Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire

Presentation of a model to analyse reasoning processes in primary school

Patrick Gibel

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/educationdidactique/2278>

DOI : [10.4000/educationdidactique.2278](https://doi.org/10.4000/educationdidactique.2278)

ISSN : 2111-4838

Éditeur

Presses universitaires de Rennes

Édition imprimée

Date de publication : 30 septembre 2015

Pagination : 51-72

ISBN : 978-2-7535-4284-6

ISSN : 1956-3485

Référence électronique

Patrick Gibel, « Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire », *Éducation et didactique* [En ligne], 9-2 | 2015, mis en ligne le 30 septembre 2017, consulté le 08 décembre 2020. URL : <http://journals.openedition.org/educationdidactique/2278> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.2278>

MISE EN ŒUVRE D'UN MODÈLE D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Patrick Gibel
Laboratoire LACES-E3D, université de Bordeaux

Cet article vise à établir la pertinence d'un modèle destiné à analyser les raisonnements produits dans des situations didactiques comportant une dimension recherche. Notre souhait est, d'une part de décrire précisément le modèle, afin de pouvoir mettre en évidence les éléments qui structurent l'analyse des situations ; d'autre part, de montrer qu'il est aussi utilisable dans des analyses de corpus, même dans un contexte éloigné de celui qui nous a servi initialement d'appui pour sa conception.

Le modèle, élaboré à partir de la théorie des situations didactiques et de la sémiotique de C.S. Peirce, offre la possibilité d'analyser les raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant dans des situations d'action, de formulation mais aussi en situation de validation. Nous l'utiliserons dans le cadre de l'étude approfondie d'une séquence, élaborée par G. Brousseau, visant à favoriser la pratique du raisonnement et à faire découvrir les règles du jeu de la preuve à des élèves de CM2.

Mots-clés : raisonnement, arithmétique, preuve, argumentation, sémiotique, répertoire didactique.

Presentation of a model to analyse reasoning processes in primary school

This paper aims at establishing relevance of a model to analyse reasoning processes in problem solving situations. We would like to describe our model of analysis on one hand in order to highlight the main elements which structure the analysis, on the other hand to show his interest to analyse lesson, even in a context further from this one used during his conception.

This model, made mainly within the frameworks of the theory of didactical situations and Pierce's semiotic theory, allows to characterize reasoning processes, elaborated by the pupils and the teacher, during situation of action, situation of formulation and also in situation of validation. We will exemplify this model to study reasoning processes elaborated during a lesson, produced by Brousseau, aiming at favouring reasoning process and at revealing the rules of the games of the proof to pupils, in primary school (pupils aged 10 to 11).

Keywords : reasoning, arithmetic, proof, argumentation, semiotics, didactical settings.

INTRODUCTION

Nous avons montré, dans une précédente recherche (Bloch & Gibel, 2011), l'intérêt de notre modèle d'analyse des raisonnements en effectuant une étude détaillée des raisonnements apparaissant dans le déroulement d'une séquence, dans le domaine de l'Analyse, portant sur la notion de limite de suites, en classe de Première scientifique. Cet article vise à montrer l'étendue de son domaine de validité et sa robustesse en mettant en lumière son utilité et sa pertinence afin d'analyser les raisonnements produits lors d'une séquence de mathématiques, comportant une dimension recherche, en classe de CM2 (élèves âgés de 10 à 11 ans).

La première partie de l'article a pour objet de présenter les caractéristiques du modèle élaboré précédemment (*ibidem*). Nous commençons par définir ce que nous appelons *raisonnement* dans le cadre de notre recherche en didactique des mathématiques, puis nous explicitons les principales caractéristiques de notre modèle d'analyse. Ensuite nous formulons les raisons pour lesquelles la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), notée dans la suite de l'article (TSD), et la sémiotique de Pierce sont à la fois complémentaires et nécessaires à l'élaboration de notre modèle. Ce dernier permet d'effectuer une analyse *a posteriori* détaillée des raisonnements apparaissant dans les situations didactiques (Brousseau, 1998). L'identification des raisonnements repose sur une analyse sémiotique des observables s'appuyant sur une caractérisation de leur nature mais également de leurs fonctions, en lien avec les conditions de leur élaboration. Nous nous attacherons aussi à identifier les connaissances et les savoirs qui sous-tendent ces raisonnements.

Dans la deuxième partie, nous présentons la situation « Le nombre le plus grand », objet de notre étude. À partir d'un problème mathématique, initialement proposé par Glaeser (1999), Brousseau a élaboré une ingénierie spécifique, expérimentée dans une classe du COREM1. Cette séquence a été mise en œuvre en classe de CM2. Elle vise principalement la compréhension et la mise en pratique des règles du jeu de la preuve. Nous explicitons les enjeux et les spécificités de cette ingénierie et nous proposons une analyse *a priori* détaillée de cette séquence en définissant les différents niveaux de milieux liés aux situations d'action, de formulation et de validation.

La troisième partie de l'article rend compte de la mise en œuvre effective de notre modèle dans le but d'identifier et de caractériser les différentes formes de raisonnements, valides et erronés, associés aux différents niveaux de milieux, dans la séquence étudiée. Nous présentons, de façon détaillée et structurée, les fonctions des raisonnements apparaissant dans différents épisodes ainsi que les connaissances et les savoirs mobilisés, donnant ainsi à voir l'intérêt du modèle. En nous appuyant sur cette analyse, nous nous efforcerons de déterminer les effets de cette leçon sur les apprentissages des élèves du point de vue des connaissances et des savoirs mais aussi du point de vue de la portée des arguments produits par les élèves en situation de validation.

PRÉSENTATION DU MODÈLE D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS

Caractérisation du raisonnement

La détermination d'un raisonnement produit par un sujet: notion de « situation »

En classe de mathématiques, à l'école primaire, le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons pris comme définition initiale celle proposée par P. Oléron :

« Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but » (Oléron, 1977, p. 10).

Pour affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont le plus souvent en grande partie implicites, il est nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être considéré, par le chercheur, comme un « raisonnement effectif ».

Dans le cadre d'une recherche sur l'usage et le traitement des raisonnements des élèves par les professeurs (Brousseau & Gibel, 2005), nous avons mis en évidence que, souvent, en situation didactique, le professeur relève, dans les formulations des élèves, des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la

leçon que du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. Par conséquent pour pouvoir déterminer et analyser objectivement les raisonnements produits pas les élèves, le chercheur doit donc suivre une autre voie. Il convient qu'il montre que tel raisonnement complet, dont il ne perçoit parfois qu'une partie ou que des indices, est bien celui qu'il convient d'attribuer à son auteur.

Pour cela il convient de montrer que le « supposé raisonnement » vérifie les conditions suivantes :

- 1) Il pourrait être explicité par le sujet ou, au moins, la connaissance, utilisée implicitement ou explicitement, est connue de la classe, autrement dit qu'elle appartient au *répertoire didactique* de la classe, nous définirons précisément ce terme dans la suite de l'article ;
- 2) Il est utile dans le sens où il réduit une incertitude car une autre connaissance aurait pu être mobilisée par le sujet ;
- 3) Il est motivé par un avantage qu'il procure au sujet. Il est l'instrument d'une modification de son environnement qui lui paraît favorable ;
- 4) Le raisonnement est motivé par des raisons « objectives », qui lui sont propres : arguments de pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation, qui justifient ce raisonnement-là (et pas un autre) par opposition à l'idonéité *i.e.* la conformité aux attentes du professeur.

Le chercheur doit donc montrer que la production du raisonnement prêté au sujet est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec les connaissances dont il dispose.

Ainsi, comme nous l'avons explicité (Brousseau & Gibel, 2005), parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques-unes seulement – le moins possibles – peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent qui est appelé « situation » dans la TSD. La situation est une partie seulement du contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonne-

ment faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet.

Ce point de vue est un peu différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects. Un raisonnement faux n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude. La théorie des situations a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire sont essentiellement modélisables par des inférences. Mais cette caractérisation doit être complétée car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités non verbales aussi bien que par des assertions, ce qui nous amène à formuler la définition suivante :

Un *raisonnement* est donc une relation R entre deux éléments A et B telle que :

A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;

B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;

R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un *raisonnement effectif* comprend de plus un agent E, élève ou professeur, qui utilise la relation R ainsi qu'un projet déterminé par une situation dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par l'agent ou il peut lui être prêté par le chercheur à partir d'indices.

Classification des raisonnements d'après leur fonction et le type de situation

En conclusion du paragraphe précédent, un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, par le rôle qu'il y joue. Cependant un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, par exemple décider d'une action à effectuer, informer, convaincre, expliquer. Elles sont différenciées par des modèles de situations mathématiques (situation d'action, situation de formulation, situation de validation) généraux mais différents. Pour une présentation plus détaillée nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Brousseau (1998).

De plus, à un moment donné du déroulement d'une leçon, on peut identifier, suivant les intentions des participants, un très grand nombre de situations plus ou moins « emboîtées ». Nous expliciterons et illustrerons, dans la dernière partie de l'article, cette notion de « situations emboîtées » dont la définition repose sur le concept de « schéma de la structuration du milieu » très fréquemment utilisé en TSD.

Les raisonnements qui apparaissent dans les situations didactiques se rapportent à leurs différentes composantes, telles que décrites dans la théorie didactique des situations mathématiques.

Dans les situations adidactiques, le raisonnement est produit par des élèves, pour les besoins de la résolution, sans intervention, appui, ni recours à l'enseignant :

soit comme un moyen pour un ou plusieurs élèves d'établir leurs décisions dans les situations d'action ;

soit comme un moyen d'appui un peu formel, pour préciser une information dans une situation de formulation ;

soit comme un moyen de convaincre un ou des condisciples de la validité lors d'une situation de validation.

Dans les situations didactiques, le raisonnement de l'élève s'adresse principalement à l'enseignant :

soit pour justifier une action ou pour produire une réponse ;

soit pour satisfaire une demande explicite ou implicite du professeur ; formellement il est une justification considérée comme un objet de l'enseignement en cours, indépendamment de son rapport avec l'action engagée, il s'apparente alors à une citation.

L'identification des raisonnements

Afin de pouvoir étudier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer les raisonnements apparaissant dans les productions des élèves, il convient de définir ce qui, pour le chercheur, est assimilable à un « raisonnement », pour cela il faut :

Identifier des observables (textes, gestes, paroles, dessins, etc.) produits par un élève, par plusieurs élèves en interaction ou par l'enseignant ;
Relier ces observables par une relation « rationnelle » telle que cette relation s'exprime dans le langage du chercheur, différent *a priori* de celui des protagonistes. De plus cette dernière attribue à ces observables un rôle dans la réalisation du projet proposé par la situation convenue ou dans celle de l'un de ses modèles qui ont la charge de représenter les intentions possibles des protagonistes. Cette relation peut être hypothétique ou formelle ;
Identifier un actant : professeur, élève ou groupe d'élèves à qui est attribué l'établissement de la relation dans le cadre d'un projet qui lui est prêté ;
S'il s'agit d'une hypothèse, établir qu'elle est valide, en montrant, éventuellement à l'aide d'autres indices, qu'elle est la moins improbable des explications.

Il est à noter que parmi les raisonnements détectés par le chercheur, certains d'entre eux peuvent être attribués à un ou à plusieurs des protagonistes bien que ces derniers ne les aient pas nécessairement identifiés comme tel.

La TSD comme fondement de notre modèle

L'analyse fine des raisonnements produits en situation de validation ne peut se restreindre à une analyse en termes de calcul propositionnel basée sur la logique dialogique de Lorenzen (1967), comme l'indique Durand-Guerrier (2007). Cette dernière met en évidence que le modèle de Lorenzen ne suffit pas pour comprendre et analyser l'activité mathématique en situation de validation et elle fait l'hypothèse que ce modèle :

« contribue à donner [de l'activité mathématique] une image déformée, en exacerbant le travail sur les énoncés au détriment du travail sur les objets, leurs propriétés et les relations mutuelles qu'ils entretiennent » (Durand-Guerrier, 2007, p. 23).

Barrier (2008), s'appuyant sur cette précédente recherche, met à son tour en évidence la limite du modèle de Lorenzen pour l'analyse de situation de validation explicite et justifie ainsi la nécessité de proposer un modèle qui tienne compte de la dimension sémantique des raisonnements produits par les élèves. Il insiste sur le fait qu'il n'est pas possible, lors de l'analyse fine des dialogues en situation de validation, de séparer le travail sur les objets, qui constituent le milieu, du travail sur les énoncés produits par les élèves. Afin d'intégrer cette dimension sémantique, Barrier fait le choix d'analyser les interactions entre élèves en utilisant la sémantique de Hintikka et Sandu (1997) permettant ainsi de conjuguer l'analyse syntaxique et l'analyse sémantique des raisonnements.

Cette nécessité de tenir compte, lors de l'analyse des raisonnements, de la dimension sémantique, a contribué à conforter et justifier notre décision de prendre la TSD comme fondement de notre modèle. En effet cette dernière permet d'analyser les actions du sujet sur les différents milieux, permettant ainsi de rendre compte de la dimension sémantique des raisonnements.

Un postulat de notre travail est que la TSD fournit un cadre privilégié pour cette étude, et notamment que l'analyse des fonctions du raisonnement dans les niveaux de milieux permet une catégorisation des raisonnements. Ce cadre doit cependant être nécessairement complété par des outils d'analyse locale, et par une analyse des fonctions des raisonnements (Gibel, 2004) et des signes, formels et langagiers, qui le soutiennent. Pour cette dernière fonction nous utilisons les outils d'analyse issus de la sémiotique peircienne (Bloch & Gibel, 2011 ; Bloch, 2008) que nous allons nous attacher à justifier et à caractériser dans le paragraphe suivant.

Dimension sémiotique de l'analyse des raisonnements

Dans la première partie de l'article nous avons mis en évidence que les raisonnements apparaissant en situation de classe peuvent se traduire sous des formes très diverses : éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques que nous nous devons d'interpréter en référence à différents registres de représentation (Duval, 1996). Par conséquent l'analyse sémiotique constitue l'une des dimensions de notre

modèle, complétant naturellement celles précédemment exposées : d'une part la fonction des raisonnements, d'autre part le niveau de milieu correspondant autrement dit les conditions dans lesquelles le raisonnement a été élaboré. Les représentations sémiotiques ne sont mobilisées et développées que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d'autres représentations sémiotiques comme le souligne Duval :

« Ce sont ces transformations sémiotiques qui sont importantes et non les relations fondamentales explicitées dans les différentes théories sémiotiques » (Duval, 2006, p. 49).

De plus l'auteur met en lumière cette nécessité inhérente aux pratiques mathématiques en ce qui concerne les signes : les possibilités de transformation des représentations.

« Cette exigence a commandé le développement d'un symbolisme spécifique aux mathématiques, avec la représentation des nombres, avec l'Algèbre, avec l'Analyse. Elle traduit le fait que la fonction primordiale des signes et des représentations en mathématiques, n'est ni la communication, ni l'évocation d'objets absents mais le traitement d'informations, c'est-à-dire la transformation intrinsèque de leurs représentations en d'autres représentations pour produire de nouvelles informations ou de nouvelles connaissances » (Duval, 2006, p. 57).

Ce qui va nous intéresser, lors de l'analyse de la séquence que nous détaillerons dans les parties 2 et 3, c'est effectivement la transformation de la représentation des nombres tant du point de vue des signes utilisés que du point de vue de leur(s) statut(s) dans la relation didactique. Lors de l'analyse du déroulement de cette séquence nous allons nous attacher à mettre en évidence que les élèves passent progressivement, au fil de la séquence, de l'arithmétique, avec des calculs effectués à partir des suites de nombres données, à la formulation de méthodes « algébriques » lorsque les élèves s'efforcent de produire des méthodes « générales ».

La sémiotique de Peirce est particulièrement appropriée à notre projet. En effet elle nous permettra d'étudier plus précisément l'évolution et les transformations des signes, utilisés par les différents acteurs, en lien avec les différentes situations d'action, de formulation et de validation.

Nicole Everaert-Desmedt formule, de façon claire et concise, trois caractéristiques de la sémiotique de Peirce en montrant que cette dernière est à la fois générale, triadique et pragmatique.

C'est une théorie générale car elle permet d'envisager à la fois la vie émotionnelle, pratique et intellectuelle et intègre toutes les composantes de la sémiotique, de plus elle permet une généralisation du concept de signe. Elle est caractérisée comme étant triadique *i.e.* reposant sur trois catégories philosophiques : la priméité, la secondéité et la tiercéité.

Selon Peirce, trois catégories sont en effet nécessaires pour rendre compte de l'expérience humaine. Elles sont désignées comme « priméité », « secondéité » et « tiercéité ». La priméité est de l'ordre du possible : les signes peuvent être vus comme des *icônes*. La secondéité peut être assimilée à la catégorie de l'expérience, du fait, de l'action-réaction, les signes en sont des *indices*. La tiercéité est le régime de la règle et de la loi, de la médiation et les signes apparaissent avec un statut de *symbole-argument*.

Dans notre usage de la sémiotique peircienne nous utiliserons les trois désignations : icône, indice et symbole-argument. Par exemple dans la séquence étudiée, un calcul arithmétique rédigé sous la forme d'une opération posée ou d'un calcul « en ligne » peut être assimilé à une *icône*, elle traduit et manifeste une action du sujet confronté à la situation de jeu ; un *indice* est de l'ordre d'une proposition, par exemple la formulation d'une méthode générale, même si celle-ci est incomplète ; un *symbole-argument* est de l'ordre d'une preuve mathématique qu'il s'agisse d'une preuve de nature pragmatique, sémantique ou syntaxique.

Comme le souligne Evraert-Desmedt (1990), l'interprétation d'un signe par un interprétant est étroitement liée à l'expérience, formée par d'autres signes toujours antécédents. Par conséquent l'analyse sémiotique nécessite de prendre en compte les signes en lien avec les connaissances et les savoirs antérieurs, c'est la raison pour laquelle nous allons définir, dans le paragraphe suivant, les notions de « répertoire didactique » et de « répertoire de représentation ».

Répertoire didactique et répertoire de représentation

L'ensemble des moyens, connaissances et savoirs, que le professeur met en œuvre, et ceux qu'il pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement lors des phases de validation et d'institutionnalisation, constitue le *répertoire didactique* de la classe défini dans Gibel (2004).

Les situations choisies par l'enseignant, en vue de permettre l'apprentissage d'une connaissance, déterminent la capacité de l'élève à organiser et élaborer, en confrontation au(x) milieu(x) de la situation, ses propres procédures de résolution et par conséquent jouent un rôle essentiel dans l'élaboration du répertoire didactique de la classe. La fonction principale du répertoire didactique de la classe est de faciliter la communication dans la classe, en donnant à l'élève les moyens de produire ou de retrouver, et donc de mettre en œuvre, au moment voulu, une suite d'actions, une formulation ou une justification (*ibidem*). Le répertoire didactique de la classe est donc identifiable à la part du répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'explicitier, notamment pour la validation et lors de l'institutionnalisation.

Les connaissances et les savoirs, que l'élève est susceptible d'utiliser en situation d'action, de formulation et de validation définissent respectivement les répertoires d'action, de formulation et de validation.

Le répertoire de représentation s'identifie à la dimension sémiotique liée à l'usage du répertoire didactique de l'élève en situation d'apprentissage. L'accès aux observables nous renseigne sur la mise en œuvre effective du répertoire didactique de l'élève. Il est constitué de signes : éléments scripturaux (schémas, figures), d'éléments langagiers (oraux et écrits) permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats et enfin des outils et instruments utilisés par les protagonistes.

Notre méthodologie vise à identifier et à interpréter les observables, assimilables à des signes, afin de déterminer les connaissances du répertoire didactique de l'élève utilisées pour produire le raisonnement, valide ou erroné, comme une réponse à la situation.

Le modèle d'analyse des raisonnements

Une fréquente justification de la construction de situations d'enseignement issues de situations fondamentales d'un savoir dans la TSD a été donnée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (Legrand, 1997). L'élaboration et l'analyse *a priori* de ces situations se basent sur l'étude des niveaux de milieux organisés ; l'analyse *a posteriori* permet au chercheur de déterminer s'il y a ou non une concordance du déroulement effectif avec la situation anticipée.

Le modèle de structuration du milieu utilisé, lors de l'élaboration du modèle, est celui de Bloch (2006), issu précédemment du modèle de Margolinas (1994), modifié afin de tenir compte du rôle du professeur dans les niveaux adidactiques de milieux. Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse des fonctionnalités des différents niveaux de milieux et aux résultats de la mise en œuvre dans la contingence (Bloch, 2006).

Le tableau 1 résume les niveaux de milieux – de M1 à M-3 – correspondants à la situation *expérimentale*. Les niveaux associés aux indices strictement négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions *i.e.* l'apparition d'un processus de preuve dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999). En effet c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif (qu'il vaudrait peut-être mieux appeler *milieu heuristique*) et le milieu de référence que nous nous attendons à voir apparaître et se développer les raisonnements attendus.

situation de jeu (situation d'action) ou par la formulation d'une explication nécessaire à la compréhension d'une proposition formulée par un élève. Bloch (1999) dans son article sur l'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève précise le rôle de l'enseignant :

« Dans la mesure où le milieu de la situation n'assure pas de façon suffisamment adidactique la production de connaissances, nous nous tournons vers l'activité du professeur et les connaissances qu'il met en œuvre, pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l'élève » (Bloch, 1999, p. 4).

Dans Bloch et Gibel (2011), nous avons été amenés à retenir trois axes qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment. Ces axes réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieux, ou modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en

Tableau 1. La structuration du milieu

M1 Milieu didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet	didactique
M0 Milieu d'apprentissage : institutionnalisation	E0 : Élève	P0 : Professeur enseignant	S0 : situation didactique	
M-1 Milieu de référence : situation de formulation & situation de validation	E-1 : E-apprenant	P-1 : P régulateur	S-1 : situation d'apprentissage	adidactique
M-2 Milieu objectif : situation d'action Milieu heuristique	E-2 : E-agissant	P-2 : P dévoluteur observateur	S-2 : situation de référence	
M-3 Milieu matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : situation objective	

Dans la structure précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration ; le passage à un milieu de référence pour établir la généralité des méthodes et le caractère de nécessité des propriétés trouvées. Les interventions de l'enseignant (P-régulateur), dans la situation d'apprentissage, sont destinées le plus souvent à maintenir le caractère adidactique de la situation en relançant l'activité par un éventuel retour à une

classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.

Dans une situation comportant une dimension adidactique, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent, ce que nous illustrerons, dans la dernière partie, lors de l'analyse *a posteriori* de différents épisodes de la séquence.

Le premier axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonc-

tions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux. Le deuxième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. Le troisième axe est étroitement lié aux représentations observables, il s'agit d'une analyse de l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation.

PRÉSENTATION ET ANALYSE A PRIORI DE LA SÉQUENCE ÉTUDIÉE

Présentation et enjeux de cette séquence

Le problème de mathématiques a été initialement proposé par Glaeser (1999), l'énoncé est le suivant :

Soient cinq nombres naturels quelconques a, b, c, d, e . Quel est le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à partir des quatre opérations élémentaires $\{+; -; \times; :\}$ appliquées à ces nombres qui ne seront pris dans le calcul qu'une seule fois, une même opération pouvant être utilisée plusieurs fois.

La mise en œuvre de cette séquence au COREM est liée à la rencontre de Brousseau et de Glaeser. Le problème proposé par Glaeser est un problème ouvert. L'idée de G. Brousseau est de faire débattre les élèves sur des déclarations mathématiques suivant des règles qui les conduisent à produire des preuves, plus précisément leur faire chercher des contre-exemples.

La situation d'argumentation, telle qu'elle a été conçue par Brousseau, est une situation à dimension adidactique : en effet il est possible et même probable que l'enseignant sera conduit à intervenir de manière à assurer le maintien de l'engagement des élèves dans le processus de preuve. La situation de validation est assimilable à une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999) ; afin de pallier l'absence d'arguments produits par les élèves pour valider ou invalider une méthode permettant de gagner, l'enseignant sera amené à confronter les élèves à un nouveau jeu dans le

but d'éprouver la validité de la méthode objet d'étude. Par conséquent l'analyse de cette séquence, à partir de notre modèle, devrait nous permettre d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

Quelles sont les différentes formes de raisonnements qui apparaissent lors des différentes phases de cette séquence ? Quelles fonctions recouvrent-ils ? À quel(s) niveau(x) de milieu(x) réfèrent-ils ? Comment évolue, au cours de la séance, le répertoire didactique de la classe ?

Éléments d'analyse *a priori* de la séquence

Analyse de la nature de la réponse attendue au problème proposé

Pour déterminer la nature de la réponse attendue par l'enseignant, il est nécessaire de distinguer les conditions dans lesquelles la réponse doit être produite :

Si la suite de nombres est donnée par l'enseignant alors la réponse attendue est un nombre ainsi que le programme de calcul permettant de l'obtenir ; Si les cinq nombres ne sont pas explicités, c'est-à-dire si l'on se place dans le cas général, alors la réponse idoine est une méthode de calculs. Cependant il est à noter que l'écriture d'une expression algébrique ne conviendra pas car il est nécessaire de distinguer différents cas selon la suite de nombres.

Dans le second cas nous sommes amenés à considérer l'expression algébrique

$$a \times b \times c \times d \times e$$

Or cette expression algébrique est valide, pour obtenir le nombre le plus grand, à partir d'un 5-uplet donné, seulement si les cinq nombres sont tous distincts de 0 et de 1. Le domaine de validité de cet algorithme « naturel » n'est pas immédiatement évident, il devrait conduire les élèves à s'interroger sur le statut des nombres 0 et 1. Ces derniers ne sont pas des nombres comme les autres, ils ont des caractères didactiques et culturels spécifiques.

Il est à noter que la présence d'un ou plusieurs 0, dans la suite de nombre proposée, nécessite, pour obtenir le nombre le plus grand, de déterminer, à partir de la suite constituée par les entiers non nuls, le nombre le plus grand et d'ajouter ensuite le ou les entiers nul(s), ce qui nécessite de distinguer des cas particuliers lors de la formulation de la méthode.

Examinons à présent les différents cas où la suite des cinq nombres contient un ou plusieurs 1 et explicitons pour chacun d'eux la formule permettant d'obtenir le nombre le plus grand.

Cas n° 1 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement un 1 alors elle est de la forme 1, b, c, d, e $1 < b \leq c \leq d \leq e$

Dans ce cas le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(b+1) \times c \times d \times e$$

Cas n° 2 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement deux 1 alors elle est de la forme 1, 1, c, d, e, avec : $1 < c \leq d \leq e$

Il est alors nécessaire de distinguer deux cas :

Si $c=d=2$ alors le nombre le plus grand est obtenu par l'algorithme

$$(c+1) \times (d+1) \times e$$

Sinon le nombre le plus grand est donné par

$$(1+1) \times c \times d \times e$$

Cas n° 3 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement trois 1 alors elle est de la forme 1, 1, 1, d, e avec $1 < d \leq e$

Le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1) \times d \times e$$

Cas n° 4 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement quatre 1 alors elle est de la forme 1, 1, 1, 1, e avec $e > 1$

Si $e = 2$ le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1) \times d \times e$$

Si $e > 2$ le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1+1) \times e$$

Cas n° 5 : Supposons que la suite soit formée de cinq 1

Le nombre le plus grand est obtenu par la formule

$$(1+1+1) \times (1+1)$$

La formulation d'une méthode généralisable est liée à l'usage des propriétés de la multiplication, il

convient donc de s'intéresser aux connaissances dont disposent les élèves en cinquième année de primaire. Pour ces élèves, l'associativité n'est pas acquise en ce qui concerne l'usage de cette propriété. La commutativité est admise implicitement par les élèves mais ces derniers ne peuvent pas faire référence à sa dénomination. Les élèves ont déjà mobilisé la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, lors de séances de calcul mental, sans en connaître la dénomination.

Analyse didactique et scénario de la séquence

L'un des objectifs de cette séquence est de permettre aux élèves de passer progressivement, au cours des différentes phases de la séquence, de raisonnements arithmétiques à l'élaboration et à l'étude d'énoncés généraux, que nous nommerons *méthode*, illustrant d'une certaine façon l'entrée dans l'Algèbre.

Ce qui est visé dans cette séquence, outre la mise en œuvre des propriétés des opérations, c'est principalement l'enseignement des règles du jeu de la preuve : il s'agit d'une leçon sur le vrai et le faux mais également sur la manière de l'établir. L'objectif principal de la séquence est de mettre les élèves en situation de débattre des méthodes permettant d'obtenir le nombre le plus grand, quelle que soit la suite de nombres proposée.

Pour qu'il soit envisageable de demander aux élèves d'élaborer des méthodes, il faut dans un premier temps envisager des répétitions de calculs, c'est-à-dire plusieurs jeux successifs sur des 5-uplets donnés par l'enseignant afin que les élèves élaborent des programmes de calcul. Pour qu'une mise en débat de la validité des méthodes soient envisageable, c'est-à-dire pour que la situation de validation puisse être à dimension adidactique, il est nécessaire que : les méthodes étudiées aient été produites par les élèves, et donc qu'elles résultent d'un travail fondé sur l'écriture de méthode ; qu'elles aient fait l'objet d'une reconnaissance formelle par l'enseignant et appartiennent ainsi au *répertoire didactique* de la classe, de sorte qu'elles soient utilisables par les élèves ; qu'ils parviennent à se les approprier, c'est-à-dire à faire le lien entre leurs formulations et leurs usages en situation de jeu ; qu'elles soient assimilables à des assertions dans le sens où elles sont correctement formées et consistantes.

Analyse ascendante des différents milieux

Notre modèle d'analyse des raisonnements repose principalement sur l'identification des différents milieux correspondants aux différentes situations : situation d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation. Nous allons pour cela utiliser le schéma de la structuration du milieu didactique, de manière à expliciter les différentes situations « emboîtées » correspondant aux différents milieux (Brousseau & Gibel, 2005).

La situation objective : l'acteur objectif et le milieu matériel

La situation objective, objet de notre étude, est fondée sur le problème de mathématiques proposé. C'est donc une situation de jeu pour un 5-uplet donné. Le milieu matériel est constitué par les entiers naturels. Les connaissances du répertoire didactique, que les élèves vont utiliser, relèvent principalement de la mise en œuvre des opérations élémentaires sur les entiers et de leurs propriétés.

La situation de référence : l'élève agissant et le milieu objectif

Les élèves doivent décider de la suite de calculs à effectuer afin de produire le nombre le plus grand à partir du 5-uplet proposé. Ils doivent choisir les opérations arithmétiques à appliquer aux nombres proposés en respectant la règle : chacun des nombres ne peut être utilisé qu'une seule fois. Les élèves doivent ensuite formuler le nombre obtenu et sa justification, autrement dit le programme de calcul associé. La validité du programme de calcul est examinée par les élèves, sous couvert de l'enseignant, du point de vue de la validité des calculs effectués et du point de vue du respect des règles du jeu.

La situation d'apprentissage : l'élève apprenant et le milieu de référence

L'élève en situation d'apprentissage est amené à produire des formulations de méthodes générales et à s'interroger sur la validité de chacune d'elles. Les situations de formulation et de validation sont étroitement liées, en effet l'étude de la validité d'une méthode repose sur la capacité des élèves à construire un contre-exemple.

L'élève apprenant en situation de formulation d'une méthode

L'élève apprenant doit prendre en compte les objets, les règles, mais également les conditions dans lesquelles chacun des programmes de calcul ont été produits. L'élève considère maintenant ses actions sur les objets en regard des conditions nécessaires ou suffisantes à la réussite. Pour le dire autrement, il ne s'agit plus de jouer au jeu du « nombre le plus grand » pour gagner mais de savoir pourquoi et à quelles conditions on est sûr de gagner. Les élèves doivent relever le défi consistant à élaborer une méthode dont le domaine de validité soit le plus étendu possible.

La phase de formulation des méthodes vise à permettre aux élèves une prise de position sur l'action, et donc une prise de conscience des décisions sur lesquelles reposent leurs actions, afin qu'ils puissent produire des procédures dont la validité pourra être mise en débat. En situation de formulation, les élèves doivent écrire une méthode permettant d'obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de nombres proposée.

L'élève apprenant en situation de validation

Le domaine de validité d'une méthode est lié aux connaissances des conditions dans lesquelles son usage s'avère adéquat. La prise de conscience par le sujet du domaine de validité du raisonnement produit, permet d'envisager l'usage de ce raisonnement dans des situations d'argumentation et de preuve. Les élèves vont devoir se positionner en tant que « proposant » ou « opposant » et débattre de la validité des méthodes proposées par les différents groupes.

L'élève en situation de validation, ayant le statut d'opposant ou de proposant, arrive avec une culture, des connaissances étroitement liées au répertoire didactique dont il dispose, et peut éventuellement, en situation de débat, formuler des exigences ou des interrogations qui ne sont pas nécessairement celles de la situation de preuve telle qu'elle a été conçue initialement par Brousseau.

La situation didactique : l'élève et le milieu d'apprentissage

La situation didactique repose d'une part sur la reconnaissance par l'enseignant du statut des

énoncés proposés en tant que méthode et d'autre part sur la reconnaissance par l'enseignant, si cela s'avère nécessaire, de la validité des arguments produits par un élève ou un groupe d'élève dans le but d'invalidiser une méthode.

Les choix didactiques sur lesquels repose l'ingénierie

L'enseignant après avoir explicité les règles du jeu, propose à ses élèves deux situations de jeu (3, 8, 7, 5, 4) et (7, 3, 5, 2, 8). Cependant lors de ces deux premiers jeux, l'enseignant va choisir des suites de nombres ne comportant ni de 1 ni de 0. Après ces situations de jeu, l'enseignant va demander aux élèves de produire une méthode générale permettant de gagner au jeu quelle que soit la suite de nombres proposée. Ayant dissimulé lors des deux premiers jeux la possibilité que les suites comportent des 1 et des 0, on peut s'interroger sur la capacité des élèves à envisager leur présence dans une suite de nombres.

Par ailleurs la situation de formulation des méthodes nécessite que les élèves rédigent des méthodes consistantes et explicites; or c'est la première fois que les élèves sont amenés à produire un énoncé de ce type, par conséquent pour y parvenir l'enseignant devra interagir avec les auteurs pour les amener à préciser certaines formulations. Comme le souligne Bloch (1999) à propos des modalités de l'intervention de l'enseignant dans une situation à dimension adidactique « On peut envisager qu'à un moment donné le professeur soit contraint, par l'activité des élèves, à faire un apport de connaissances et de savoirs: c'est donc que les élèves ont fait fonctionner des connaissances nécessitant un retour ou une mise au point » (Bloch, 1999, p. 4).

La situation de formulation des méthodes est une situation à dimension adidactique, dont la gestion par l'enseignant devrait être délicate. En effet ce dernier aura pour mission de rester au plus près des propositions des élèves tout en rédigeant une méthode consistante. Il effectuera un moment d'institutionnalisation visant à reconnaître ces énoncés comme assimilables à des méthodes dont la validité reste à étudier.

L'enseignant fera ensuite dévolution de la situation de validation des méthodes. Il devra amener ses élèves à prendre position quant à la validité des méthodes formulées par chacun des groupes.

L'enseignant aura à formuler les règles du jeu de la preuve. Nous nous intéressons ici plus précisément à la gestion de la situation de débat par l'enseignant. Ce dernier devrait, par ses interventions didactiques, être garant de la validité des arguments, avancés par les élèves, dans le but de produire une nouvelle méthode ou de rejeter une méthode.

L'enseignant va devoir intervenir pour reconnaître le statut de certaines assertions élaborées par des groupes d'élèves, par exemple pour identifier qu'un 5-uplet et une nouvelle méthode plus performante suffisent à invalider une précédente méthode. La gestion de classe, du point de vue du respect des règles de la preuve, sera complexe car il est probable que certains élèves n'accepteront que difficilement le rejet d'une méthode. On imagine aisément la difficulté de l'élève à accepter que la production d'un contre-exemple suffit à invalider une méthode qui fournit, dans un très grand nombre de cas, le nombre le plus grand. De plus si les élèves ne sont pas en mesure de mettre en défaut une méthode, en élaborant un contre-exemple, l'enseignant devra nécessairement intervenir en proposant un nouveau jeu avec un 5-uplet adéquat, ainsi il agira dans le but de faire prendre conscience aux élèves de la non-validité des précédentes méthodes proposées pour générer le nombre le plus grand. En procédant ainsi l'enseignant contribuera à un enrichissement du milieu (M-1). Comme l'indique Bloch (1999), l'enseignant se substituera au milieu (M-1) défaillant, car « pas suffisamment résistant pour qu'il soit possible de compter seulement sur les rétroactions qu'il fournit pour engager le processus de formulation et de validation » (Bloch, 1999, p. 3).

Notre modèle d'analyse, que nous détaillerons dans le paragraphe suivant, devrait ainsi permettre d'identifier les formes, les fonctions et la nature des raisonnements associé au niveau de milieu correspondant.

Le modèle d'analyse des raisonnements

En prenant en compte, pour chaque niveau de milieu M-2, M-1, M0, les trois axes (fonctions des raisonnements; niveaux d'utilisation des signes: icône, indice, symbole-argument; répertoire didactique), nous parvenons au tableau 2. Les niveaux matriciels indiqués (R1.1, R1.2, R1.3, etc.) servent de référence lors de l'analyse du corpus: la progres-

sion des indices matriciels va en principe de pair avec la sophistication et la formalisation croissantes des raisonnements et des signes.

Tableau 2. Les axes de l'analyse des raisonnements en fonction des niveaux de milieux

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM – Décision de calcul – Moyen heuristique – Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM – Calculs génériques – Formulation de conjectures étayées – Décision sur un objet mathématique – Comparaison de méthodes – Élaboration de contre-exemple	R1.3 SYNT – Explications, justifications visant à définir les règles du jeu de la preuve et leurs usages.
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions, modèle implicite d'action,...)	R2.2 SYNT/SEM Symboles-arguments « locaux » ou génériques.	R2.3 SYNT Symboles-arguments formels
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT/SEM – Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes – Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles.	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement des énoncés au niveau argumentaire.	R3.3 SYNT Formulation de preuves.

Le tableau 2 explicite de façon synthétique le modèle d'analyse ; produit à partir de l'analyse *a priori* il indique les signes et raisonnements susceptibles d'apparaître dans chaque niveau de milieu. Nous avons codé en SYNT (syntaxique) ou SEM (sémantique) les dimensions possibles, syntaxique ou sémantique, rencontrées dans les différents niveaux d'argumentation. Remarquons cependant que les dimensions syntaxique et sémantique ne sont pas spécifiques du niveau d'adéquation à la situation : en effet, des élèves peuvent fort bien utiliser leurs connaissances anciennes de façon syntaxique mais ne pas entrer dans les requis de la situation, ce qui rendra ces essais peu opérants.

En conclusion, nous classons donc les raisonnements en fonction des caractéristiques de la situation et des connaissances manifestées par les élèves dans la phase précédente, lesquelles attestent du niveau de milieu où ils se situent, et de la nature des signes produits.

UTILISATION DU MODÈLE POUR ANALYSER LA MISE EN ŒUVRE DE LA SÉQUENCE

Analyse des raisonnements à partir du modèle

Nous allons analyser les raisonnements apparaissant dans plusieurs épisodes de la séquence en indiquant les différentes phases de la séance dont ils sont extraits. Le lecteur pourra se référer au déroulement de chaque séance (cf. Annexe) afin de percevoir le positionnement de l'épisode dans la séance correspondante. Notre modèle d'analyse devrait nous permettre d'étudier les différentes formes de raisonnements en relation avec le niveau de milieu correspondant en spécifiant (a) leur(s) fonction(s), en analysant (b) la nature des signes (langagiers et scripturaux), pour cela nous nous référerons (c) au répertoire didactique utilisé par les élèves afin d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés.

Épisode 1

Extrait de la phase 4 de la séance 1 (cf. déroulement de la séquence proposé en Annexe). Les élèves présentent le nombre le plus grand obtenu à partir de la suite 3-4-5-7-8 et justifient la validité de la procédure ayant permis de l'obtenir. L'enseignant, noté M dans la transcription des épisodes, interroge Myriam sur son résultat et sur la manière dont elle l'a obtenu.

(1.1)	M: (<i>en désignant Myriam</i>): À toi.	
(1.2)	Myriam: Moi j'ai trouvé 3360!	
(1.3)	E: Moi, aussi!	
(1.4)	E: Non pas moi, j'ai trouvé plus grand.	
(1.5) 0.09.00	M: 3360, tu expliques. Attention, je t'écoute.	La maîtresse écrit au tableau 3360.
(1.6)	Myriam: 8 fois 7, 56	L'enseignant écrit au tableau le programme de calcul au fur et à mesure que l'élève lui dicte $(8 \times 7) \times (5 \times 4) \times 3$ <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-right: 5px;">(1)</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-right: 5px;">(2)</div> </div> <div style="margin-left: 40px;">56 × 20</div> <div style="margin-left: 40px;">(3)</div> <div style="margin-left: 40px;">1120</div> <div style="margin-left: 40px;">(4)</div> <div style="margin-left: 40px;">3360</div>
(1.7)	M: Alors, tu as fait 8 fois 7, oui.	
(1.8)	Myriam: Après j'ai fait 5 fois 4, ça fait 20	
(1.9)	M: Hum! (<i>ton approbateur</i>)	
(1.10) 0.09.20	Myriam: Après j'ai additionné 56 et ...	
(1.11) 0.09.22	E: Additionné?	
(1.12)	Myriam: Non multiplié; 56 fois 20.	
(1.13) 0.09.27	M: C'est-à-dire tu as multiplié ces deux-là !	
(1.14)	Myriam: 56 fois 20, 1120 et après j'ai fait fois 3 et j'ai trouvé 3360	
(1.15) 0.09.40	M: Et après tu as fait fois 3 pour trouver 3360.	

L'analyse détaillée de la phase 4, séance 1 (Gibel, 2004, p. 101) montre que les élèves ont produit des raisonnements en situation d'action. La diversité des programmes de calcul, produits par les élèves, illustre les choix auxquels les élèves ont été confrontés, tant du point de vue des opérations utilisées que du point de vue de l'ordre dans lequel ils les ont effectuées. Les actions effectives des élèves sont reliées à des décisions de calculs (R1.1) en référence au tableau 2.

Identification du niveau de milieu correspondant : L'épisode ci-dessus relève de la situation de référence (S-2). Il est associé à la description d'un programme de calcul suite à la confrontation de l'élève agissant, Myriam, au milieu objectif (M-2).

(a) Du point de vue des fonctions des raisonnements : Dans cet épisode l'enseignant traduit la dénotation des calculs de Myriam par l'écriture d'un arbre de calculs, rédigé par paliers successifs de (1.6) à (1.14), comme schématisé ci-dessus. Chaque étape de la formulation de Myriam peut être considérée comme une assertion dont la validité par rapport au

calcul, mais également par rapport aux règles du jeu, est examinée par les élèves. Myriam parvient ainsi à produire, par la dénotation de son programme de calcul, le résultat annoncé (3360). L'enseignant et l'ensemble des élèves de la classe valident le résultat proposé du point de vue de sa conformité aux règles du jeu mais aussi du point de vue de la validité des calculs. La présentation de son programme a pour fonction d'apporter la preuve de la validité de son résultat.

(b) Du point de vue de l'analyse sémiotique : Le programme de calcul rédigé par Myriam s'apparente à un indice (R2.1). En effet le modèle implicite d'action (M.I.A) qui sous-tend son programme de calcul est : le produit de deux nombres (strictement supérieur à 1) est supérieur à la somme de ces 2 nombres. L'analyse sémiotique nous conduit ici à analyser les observables du point de vue de leur nature et ainsi à identifier le M.I.A correspondant basé sur l'expérience, le fait observé donc assimilable à un indice.

La formulation produite par Myriam, sur sa feuille, est une suite de calculs rédigés linéairement sur le mode « machine » (mode opératoire).

$$7 \times 8 = 56 \quad 5 \times 4 = 20$$

$$56 \times 20 = 1120$$

$$1120 \times 3 = 3360$$

Les calculs rédigés par l'enseignant au tableau sont très éloignés du formalisme initialement utilisé par les élèves. L'enseignant essaie, par ce biais, d'introduire un formalisme basé sur l'utilisation des parenthèses pour rendre compte des étapes.

(c) Du point de vue de l'usage du répertoire didactique : Myriam s'est appuyée sur ses connaissances antérieures afin de décider d'utiliser exclusivement la multiplication ; ceci s'apparente à une conjecture ponctuelle (R3.1) pour produire le nombre le plus grand à partir du 5-uplet. Cette élève a utilisé ses connaissances des tables de multiplication, la règle des zéros ainsi que l'algorithme de la multiplication pour effectuer les différentes opérations. Il traduit l'usage de connaissances anciennes (R3.1).

Présentation des méthodes produites à l'issue de la séance 1

L'enseignant, à l'issue de la séance 1, a noté au tableau les méthodes proposées par différents groupes d'élèves :

Méthode 1 (groupe d'Hélène) : Je prends les deux plus grands nombres et je les multiplie. Après je refais pareil avec les deux plus petits. Le dernier nombre, qui me reste, je le multiplie.

Méthode 2 (groupe de David et Marc) : On multiplie les deux plus grands nombres, on multiplie les deux plus petits ensembles. On multiplie les résultats entre eux et on multiplie avec celui qui reste.

La méthode suivante a été approuvée par plusieurs groupes à l'issue de la séance 1, l'enseignant a choisi de la nommer « Méthode d'Aline et les douze ».

Méthode 3 (Méthode d'Aline et les douze) : On multiplie tous les nombres entre eux.

Ces énoncés, élaborés par les différents groupes d'élèves, font l'objet d'une reconnaissance par l'enseignant et ils font désormais partie du répertoire didactique de la classe.

Épisode 2

Discussion sur la formulation d'une nouvelle méthode

Cet épisode est extrait de la séance 2, phase 2 (cf. Annexe). Les trois énoncés produits à l'issue de la séance 1 correspondent à des méthodes équivalentes à la Méthode 3. Des élèves s'interrogent sur la validité des méthodes proposées précédemment dans le cas où la suite de nombres comporte un 0 ou un 1.

(2.1)	Sylvie : Si tu multiplies 5 par 0 ça fait 0, si tu fais 5 plus 0 ça fait 5.
(2.2)	Anne : Eh 0 je ne crois pas qu'elle le mettrait dans les chiffres !
(2.3)	Sylvie : Et Aline, elle disait que quand on avait les numéros il fallait tous les multiplier. Et si on fait 1 fois 5, ça fait 5 et si tu fais 1 plus cinq ça fait 6.
(2.4)	Anne : Bon ça c'est ce que j'avais dit la dernière fois. Bon eh bien la méthode à Aline, ça ne marche pas !

Identification du (des) niveau(x) de milieu(x) correspondant(s) : Cet épisode s'inscrit dans le cadre de la situation d'apprentissage, il met principalement en lumière la confrontation de l'élève apprenant au milieu de référence. L'élève apprenant, Sylvie, effectue une comparaison de deux méthodes dans un cas particulier où la suite, réduite à 2 nombres, comporte un zéro. On constate ici que Sylvie, pour comparer les deux méthodes, revient au niveau (M-2) en effectuant les calculs arithmétiques correspondants (situation d'action). Ceci permet d'illustrer le caractère emboîté des situations de référence et d'apprentissage.

(a) Du point de vue des fonctions des raisonnements : Son raisonnement vise à invalider la Méthode 3 – « Le nombre le plus grand est obtenu en effectuant le produit de tous les nombres » – institutionnalisée précédemment. Ce contre-exemple est refusé par Anne ; selon cette dernière, la présence d'un 0 dans la suite de nombres n'est pas envisageable. Le raisonnement produit ne remplit pas la fonction souhaitée par son auteure. Sylvie propose alors une suite, réduite à deux nombres et comportant un 1, elle apporte la preuve de la non validité de la méthode d'Aline par une comparaison des méthodes et emporte l'adhésion de l'ensemble des élèves du groupe d'Anne. Les propositions de Sylvie contribuent à l'enrichissement du milieu (M-1). La production par Sylvie d'une suite de nombres et d'une nouvelle procédure, non encore répertoriée,

s'apparente à la production d'une conjecture ponctuelle étayée (R1.2).

(b) Du point de vue de la nature des signes: Son énoncé s'apparente à la production d'un symbole-argument, il s'agit d'un argument local (R2.2). L'élève fait ici référence à des suites restreintes (comportant seulement deux termes) particulières dans le sens où la première proposition de suite comporte un 0 et la deuxième proposition de suite comporte un 1. Cependant cette conjecture étayée pourrait jouer un rôle décisif dans l'avancée de la situation en effet l'enrichissement du milieu (M-1) permet à présent d'envisager l'élaboration d'une nouvelle méthode prenant en compte le cas particulier d'une suite comportant un 1.

(c) Du point de vue de l'utilisation du répertoire didactique: on constate la mise en œuvre implicite des propriétés « 0 est un élément absorbant » et l'utilisation de la propriété « 1 est élément neutre pour la multiplication » qui illustre l'utilisation de connaissances anciennes (R3.1).

Suite de l'épisode 2

(2.5)	Une élève: Qu'est-ce qu'on fait comme méthode?
(2.6)	Anne: Il faut multiplier tous les nombres sauf quand il y a des 1, on les additionne.
(2.7)	Anne: Cédric tu fais la méthode d'Aline, toi aussi et nous on fait la méthode celle-là pour voir ceux qui ont la mieux.
(2.8)	Anne: Alors 5, 8, 1, 2, 6 allez 5, 8, 1, 2, 6...5,8,1,2,6; Alors vous deux vous faites la méthode d'Aline et toi tu fais ma méthode, il faut trouver le nombre le plus grand avec cette méthode.
(2.9)	M: Alors vous faites des essais.
(2.10)	Une élève: Oui on fait des essais.
(2.11)	Anne: Eux ils font la méthode d'Aline et nous ma méthode.

Identification du niveau de milieu correspondant: Cet épisode transcrit de (2.5) à (2.11) relève aussi de la situation d'apprentissage, il illustre la confrontation de l'élève apprenant au milieu de référence. Cet épisode met en lumière la proposition d'un contre-exemple sous la forme de l'énonciation d'une nouvelle méthode et d'un 5-uplet (5, 8, 1, 2, 6). La formulation de cette nouvelle méthode (2.8) est en partie implicite puisque l'auteure, Anne, ne précise pas à quel nombre il faut ajouter le 1. Anne,

en proposant une nouvelle méthode dans le cas où la suite comporte un 1, contribue à l'enrichissement du milieu (M-1). Sa proposition apparaît comme un prolongement de la proposition de Sylvie formulée précédemment en (2.5).

(a) Les fonctions des raisonnements: La suite produite par Anne est en adéquation avec son projet visant à mettre en défaut la méthode d'Aline: établir la preuve de la validité de sa méthode (R1.2) par l'expérimentation dans le cas particulier d'une suite de nombres comportant un 1.

L'épisode donne aussi à voir un raisonnement d'organisation des tâches; il vise à définir une répartition des rôles au sein du groupe afin de confronter les résultats obtenus par les 2 méthodes. Il s'agit là très clairement d'une mise en projet dont la finalité est explicitée: établir par le calcul l'obtention, par la nouvelle méthode, d'un nombre plus grand que celui obtenu par la méthode d'Aline.

L'épisode étudié illustre précisément la définition du raisonnement (Oléron, 1977, p. 10) énoncée dans la première partie de l'article. En effet cet épisode révèle une confrontation de méthodes, respectant des contraintes, et conduite en fonction d'un but qui n'est autre que l'écriture d'une nouvelle méthode dont la validité doit être prouvée dans un domaine plus étendu, celui des 5-uplets comportant un 1, que celui lié aux précédentes méthodes.

Suite de l'épisode 2

(2.12)	Anne: Tu as compris? Tu additionnes le 1 au nombre le plus grand, au nombre le plus grand, ou à n'importe quel nombre mais tu l'additionnes avec un nombre.
(2.13)	Anne: On additionne le 1 avec n'importe quel nombre puis on multiplie tout.
(2.14)	Élève 2: Moi je voulais le mettre en dernier pour l'additionner.
(2.15)	Anne: Ce n'est pas grave tu peux le faire mais je ne sais pas si ça fera pareil. (...) Non, non ça ne fera pas pareil.
(2.16)	Élève 2: Mais si ça revient au même!

Identification du niveau de milieu: Cet épisode transcrit de (2.12) à (2.16) relève aussi de la situation d'apprentissage. Il rend compte de la confrontation de l'élève apprenant au milieu de référence.

(a) Fonction des raisonnements: Anne travaille à la formulation d'une méthode, sa réflexion vise à envisager différents programmes de calculs à partir de la suite qu'elle a proposée.

(b) Analyse du point de vue des signes : La formulation de la méthode d'Anne évolue et se précise lors des interactions avec les membres du groupe (2.6), (2.13) et (2.15) mettant en évidence la dialectique action/formulation. Anne (2.15) s'efforce d'envisager différents programmes de calculs et d'anticiper sur les résultats correspondants. Son raisonnement repose sur une disjonction de cas.

(c) Analyse du point de vue du répertoire didactique : Anne met en œuvre la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition afin d'anticiper les résultats obtenus par différentes méthodes de calculs (selon le nombre auquel elle ajoute 1).

Suite de l'épisode 2. La discussion sur la suite 5, 8, 1, 2, 6

(2.17)	Anne : Moi j'ai trouvé 540. Regarde (Elle présente son calcul, écrit sur son cahier) au début j'additionne le 1 avec le nombre le plus grand, ça fait 9, 9 fois 5 égal 45, 45 fois 2 égal 90 et 90 fois 6, égal 540.
(2.18)	Un élève : On n'a pas dit de faire comme ça.
(2.19)	Anne : C'est pas grave, on fait en vitesse. Combien t'as trouvé ?
(2.20)	Un élève : 540.
(2.21)	Un autre élève : Moi 481.
(2.21) 0.08.20	Anne : Bon, vous écrivez la méthode, « On multiplie tous les nombres, sauf quand il y a un ou plusieurs 1, on l'additionne avec le nombre le plus grand et on multiplie tout. »

Identification du niveau de milieu correspondant : la suite de cet épisode relève aussi de la situation d'apprentissage reflétant la confrontation du sujet apprenant au milieu de référence.

(a) Les fonctions des raisonnements : dans cet épisode Anne a élaboré une preuve de nature sémantique (R1.2), en donnant à voir à ses collègues la pertinence de sa méthode appliquée à la suite choisie.

C'est pour les deux élèves en situation d'exécuter le calcul, en utilisant la méthode d'Aline, une confrontation au milieu matériel visant à permettre la comparaison du nombre obtenu par la méthode d'Aline à celui obtenu par la méthode d'Anne. Ceci contribue de nouveau à mettre en évidence le caractère emboîté des situations de référence et d'apprentissage. Les actions des élèves calculateurs, mettant en œuvre la procédure d'Aline et les douze, relèvent ici précisément du calcul et non du raisonnement à proprement parler puisque le programme de calcul est mis en œuvre sans recours à des choix ou à des décisions personnelles. L'exposé des résultats obtenus

par les deux méthodes, à partir de la suite choisie par Anne, conduit à mettre en défaut la méthode d'Aline. De plus on remarque que le nombre obtenu par la méthode d'Anne est certes plus grand que le précédent mais ce n'est pas, dans l'absolu, le nombre le plus grand que l'on puisse obtenir à partir de cette suite.

(b) Nature des signes : Les calculs sont rédigés sur le mode « opératoire ». Le formalisme, basé sur l'usage des parenthèses et initialement introduit par l'enseignant, n'est pas réutilisé par les élèves du groupe d'Anne ni par les autres élèves de la classe. En effet la présentation formelle du calcul produite par l'enseignant n'a pas eu valeur d'institutionnalisation, car comme l'indique Comin (2000), l'institutionnalisation d'un objet suppose une genèse, un vocabulaire, un usage standard et une reconnaissance collective, or ces conditions n'ont pas été réunies lors de la séquence (épisode 1). Il s'agit d'une explicitation d'arguments locaux (R2.2).

À l'issue de cette phase, l'enseignant note alors au tableau les deux nouvelles méthodes élaborées par deux groupes d'élèves donnant lieu à un enrichissement des énoncés des méthodes :

Méthode 1 (Jérémy, Aline, Mélanie, Sylvain) : *On multiplie les nombres entre eux dans n'importe quel ordre sauf avec le 0 et le 1 on fait plus.*

Méthode 2 (Anne, Sylvie, Cédric et Séverine) : *On multiplie tous les nombres sauf quand il y a un ou plusieurs 1, on l'additionne avec le nombre le plus grand et on multiplie tout après.*

Il est à noter que ces méthodes viennent enrichir le répertoire didactique de la classe, elles réunissent les conditions d'institutionnalisation définies par Comin (2000).

Épisode 3. Extrait de la séance 2

« Débat relatif aux méthodes 1 et 2 ». La discussion entre les différents groupes porte précisément sur le nombre auquel il faut ajouter 1.

(3.1)	M : Une autre méthode ? Qui a écrit ça ? Il faut vous décider, vous ne savez pas trop. Vous avez une autre méthode ?
(3.2)	Elsa : Nous au début on avait fait la première (méthode 1).
(3.3)	M : Attends je n'entends pas ; j'entends quelques élèves qui parlent.
(3.4)	Elsa : Nous on avait fait la première méthode mais si on ajoute le 1 à la fin il y est qu'une fois, il y est qu'une fois ; mais si on le met au plus grand et qu'après on le multiplie, il va être répété plusieurs fois et ça agrandit le nombre.

Identification du niveau de milieu correspondant : Cet épisode relève aussi de la situation d'apprentissage, il rend compte de la confrontation du sujet apprenant au milieu de référence.

(a) Les fonctions des raisonnements : Ce raisonnement, énoncé par Elsa en (3.4), est très pertinent du point de vue de sa nature et de sa fonction. En effet il est basé sur une disjonction de cas permettant à Elsa de produire une conclusion valide remettant en cause la validité de la méthode du groupe de Jérémy, Aline, Mélanie et Sylvain. La formulation produite par Elsa est une preuve de nature syntaxique (R1.2), elle conduit à la mise en défaut de la méthode 1 (Jérémy, Aline, Mélanie, Sylvain).

(c) Du point de vue de l'utilisation du répertoire didactique : Elsa utilise ses connaissances de la distributivité de la multiplication sur l'addition pour anticiper le résultat d'un calcul générique.

Cette analyse fine des raisonnements, obtenue par la mise en œuvre du modèle, permet aussi une réflexion approfondie sur les effets de la leçon sur les apprentissages des élèves. Nous nous attacherons à développer cet aspect de l'analyse didactique dans le paragraphe qui suit.

Les effets de la leçon sur les apprentissages des élèves

Du point de vue de la pratique du raisonnement

L'analyse du déroulement de la séquence, par la mise en œuvre du modèle, nous a permis de mettre en évidence les différentes formes de raisonnements produits par les élèves en situation d'action, de formulation et de validation en déterminant explicitement leurs fonctions. L'analyse *a posteriori* montre que les raisonnements recouvrent des fonctions spécifiques en étroite relation avec les niveaux de milieux : prise de décision et élaboration de modèle implicite d'action en situation d'action (M-2), rédaction des méthodes en situation de formulation (M-1), organisation des tâches et émission de conjectures en situation de validation (M-1) ainsi que recherche et productions de contre-exemples visant à étudier le domaine de validité des méthodes.

Le tableau 2 vise à expliciter les formes de raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique selon les niveaux de milieux, et préfigure l'analyse des raisonnements selon les trois axes (fonc-

tions des raisonnements, analyse sémiotique et identification et actualisation du répertoire didactique). Ce tableau résulte de l'analyse *a priori* de la séquence et prend appui plus précisément sur l'analyse des niveaux de milieux.

L'analyse *a posteriori* montre que les formes et les fonctions des raisonnements étudiés, selon les axes du modèle, sont en conformité avec les types raisonnements associés aux différents milieux (tableau 2). Cependant au niveau didactique (M0), l'enseignant ne s'attache pas à l'élaboration de preuves formelles en lien avec un formalisme spécifique, comme c'est fréquemment le cas dans l'enseignement secondaire. Dans la situation étudiée, au niveau (M0), l'enseignant s'efforce de faire en sorte que les élèves s'approprient et mettent en œuvre les règles du jeu de la preuve.

Cette situation est une situation particulièrement riche sur le plan didactique du point de vue de l'apprentissage de la pratique du raisonnement car les situations successives offrent à l'élève la possibilité de percevoir l'intérêt et la pertinence des raisonnements produits en situation d'action, de formulation et de validation.

Du point de vue de l'usage et de l'actualisation du répertoire didactique

La richesse de notre modèle nous permet non seulement d'analyser les formes de raisonnement mais encore de mettre en lumière les connaissances et les savoirs mobilisés par les élèves en lien avec leur répertoire didactique. Les connaissances mobilisées sont étroitement liées à la mise en œuvre des propriétés de la multiplication (commutativité, distributivité sur l'addition, élément absorbant, élément neutre) telles que nous les avons mentionnées lors de l'analyse des épisodes et même si les élèves ne sont pas en mesure de les nommer, ils sont cependant tout à fait capables de les utiliser et d'en justifier la validité et la pertinence.

En ce qui concerne la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, utilisée à plusieurs reprises au cours des différents épisodes, elle joue un rôle déterminant lorsque les suites comportent un ou plusieurs « 1 ». En effet on observe que la confrontation des élèves à la situation de jeu, à plusieurs reprises, contribue très fortement à l'émission de conjecture, en lien avec l'usage de cette propriété,

dont la validité est objet de débat et dont les preuves sont le plus souvent sémantiques mais aussi syntaxiques comme nous l'avons mis précédemment en évidence dans les analyses des épisodes.

L'écriture des méthodes nécessite une prise de recul par rapport aux programmes de calcul et la nécessité de relier les actions effectives aux formulations disponibles dans le répertoire didactique de la classe. Le rapport aux énoncés, du point de vue de l'énonciation et de la compréhension, joue un rôle déterminant dans l'apprentissage et plus globalement dans le rapport aux mathématiques. La diffusion de nouvelles méthodes, en tant qu'énoncé, dont la validité est débattue, est complexe et l'enseignant doit rester garant de la consistance des énoncés.

Du point de vue de la conviction des élèves en situation de validation

La situation de validation est étroitement liée à la situation de formulation, puisque la discussion à propos de la pertinence des méthodes repose principalement sur la validité des nouvelles méthodes formulées par les élèves. Cependant la vraie difficulté pour l'enseignant consiste à faire dévolution aux élèves des règles du jeu de la preuve. Pour que cette dernière soit réussie il faut que les élèves, d'une part acceptent leurs positions respectives de proposant et d'opposant, et d'autre part reconnaissent et acceptent le principe de mise en défaut de la validité d'une méthode par l'exhibition d'un contre-exemple. Certains élèves acceptent difficilement cette règle, ce qui nécessite l'intervention de l'enseignant, à plusieurs reprises, afin de maintenir et de réguler les interactions en situation de validation.

L'enseignant est conduit à proposer des situations de jeux lorsque les élèves ne parviennent pas à élaborer des contre-exemples. Ainsi ce « retour » à la situation objective, permet aux élèves d'envisager de nouvelles méthodes de calculs et par suite de nouvelles méthodes qui intègrent des cas particuliers, liés à la présence de deux ou plusieurs 1.

Le choix de rejeter, de « démolir » pour reprendre l'expression utilisée par l'enseignant, une méthode dont le domaine de validité est étendu, sous prétexte qu'il n'intègre pas certaines suites particulières, comportant plusieurs 1, est discutable du point de vue didactique (Durand-Guerrier, 2008) dans le sens où une alternative est effectivement envisageable.

En effet il serait possible de compléter la méthode d'Aline en intégrant des cas particuliers comme nous le proposons lors de la présentation de la solution complète. Dans ce cas les raisonnements, produits par les élèves en situations d'opposant, pourraient avoir non seulement la fonction d'invalider une méthode mais ils pourraient également recouvrir une autre fonction, celle visant à explorer le domaine numérique sur lequel la méthode proposée est valide. Ainsi les raisonnements seraient perçus comme des ébauches permettant de construire une nouvelle méthode plus complète résultant d'un travail, de nature sémantique, sur les objets comme générateur d'énoncés, de méthodes et pas uniquement comme outil de réfutation.

DISCUSSION AUTOUR DU DOMAINE DE VALIDITÉ DU MODÈLE

Le modèle est adapté pour analyser des situations comportant une dimension de recherche, plus précisément lors de séquence comportant des situations à dimension adidactique. En situation didactique, les raisonnements des élèves sont produits pour justifier une action, pour produire une réponse ou pour satisfaire une demande explicite ou implicite du professeur; formellement le raisonnement est une justification considérée comme un objet de l'enseignement en cours, indépendamment de son rapport avec l'action engagée, il s'apparente alors d'une certaine façon à une citation. Dans ce cas précis l'utilisation du modèle ne se justifie pas.

Notre modèle offre la possibilité d'analyser *a posteriori* des séquences de classe comportant une dimension recherche; il permet de déterminer d'une part la nature, la forme et le statut des raisonnements et d'autre part leurs fonctions en les reliant au niveau de milieu correspondant. Une particularité du modèle est qu'il permet de prendre en compte non seulement les raisonnements valides mais encore ceux qui sont incorrects ou incomplets.

La dimension sémiotique est essentielle dans le modèle, cependant l'analyse sémiotique apparaît plus riche, plus détaillée et plus opérationnelle dans les séquences conduites dans le secondaire si l'on se réfère à l'analyse des raisonnements produits en classe de Première Scientifique (Bloch & Gibel, 2011) dans la situation du flocon de Von Koch. Ceci s'explique par la variété des registres convoqués

(algébrique, graphique, etc.), la multiplicité des cadres (numériques, géométriques, etc.) et également par la variété des signes associés en lien avec le formalisme mathématique. Dans l'analyse de cette séquence, les observables (langagiers, scripturaux,...) relèvent d'un même registre numérique, basé principalement sur les opérations et leurs propriétés, d'où une analyse sémiotique moins prégnante que celle conduite lors de la précédente étude.

Notre article vise principalement à établir que ce modèle peut être utilisé à tous niveaux de l'enseignement qu'il s'agisse d'enseignement primaire ou secondaire. Il met l'accent sur l'importance des raisonnements du point de vue des connaissances et savoirs mobilisés car il permet d'effectuer un lien entre le répertoire de représentation, prenant appui sur une analyse sémiotique, et le répertoire didactique de la classe.

CONCLUSION

L'analyse de la séquence, réalisée à partir du modèle, a permis de mettre en évidence la production de nombreux raisonnements dans des fonctions très diverses telles que : prendre des décisions afin de produire une réponse, justifier la validité d'un programme de calcul, élaborer une méthode générale lors de la situation de formulation, produire des conjectures, organiser les tâches au sein d'un groupe, argumenter, débattre de la validité des méthodes, de manière à formuler une méthode dont le domaine de validité soit le plus étendu possible. De plus elle a permis d'étudier la nature des raisonnements et de mettre en évidence la capacité des élèves de primaire à produire des raisonnements sous la forme de raisonnements par disjonction de cas.

Le modèle met en évidence la richesse des raisonnements produits en les reliant aux connaissances et aux savoirs antérieurs du répertoire didactique concernant les opérations élémentaires et les propriétés de la multiplication (commutativité, élément neutre et distributivité de la multiplication sur l'addition). Du point de vue des formulations, le modèle donne à voir l'évolution des énoncés en lien avec les différentes situations : on passe de la formulation de suites de calculs arithmétiques à la rédaction de méthodes générales, de nature algébrique, pour parvenir à la production d'arguments sémantiques et syntaxiques.

Cette évolution est observable en situation de formulation et en situation de validation. L'analyse sémiotique montre également le décalage effectif entre le formalisme introduit par l'enseignant et le répertoire didactique effectivement mobilisé par les élèves tout au long de la séquence. Ceci conforte l'analyse *a priori* : la situation « finale » étant algébrique, il était difficile pour les élèves de ce niveau de parvenir à une formulation de cette nature.

Nous avons souhaité mettre en évidence la robustesse de notre modèle pour analyser les différentes formes de raisonnements, en situation à dimension adidactique, en illustrant son utilisation à un niveau d'enseignement (CM2) assez éloigné de celui illustré initialement en classe de Première scientifique (Bloch & Gibel, 2011). L'intérêt du modèle est lié au fait qu'il permet l'étude du raisonnement produit, qu'il soit ou non valide, de différents points de vue : sa fonction en lien avec le niveau de milieu correspondant, sa nature et son statut d'un point de vue sémiotique mais également d'identifier l'usage et le niveau d'actualisation du répertoire didactique. Cette étude, selon les trois axes définis précédemment, permet de déterminer l'efficacité des situations du point de vue de la pratique du raisonnement mais aussi du point de vue de l'utilisation du répertoire de connaissances de l'élève. Cette étude très fine des raisonnements permet également d'envisager un aménagement de l'ingénierie dans le but de permettre aux élèves de concevoir les mathématiques, et plus précisément les situations de validation, comme un moyen d'étudier précisément le domaine de validité des énoncés.

Les différentes phases de chacune des trois séances

Les différentes phases de la séance 1

- Phase 1 : Dévolution du jeu. Suite proposée 3, 8, 7, 5, 4.
- Phase 2 : Informations complémentaires.
- Phase 3 : Recherche individuelle.
- Phase 4 : Mise en commun. Établissement des résultats et désignation des gagnants.
- Phase 5 : Comparaison de méthodes.
- Phase 6 : Consigne du deuxième jeu 7, 3, 2, 5, 8.
- Phase 7 : Recherche individuelle.
- Phase 8 : Mise en commun. Exposition des résultats et désignation des gagnants.
- Phase 9 : Consigne relative au concours de propositions.
- Phase 10 : Recherche.
- Phase 11 : Regroupement. Formulation des propositions. Débat relatif aux propositions.
- Phase 12 : Phase de jeu 2, 5, 3, 2, 4.
- Phase 13 : Présentation des résultats.

Les différentes phases de la séance 2

- Phase 1 : Consigne relative au concours de propositions.
- Phase 2 : Recherche en groupe.
- Phase 3 : Mise en commun. Explication des méthodes.
- Phase 4 : Débat relatif aux méthodes.
- Phase 5 : Phase de jeu. 5, 2, 4, 0, 3.
- Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.
- Phase 7 : Proposition de nouvelles méthodes.
- Phase 8 : Phase de jeu 8, 1, 3, 0, 0.

Phase 9 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.

Phase 10 : Proposition d'une nouvelle méthode.

Phase 11 : Recherche d'un contre-exemple à une méthode.

Phase 12 : Propositions de contre-exemples. Débats relatifs à la validité des contre-exemples.

Phase 13 : Proposition de nouvelles méthodes.

Phase 14 : Phase de jeu (7-0-4-3-1).

Phase 15 : Présentation des résultats.

Phase 16 : Recherche de contre-exemples.

Phase 17 : Proposition de contre-exemples.

Les différentes phases de la séance 3

Phase 1 : Mise en commun des résultats suite à la série proposée par Hélène (8-1-1-1-0).

Phase 2 : Débat relatif au statut de la proposition d'Hélène.

Phase 3 : Présentation par la maîtresse d'une série de nombres (1-1-1-1-1).

Phase 4 : Recherche de la méthode correspondante.

Phase 5 : Présentation des méthodes. Explication du contre-exemple.

Phase 6 : Phase de jeu. (1-1-1-1-9).

Phase 7 : Recherche de contre-exemples.

Phase 8 : Phase de rédaction individuelle d'une méthode.

Phase 9 : Recherche de contre-exemples.

1 Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, nous renvoyons le lecteur au site de G. Brousseau, www.guy-brousseau.com, pour une présentation détaillée du COREM <http://www.signosemio.com/peirce/semiotique.asp>

RÉFÉRENCES

- Barrier, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Éducation et didactique*, 2, 35-58.
- Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-193.
- Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse HDR de l'université Paris 7, Paris.
- Bloch, I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé: restauration du processus interprétatif. *Les sciences de l'Éducation, Pour l'ère nouvelle*, Numéro spécial 41(1) (Coordonné par M. Bailleul) 91-114.
- Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques: étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Brousseau, G., & Gibel, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 13-58.
- Comin E. (2000), Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire. Thèse de doctorat, université Bordeaux 1.
- Durand-Guerrier, V. (2007). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. Dans A. Rouchier (dir.), *Actes du colloque Didactiques: quelles références épistémologiques? (Cédérom)*. Bordeaux: IUFM d'Aquitaine.
- Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM mathematical education*, 40, 373-384.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime*, Numéro spécial, 45-81.
- Everaert-Desmedt, N. (1990). Le processus interprétatif: introduction à la sémiotique de CS Peirce. Liège: Pierre Mardaga.
- Gibel, P. (2004). Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques. Thèse de doctorat de l'université de Bordeaux 2.
- Gibel, P. (2006). Raisonnement et argumentation: Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire. Dans N. Bednarz & C. Mary (dir.) *Actes du colloque EMF 2006 (Cédérom)*. Sherbrooke: Éditions du CRP.
- Gibel, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, 5-39.
- Glaeser, G. (1999). Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- HINTIKKA J. & SANDU J. (1997). Game-Theoretical Semantics. Dans J. Van Benthem & A. Ter Meulen (dir.) *Handbook of Logic and Language*, (p. 361-410). Amsterdam: Elsevier.
- Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 221-279.
- Lorenzen, P. (1967). *Métamathématiques*, Paris: Gauthier-Villars.
- Margolinas, C. (1994). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Dans Margolinas C. (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Mercier, A. (1995) Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. Dans Margolinas C. (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 157-168), Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Oléron, P. (1977). *Le raisonnement*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Pierce, C. S. (1995). *Le raisonnement et la logique des choses* (traduit par C. Chauviré & P. Thibaud).
- Pierce, C. S. (1978). *Écrits sur le signe* (traduit et commenté par G. Deledalle). Paris: Seuil.
- Barrier, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Éducation et didactique*, 2, 35-58.
- Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-193.
- Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse HDR de l'université Paris 7, Paris.
- Bloch, I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé: restauration du processus interprétatif. *Les sciences de l'Éducation, Pour l'ère nouvelle*, Numéro spécial 41(1) (Coordonné par M. Bailleul) 91-114.
- Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques: étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Brousseau, G., & Gibel, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 13-58.
- Comin E. (2000), Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions

- et des réformes dans la scolarité obligatoire. Thèse de doctorat, université Bordeaux 1.
- Durand-Guerrier, V. (2007). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. Dans A. Rouchier (dir.), *Actes du colloque Didactiques: quelles références épistémologiques?* (Cédérom.). Bordeaux: IUFM d'Aquitaine.
- Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM mathematical education*, 40, 373-384.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime*, Numéro spécial, 45-81.
- Everaert-Desmedt, N. (1990). Le processus interprétatif: introduction à la sémiotique de CS Peirce. Liège: Pierre Mardaga.
- Gibel, P. (2004). Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques. Thèse de doctorat de l'université de Bordeaux 2.
- Gibel, P. (2006). Raisonnement et argumentation: Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire. Dans N. Bednarz & C. Mary (dir.) *Actes du colloque EMF 2006* (Cédérom). Sherbrooke: Éditions du CRP.
- Gibel, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, 5-39.
- Glaeser, G. (1999). Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Hintikka J. & Sandu J. (1997). Game-Theoretical Semantics. Dans J. Van Benthem & A. Ter Meulen (dir.) *Handbook of Logic and Language*, (p. 361-410). Amsterdam: Elsevier.
- Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 221-279.
- Lorenzen, P. (1967). *Métamathématiques*, Paris: Gauthier-Villars.
- Margolinas, C. (1994). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse *a posteriori* des situations. Dans Margolinas C. (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Mercier, A. (1995) Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. Dans Margolinas C. (dir.), *Les débats de didactique de mathématiques* (p. 157-168), Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Oléron, P. (1977). *Le raisonnement*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Pierce, C. S. (1995). *Le raisonnement et la logique des choses* (traduit par C. Chauviré & P. Thibaud).
- Pierce, C. S. (1978). *Écrits sur le signe* (traduit et commenté par G. Deledalle). Paris: Seuil.