f(\rho)$, $\theta = \lambda$, $d^2r/dt^2 > 0$, $\rho =$ colatitude, $\theta =$ longitude. Dès lors, pour des valeurs différentes de r, on peut avoir toute une famille de projections azimutales illustrant l'espacement des distances à partir du centre de la carte. Les projections d'aires égales pour lesquelles les distances radiales augmentent avec un taux décroissant induisent des déformations sur la mappemonde.

- 1) L'espace doit être continu
- 2) Il doit être globalement isotrope (distribution plus ou moins symétrique des masses)
- 3) La courbure de l'espace est constante
- 4) A de petites distances (infinitésimales) l'espace tend à s'identifier à l'espace plat de la relativité restreinte
- 5) Le principe d'équivalence exprime l'idée que tous les systèmes de coordonnées de Gauss sont équivalents pour formuler les lois générales de la Nature.

Les problèmes d'application, en géographie, peuvent naître a priori des conditions suivantes :

- 1) L'espace n'est pas forcément continu
- 2) Les matrices peuvent être asymétriques
- 3) La courbure de l'espace n'est pas forcément constante
- 4) A petite distance, l'espace n'est pas forcément euclidien
- 5) L'équivalence des repères est en question : peut-on décrire la loi de gravitation géographique à partir de n'importe quel « repère », y compris « accéléré », c'est-à-dire qui subit lui-même l'influence du champ de gravitation?

4.2 Un début de réponse

Ces objections ne sont pourtant pas absolument irréductibles.

1) On peut toujours s'arranger, en géographie, pour calculer, à partir d'un ensemble de relevés de distances, les distances minimum dont on a besoin. Dans une topographie des temps de parcours, par exemple, les poids gaussiens peuvent être estimés pour n'importe quel point, sachant que l'allongement des distances peut être approché par cette métrique.

2) La question des matrices asymétriques peut évidemment faire problème au premier abord. Il est indéniable, en effet, que nombre de matrices géographiques sont telles que les distances $d_{\alpha\beta}$ ou les coûts $c_{\alpha\beta}$ ne sont pas symétriques. On a donc, par définition :

$$d_{\alpha\beta} \neq d_{\beta\alpha} \text{ ou encore } c_{\alpha\beta} \neq c_{\beta\alpha}$$

De sorte que :

$$G_{\alpha\beta} \neq G_{\beta\alpha}$$

Un exemple de matrice de cette forme est donné par les temps de transport de courrier aux Etats-Unis, exprimés en jours (Tobler, 1993) :

Transit time for US mail, in days (1973)						
From: \	NYC	CHI	LAX	WDC	STL	HOU
NYC	0.9	1.8	2.5	2.0	2.3	2.3
CHI	2.6	0.8	3.1	2.2	1.9	2.3
LAX	2.5	2.2	1.1	2.2	2.3	2.6
WDC	1.8	2.3	2.6	1.3	2.4	2.5
STL	2.4	2.1	3.1	2.4	0.9	2.5
HOU	2.3	1.9	2.8	2.2	2.2	1.1

Figure 5 : matrice des temps d'acheminement du courrier aux Etats-Unis (d'après W. Tobler, 1993)

D'une façon générale, nombre de réalités géographiques sont asymétriques : les champs de vent, les horaires de compagnies aériennes, les phénomènes migratoires, entre autres, en constituent des exemples.

Comment, dès lors, traiter de telles matrices dans le cadre d'un formalisme riemannien ? L'asymétrie est-elle une circonstance vraiment rédhibitoire ?

De façon quelque peu énigmatique, Tobler (1993) propose d'« ajouter » à l'expression habituelle du ds un

terme complexe. La véritable raison de cette démarche est exposée ici.

On observera d'abord que l'existence de matrices asymétriques n'a jamais empêché les physiciens de forger des modèles de champ. Dès les années 1925, dans le sillage de la théorie de Kaluza, Einstein poursuivait le but – d'ailleurs chimérique, à l'époque – d'unifier l'électromagnétisme et la gravitation. Dans ce contexte, il envisageait, à différentes reprises (1925, 1931) de développer des théories non-symétriques. «Quelle généralisation du champ est susceptible de conduire à une théorie aussi naturelle que possible ?» s'interrogeait-il encore en 1951. Et il répondait alors, de façon non ambiguë : «La réponse à cette question (...) est que le champ tensoriel symétrique doit être remplacé par un champ non symétrique. Autrement dit, il faut abandonner la condition $g_{ik} \neq g_{ki}$ pour les composantes du champ»¹². Pour ce faire, Einstein proposait dès 1931 de représenter le champ total par un tenseur «hermitien», les g_{ik} complexes jouissant de la propriété de symétrie :

$$g_{ik} = g_{ki} = \sum_{j,k} x^j x^k \quad (20)$$

Non seulement la condition $g_{ik} \neq g_{kj}$ est alors satisfaite mais on peut décomposer la forme hermitienne en deux formes bilinéaires à valeurs réelles arbitrairement choisies, l'une symétrique, notée R, l'autre antisymétrique, notée I, et telle que¹³ :

$$g(x,y) = R(x,y) + i I(x,y) \quad (21)$$

L'application à la matrice des temps de transport de courrier amène alors à décomposer les temps de transport de telle manière que l'asymétrie soit vérifiée. Cela revient à interpréter la différence entre g_{ik} et g_{ki} par la présence d'un facteur, selon le cas, accélérant ou retardant.

Évidemment, l'introduction d'un espace hermitien complique les liens de la métrique avec la courbure de l'espace et la gravitation. À strictement parler, il fait sortir de la théorie classique de la relativité. La possibilité d'une théorie de la relativité complexe a cependant été explorée plusieurs fois dans l'histoire¹⁴, et si ses résultats sont demeurés discutables, c'est parce qu'on en espérait – ce qui n'aurait aucun sens ici – l'intégration de la relativité et de la mécanique quantique dans un formalisme unitaire. Pour une application dans le domaine géographique, on peut cependant se limiter à une théorie de la gravitation. Dès lors, le formalisme précédent suffit et revient à remplacer les coordonnées réelles par des coordonnées complexes :

$$x^i = \xi^i + i \zeta^i \quad (j = 1 \text{ à } n) \quad (22)$$

La métrique de l'espace s'exprime donc comme :

$$ds^2 = G_{ik} dx^i dx^i \quad (23)$$

avec la condition d'hermiticité :

$$G_{ik} = G_{ki} \quad (24)$$

qui, comme l'a bien vu Einstein, induit certes, des complications, puisqu'il faut alors définir deux types de transport parallèles pour les vecteurs. Nous sommes conscient de la difficulté mais la solution adoptée par J. E. Charon (un tenseur métrique à la fois symétrique et complexe) est sans utilité ici. Quant à celle d'Esposito (trois variables complexes (u, z_1^u, z_2^u)) dont la première nous dit quelle structure utiliser et les deux autres représentent les coordonnées complexes elles-mêmes, elle permet uniquement de ne pas être trop dépendant de la métrique. Mais elle se réduit, pour l'essentiel, à établir un isomorphisme entre \mathbf{C}^2 et \mathbf{R}^4 , aboutissant à une théorie non symétrique dont les équations (23) et (24) donnent les formules génériques, ainsi qu'à une décomposition analogue à celle de l'équation (22). Mis à part le rapprochement opéré avec la théorie de Penrose, elle ne va donc pas bien plus loin que celle d'Einstein (1948). Nous nous en tiendrons donc à cette extension complexe de la relativité dont la métrique hermitienne asymétrique nous semble bien adaptée à l'espace géographique.

¹² A. Einstein, «Sur la théorie générale de la gravitation, l'extension de la théorie de la relativité générale, une mise en perspective historique et philosophique», *Scientific Ameciran*, vol. CLXXXII, n°4, 1951, pp. 13-17, repris dans A. Einstein, *Œuvres Choisies*, 3, *Relativités II, relativité générale et gravitation*, tr. fr. Paris, Seuil/CNRS, 1993, p. 190.

¹³ *Ibid.*, p. 171. Cf. R. Deheuvels, *Formes quadratiques et groupes classiques*, Paris, P.U.F., 1981, p. 223.

¹⁴ Cf. J. E. Charon, *Théorie de la relativité complexe*, Paris, A. Michel, 1977 ; *L'esprit et la relativité complexe*, Paris, A. Michel, 1983. Voir surtout : G. Esposito, *Complex General Relativity*, Fundamental Theories of Physics, Volume 69, Kluwer, Dordrecht, 1995.

3) D'autres problèmes nous attendent avec la question des discontinuités de l'espace géographique, souvent mises en exergue par les géographes. La difficulté d'appliquer à l'espace géographique une métrique gaussienne provient notamment des facilités de transport créées par l'introduction des moyens de communication rapides (chemins de fer, autoroutes, avions...), lesquels entraînent des complexités topologiques difficiles à traiter dans le cadre d'une variété continue. Selon Tobler (1993), la raison en est que les cercles géographiques réels peuvent être faits de pièces disjointes et présenter des « trous ». Un exemple en est donné dans le schéma suivant qui révèle la structure des trajectoires isochrones à une heure et à six heures, respectivement dans les agglomérations de Liège et de Leipzig :

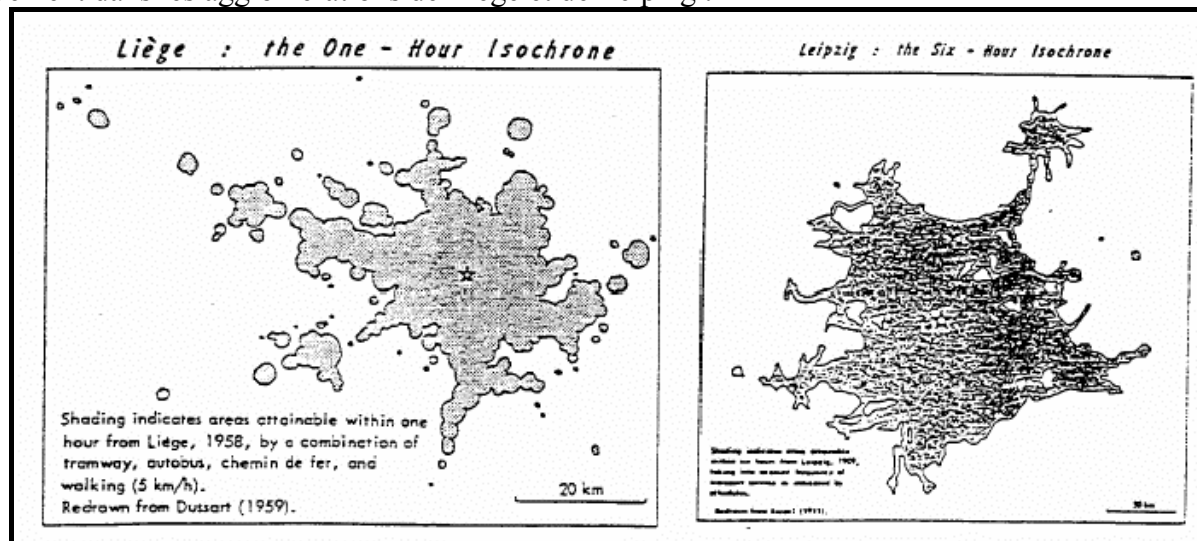


Figure 6 : Trajectoires isochrones à Liège et à Leipzig (d'après [W. Tobler, 1993])

Comment répondre à cette objection ? Face à une telle difficulté, Tobler (1993) ne voyait pas d'autre possibilité qu'un recours au formalisme réticulaire. Cependant, un travail récent d'Edelsbrunner, Harer et Zomorodian (2001)¹⁵ utilise la théorie de Morse pour lisser des variétés linéaires par partie et établir une simulation de différentiabilité (SoD paradigm). Le problème est, *mutatis mutandis*, exactement celui de Tobler. Étant donné un paysage géographique modélisé par une fonction de hauteur $h : D \rightarrow \mathbf{R}$ sur un domaine à 2 dimensions D , on peut visualiser h par un ensemble discret d'isolignes $h^{-1}(c)$, de valeurs de hauteurs constantes. La structure topologique des isolignes est alors partiellement captée par ce qu'on appelle un arbre de contour (contour tree). Si h est différentiable, on peut définir le champ de gradient formé par les vecteurs dont la direction est orientée dans le sens de la pente ascendante la plus raide. Plusieurs recherches ont d'ailleurs été menées sur ce champ de vecteurs. Le propre du complexe de Morse est de recueillir les caractéristiques du champ en décomposant la variété en cellules de flots uniformes. Ce faisant, le complexe de Morse représente une analyse complète du comportement du champ de vecteurs. Très souvent, cependant, le domaine lisse D est échantillonné. Quelle que soit alors la densité de l'échantillonnage, on est en butte à deux difficultés : d'une part, le cadre théorique, fondé sur des structures lisses, n'est plus valable, et, d'autre part, on a à distinguer entre forme et bruit dans les structures échantillonnées. Les auteurs résolvent la question en étendant la construction des complexes de Morse à des variétés linéaires par partie en assurant l'intégrité structurale du domaine et en simulant sa différentiabilité. Ils simplifient alors les complexes de Morse en annulant des paires de points critiques dans l'ordre de la persistance topologique croissante (la persistance topologique d'un point critique a est la différence de hauteur absolue $p(a) = |h(b) - h(a)|$ si a est couplé avec b , $p(a)$ étant égal à $+\infty$ si a n'est couplé avec aucun autre point). Le résultat est spectaculaire. Convertie en sphère triangulée, la grille rectangulaire mesurant les hauteurs donne des complexes de Morse à l'allure de variétés différentiables.

¹⁵ H. Edelsbrunner, J. Harer, A. Zomorodian, *Annual Symposium on computational geometry archive, Proceedings of the seventies annual symposium on Computational geometry*, Medford, Massachusetts (USA), 2001, pp. 70-79.

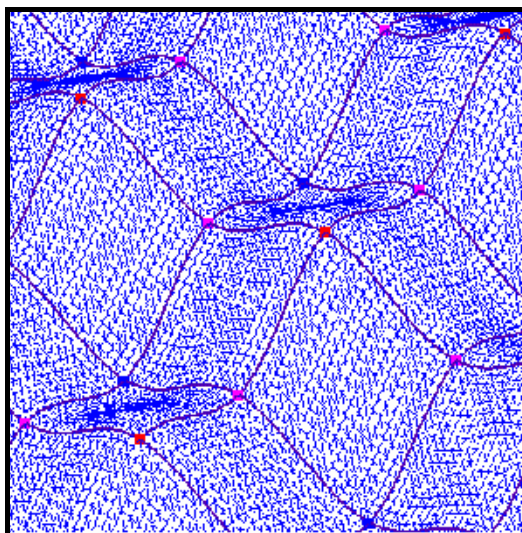


Figure 7 : Représentation lissée d'une zone de montagne iranienne selon la méthode du complexe de Morse simplifié ($h(x,y) = \sin x + \sin y$) (D'après H. Edelsbrunner, J. Harer, A. Zomorodian, 2001)

Il est donc possible, en cas d'espaces discrets, de rétablir la continuité. On connaissait, du reste, depuis longtemps, des méthodes plus simples, telle que la méthode des moindres carrés et les procédures d'interpolation classiques (Béguin, Pumain, 1994, 2000). Plus récemment, des procédures d'interpolation géostatistiques et des simulations avec des distances non-euclidiennes ont été proposées par K. Krivoruchko et A. Gribov, dans un exposé au colloque Geo-ENV IV à Barcelone¹⁶. Les auteurs montrent en effet qu'en présence de bords ou de fractures, les corrélations fondées sur des distances euclidiennes ne sont plus valables. Ainsi le brouillard est bloqué par le relief, les migrations animales contournent les lacs, les montagnes et les établissements de population, les polluants suivent les côtes, etc. Utilisant alors une distance pondérée par le coût, les auteurs proposent une fonction qui calcule le coût de déplacement d'une cellule de la grille à la suivante, afin de rendre ensuite plus « naturel » le choix de la métrique d'interpolation. Ils montrent aussi comment choisir un modèle de covariance valable avec des barrières définies par des surfaces de coût et illustrent leur approche sur deux bases de données : l'une concernant la propagation de l'ozone en Californie (où les montagnes jouent le rôle de barrières naturelles) et l'autre la dérive de nutriments dans la baie de Chesapeake (où la côte est une barrière non transparente pour la propagation chimique).

4) Tous ces exemples montrent que les géographes parviennent souvent à rétablir la continuité de l'espace, même en présence d'asymétries, de dénivellations, de bords ou de ruptures. C'est un problème plus grave de savoir si l'on peut toujours, dans les variétés géographiques riemanniennes, retrouver l'espace tangent euclidien à la limite d'approximation newtonienne du champ de gravitation. On sait qu'on rétablit le caractère euclidien de l'espace si on sait définir des géodésiques, (identifiables localement à des droites à petites distances). Le calcul de géodésiques a été récemment unifié par la considération de « flots géodésiques ». Généralement, la démarche en géodésie géométrique, qui vise toujours à donner la meilleure représentation possible des géodésiques, conduit à projeter celles-ci, ainsi que la variété sur laquelle elles sont définies, dans un espace plat, ce qui revient à identifier la métrique de la variété (ds^2) à celle de l'espace plat (dS^2), et oblige à poser un système d'équations aux dérivées partielles difficile à résoudre analytiquement. Une méthode alternative consiste à utiliser les transformations conformes, sachant qu'on peut facilement obtenir l'espace plat cherché à partir d'une variété riemannienne conforme (transformations de Brinkmann)¹⁷. On peut utiliser le même procédé dans le cas géographique, ce qui permettrait d'éliminer le problème de savoir à quelle échelle on retrouve la métrique euclidienne.

¹⁶ K. Krivoruchko et A. Gribov, «Geostatistical interpolation and simulation with non-euclidean distances», Proceedings of the Geo-ENV IV, Barcelona, December 2002, eds X. Sanchez-Vila, J. Carrera, J. Jaime Gomez-Hernandez, Cluwer Academic Publishers, 2004.

¹⁷ R.J. You, « Geodesy beyond 2000 : An attempt to unify geodesy by the geodesic flow in all branches », in *Geodesy beyond 2000, the challenges of the first decade*, IAG Assembly, Birmingham, July 19-30 1999, ed. Klaus Peter Schwartz, Springer Verlag, 2000.

5) Il arrive aussi que l'on puisse estimer des métriques par des formules simples. Ainsi, d'après Tobler (1993), les distances routières entre villes suédoises sont apparemment des fonctions linéaires des distances des grands cercles d'activité. En Suède, le multiplicateur M est égal à 1,21 fois la distance à vol d'oiseau. Aux USA, M (est-ouest) = 1,15; M (nord-sud) = 1,15. Il semble que les plus grandes déviations par rapport à ces nombres interviennent pour les distances les plus courtes, près de l'origine. Ainsi, la déviation décroît en pourcentage avec la distance. On peut alors s'attendre à ce qu'elle présente des différences mineures avec les valeurs calculées à partir d'une métrique sphérique ou sphéroïde. Mais, comme le montre Tobler, il ne suffira pas toujours d'introduire un léger facteur correctif dans la formule du tenseur métrique : en géographie, les océans compliquent tout.

4.3 Au-delà des espaces de Riemann

Face aux difficultés rencontrées pour appliquer le formalisme riemannien classique en géographie, on peut évidemment se poser la question de savoir s'il serait possible d'utiliser d'autres espaces plus généraux. Répondre à cette question suppose alors l'exploration des possibilités mathématiques offertes dans la littérature.

Rappelons qu'une variété riemannienne est une variété lisse, de Hausdorff, dénombrable et différentiable, équipée d'une métrique riemannienne (c'est-à-dire différents choix possibles de produits intérieurs sur les espaces tangents). Cette métrique permet de mesurer des quantités géométriques comme les distances et les angles.

Plus précisément, une métrique riemannienne sur une variété lisse M est un champ de 2-tenseurs $g \in \mathcal{T}^2(M)$ qui est :

1° Symétrique : $g(X,Y) = g(Y,X)$

2° défini positif : $g(X,X) > 0$ si $X \neq 0$.

3° racine carrée d'une forme quadratique : tout comme dans la géométrie euclidienne, si p est un point d'une variété riemannienne (M,g) , la longueur ou la norme de tout vecteur tangent $X \in T_pM$ est : $\|X\| := \langle X,X \rangle^{1/2}$.

On peut naturellement abandonner certaines de ces conditions. Il y a, bien entendu, plusieurs formes d'espaces et de métriques, et il existe également de nombreuses façons de mesurer la longueur d'un vecteur tangent sur des variétés lisses. Quatre d'entre elles, en particulier, jouent un rôle important en mathématiques : ce sont les métriques hermitiennes, les métriques pseudo-riemanniennes, les métriques de Finsler, et les métriques sous-riemanniennes. On les obtient chaque fois en affaiblissant chacun des réquisits définissant les métriques proprement riemanniennes :

1° Les métriques hermitiennes

L'abandon de la symétrie du champ de 2-tenseurs, nous l'avons vu, conduit à remplacer le produit scalaire euclidien ou pseudo-euclidien par un produit scalaire hermitien associé à un espace vectoriel complexe. Il s'agit là, cependant, davantage d'un affaiblissement de la symétrie plutôt que d'une perte totale, puisque

$g_{ik} = g_{ki}$. Comme on l'a vu, il y a là, cependant, une solution pour continuer d'associer une métrique quasi-riemannienne à des espaces géographiques et continuer de leur associer, via la courbure et les géodésiques, des phénomènes gravitaires.

2° Les métriques pseudo-riemanniennes

Ce sont celles que l'on utilise en théorie de la relativité, et qui conviendraient donc également dans un premier temps en géographie dans le cas où l'on garde une formule de gravitation en $1/d^2$. Par rapport à la métrique riemannienne classique, on garde ici l'idée d'un champ de 2-tenseurs symétrique sur l'espace tangent mais on abandonne le fait que les formes dans lesquelles il s'explique soient nécessairement définies positives. On réclamera seulement que le champ de 2-tenseurs soit non-dégénéré, ce qui veut dire que le seul vecteur orthogonal à tout est le vecteur zéro. Étant donné une base (E_1, \dots, E_n) de T_pM , g prend la forme :

$$g = -(\phi^1)^2 - \dots - (\phi^r)^2 + (\phi^{r+1})^2 + \dots + (\phi^n)^2$$

où r , nommé l'index de g , est un entier tel que $0 \leq r \leq n$.

Les plus importantes de ces métriques non-riemanniennes sont les métriques de Lorentz, qui sont des métriques

pseudo-riemanniennes d'index 1. L'exemple le plus important est la métrique de Minkowski qui est la métrique de Lorentz m sur \mathbf{R}^{n+1} , écrite en termes de coordonnées $(\xi^1, \dots, \xi^n, \tau)$:

$$m = (d\xi^1)^2 + \dots + (d\xi^n)^2 - (d\tau)^2$$

Dans le cas précis de \mathbf{R}^4 , la métrique de Minkowski est, comme on l'a vu, l'invariant fondamental de la théorie de la relativité restreinte d'Einstein, ce qui peut être exprimé brièvement en disant que, en l'absence de gravité, les lois de la physique ont la même forme dans tout système de coordonnées où la métrique de Minkowski a cette expression. La différence de caractéristiques physiques entre les trois dimensions de l'espace et l'unique dimension du temps vient de ce que, sur ces dimensions, la métrique g est tantôt définie positive (espace) tantôt définie négative (temps). La théorie de la relativité générale inclut les effets gravitationnels en permettant à la métrique de varier point par point.

3° Les métriques de Finsler

On peut maintenant abandonner l'expression quadratique du tenseur, mais en imposant tout de même certaines conditions à la fonction $f : T_pM \rightarrow \mathbf{R}$ qui définit une norme sur l'espace tangent. On supposera en particulier qu'elle doit être lisse sur le complément de la section zéro, ce qui signifie en clair que :

- (i) $F(X) > 0$ pour $X \neq 0$;
- (ii) $F(cX) = |c| F(X)$ pour $c \in \mathbf{R}$;
- (iii) $F(X + Y) \leq F(X) + F(Y)$.

Une telle métrique est nommée une métrique de Finsler et la géométrie associée est la géométrie des variétés finslériennes. Les espaces de Finsler ont fait partie des interrogations de Waldo Tobler à propos du traitement des matrices géographiques non symétriques. En effet, il n'est pas réclamé ici du champ de tenseurs qu'il soit symétrique et la métrique peut être n'importe quelle fonction (pas forcément quadratique), pourvu qu'elle soit linéaire et positive dans le complément de zéro..

4° Les métriques sous-riemanniennes

On peut encore recenser des métriques sous-riemanniennes en abandonnant l'idée de définir la métrique sur la totalité de l'espace tangent et en restreignant au contraire cette métrique à une métrique fibrée sur une distribution lisse S incluse dans T_pM (autrement dit, en la restreignant à un champ de k -plans ou à un sous-fibré de T_pM). Nous laisserons ces cas (métrique riemannienne singulière ou métrique de Carnot-Carathéodory), qui concernent essentiellement des applications physiques particulières (notamment en théorie du contrôle).

On notera que, dans tous ces affaiblissements des axiomes de départ, on reste quand même au voisinage immédiat des espaces de Riemann. Les métriques hyperboliques, comme celle qui s'applique à la géométrie des centres-villes ou géométrie du taxi (taxicab geometry) en font naturellement partie et ne nous éloignent pas trop de la modélisation du phénomène gravitaire.

Une généralisation un peu plus avancée consisterait à prendre en considération la question de l'échelle. Nombre d'événements, en géographie, sont liés à l'échelle d'analyse où on se place. Une véritable démarche scientifique suppose cependant qu'on puisse accéder à des phénomènes objectifs présentant une relative indépendance par rapport au point de vue du descripteur. D'où la nécessité de définir des invariants d'échelle.

Une telle démarche a été entreprise en physique, dans le but de mettre en relation la macro-physique associée à la théorie de la relativité, et la micro-physique décrite par la mécanique quantique. Devant le caractère fractal des trajectoires particulières en mécanique quantique, le physicien Laurent Nottale¹⁸ a imaginé de faire jouer la relativité dans un espace fractal et, pour ce faire, de transposer les principes de la relativité du mouvement et de la covariance au plan de l'échelle. Sa théorie repose sur deux postulats fondamentaux :

Postulat 1 : «Les lois de la physique doivent s'appliquer à des systèmes de coordonnées quel que soit leur état d'échelle»

Postulat 2 : «Les équations de la physique gardent la même forme (sont covariantes) sous des transformations d'échelles (i.e des contractions et des dilatations)»

Bien que la théorie de Laurent Nottale soit discutée sur le plan scientifique et qu'elle pose un certain nombre de problèmes actuellement non résolus, on peut la voir, cependant, comme une étape intéressante. Pour le

¹⁸ L. Nottale, *Fractal space-time and microphysics, towards a theory of scale relativity*, Singapore, World Scientific, 1993, p. 26.

géographe, qui a souvent affaire à des réalités fractales (réseaux routiers, modèles de croissance de villes, morphologies de communautés virtuelles sur Internet, etc.), elle pourrait constituer un encouragement à chercher, au-delà des différences d'échelles, des invariants relativistes susceptibles de contribuer à définir des constantes caractéristiques des espaces géographiques et à les relier au phénomène gravitaire qui vaut, en principe, comme on l'a rappelé au début, à toutes les échelles.

Conclusion

Nous avons conscience de nous être aventuré assez loin de nos terres d'origine et sur un terrain quelque peu mouvant. La justification de notre démarche est qu'une réflexion épistémologique doit accompagner l'exportation des modèles victorieux dans une discipline en directions de champ nouveau. De ce point de vue, on ne doit pas se cacher les difficultés qu'apporte la perspective d'une généralisation du modèle gravitaire. Il nous faut répéter cette évidence, connue des géographes, que l'espace sur lequel ils travaillent est complexe et multiplement différencié. C'est pourquoi, à côté de sa représentation banale en espace euclidien, de nombreuses possibilités alternatives existent. La géographie connaît donc, comme la physique, toutes sortes d'espaces susceptibles d'être modélisés par les « nouvelles » géométries issues de la réflexions des mathématiciens de la fin du XIXe siècle. Parmi elles, la géométrie riemannienne, bien adaptée à la théorie de la relativité, pourrait jouer un rôle de fil conducteur en analyse spatiale. Comme nous l'avons montré, elle devrait permettre, au moins dans les cas les plus simples, de généraliser le modèle gravitaire de façon rigoureuse. Mais beaucoup d'autres situations se profilent et d'autres modèles restent encore envisageables. C'est pourquoi, le travail présenté ici doit être davantage considéré comme un programme de recherche que comme un aboutissement.

Bibliographie

- Abler, R.F., Adams, J. and Gould, P., *Spatial organization, the geographer's view of the world*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- Béguin, M., Pumain, D., *La représentation des données géographiques*, A. Colin, 1994, 2000.
- Brunet, R., Dolfuss, O., *Mondes Nouveaux*, Paris, Hachette/Reclus, 1990.
- Cauvin C., *Espaces cognitifs et transformations cartographiques*. Thèse de doctorat d'Etat, Université de Strasbourg, avec 30 pages sur la géométrie des espaces cognitifs, dont la géométrie riemannienne) ; 1984.
- Cauvin, C., « Au sujet des transformations géographiques de position », *Cybergéo*, 14/01/97.
- Charon, J.E., *Théorie de la relativité complexe*, Paris, A. Michel, 1977.
- Charon, J.E., *L'esprit et la relativité complexe*, Paris, A. Michel, 1983.
- Cicéri, M.F., Marchand, B. Rimbart, S., *Introduction à l'analyse de l'espace*, Paris Masson,, 1977.
- Deheuvels, R., *Formes quadratiques et groupes classiques*, Paris, P.U.F., 1981
- Edelsbrunner, H., Harer, J., Zomorodian, A., *Annual Symposium on computational geometry archive, Proceedings of the seventies annual symposium on Computational geometry*, Medford, Massachusetts (USA), 2001, pp. 70-79.
- Einstein, A., *Œuvres choisies*, 2 et 3, Relativités (I,II), tr.fr., Paris, Ed. du Seuil, 1993
- Esposito, G., *Complex General Relativity*, Fundamental Theories of Physics, Volume 69, Kluwer, Dordrecht, 1995.
- Harvey, D., *Explanation in Geography*. New York, NY: St. Martin's Press, 1969.
- Isnard, H., Racine, J.B., Reymond, H., *Problématiques de la géographie*, Paris PUF, 1981.
- Kruvovichko K., et Gribov, A., «Geostatistical interpolation and simulation with non-euclidean distances», Proceedings of the Geo-ENV IV, Barcelona, December 2002, eds X. Sanchez-Vila, J. Carrera, J. Jaime Gomez-Hernandez, Cluwer Academic Publishers, 2004.
- Künzi, H.P.A., « Nonsymmetric distances and their associated topologies : About the origines of basic ideas in the area of asymmetric topologie », in C.E. Aull and R. Lowen, eds, *Handbook of the History of General Topology*, Vol. 3, Dordrecht, Cluwer, 2000.
- Lee, J., *Riemannian Manifolds, an introduction to curvature*, New York, Springer Verlag, 1987.
- L'Hostis, A., *Images de synthèse pour l'Aménagement du territoire : la déformation de l'espace par les réseaux de transport rapide*, thèse de doctorat en Aménagement de l'espace et Urbanisme, Tours, 7 janvier 1997
- Miller, H.J., « Geographic representation in spatial analysis », *J.Geograph. Syst.* (2000), 2, 55-60.
- Minvielle, E., Souiah, S.A., *L'analyse statistique et spatiale*, Paris, Editions du temps, 2003.
- Müller, J C, 1982, « Non-Euclidean geographic spaces: Mapping functional distances », *Geographical Analysis* 14, 189-203.
- Nottale, L., *Fractal space-time and microphysics, towards a theory of scale relativity*, Singapore, World Scientific, 1993.
- Parrochia, D., *Cosmologie de l'information*, Paris, Hermès, 1993.
- Parrochia, D., *Les grandes révolutions scientifiques du XXe siècle*, Paris, P.U.F., 1997.
- Pumain, D., Saint-Julien, T, *L'analyse spatiale*, A. Colin, 1997.
- Reymond, H., Racine, J.B., *L'analyse quantitative en géographie*, PUF, 1973
- Shiode, N., and Dodge, M., *Using GIS to analyse the spatial pattern of the Internet in the United Kingdom*. A paper presented at the GIS Research UK 6th National Conference, 31st March - 2nd April 1998, Edinburgh, UK.
- Tobler, W., « Geographic Area and Map Projections », *The Geographical Review*, LIII, 1 (1963), pp. 59-78; réimprimé dans B. Berry

and D. Marble, eds., *Spatial Analysis*, Prentice Hall, 1968, pp. 78-90; traduit en « Geographischer Raum und Kartenprojektionen » (sans appendice mathématique), pp. 262-277 de D. Bartels, ed., *Wirtschafts und Sozialgeographie*, Köln, Kiepenheuer und Witsch, 1970. Republié dans S. Angell & G. Hyman, *Urban Fields*, Pion, London, 1976.

Tobler, W., « The geometry of mental maps », in *Spatial Choice and Spatial Behavior*. Eds R. Golledge and G. Rushton, Columbus: Ohio State University Press, 1976, pp. 69-91.

Tobler, W., « Smooth Pycnophylactic Interpolation for Geographical Regions ». *J.A.S.A.*, 74:519-530, 1979.

Tobler, W.; Chen, Z., « A Quadtree for Global Information Storage », *Geographical Analysis*, 18(4), 1986, 360-371.

Tobler, W., « Frame Independent Spatial Analysis ». In: *Accuracy of Spatial Data Bases*. (Eds: Goodchild, M.; Gopal, S) Taylor & Francis, London, 1990, 115-122.

Tobler, W., « Non-Isotropic Geographic Modelling », (Presented at the NCGIA Social Science Conference, Santa Barbara, Feb 1991; Also in NCGIA TR-93-1, Feb. 1993)

Tobler, W., « Preliminary Representation of World Population by Spherical Harmonics », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 89, 1993, 6262-6264.

Tobler, W., « Three presentations on geographical analysis and modeling », 1993, <http://www.geodissey.com/papers/tobler93.html>.

Worboys, M.F., « Metrics and topologies for geographic space », *Proc. 7th Intern. Symposium Spatial Data Handling*, Delft, Netherlands, 2000.

You, R.J., « Geodesy beyond 2000 : An attempt to unify geodesy by the geodesic flow in all branches », in *Geodesy beyond 2000, the challenges of the first decade*, IAG Assembly, Birmingham, July 19-30 1999, ed. Klaus Peter Schwartz, Springer Verlag, 2000.

Zaustinski, E.M., *Spaces with non symétrie distance*, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 34, 1959.

© CYBERGEO 2006

PARROCHIA D., *Cybergeo*, n°337, 23/05/2006 : <http://www.cybergeo.presse.fr>