Méthode d'observation de la biographie didactique de très bons élèves en étude autonome, hors classe : pertinence, modalité, analyse et interprétation des épisodes

Observation methods of the didactic biography of excellent pupils in independent study, except class : relevance, method, analyze and interpretation of the episodes

Romain Mario et Alain Mercier

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/educationdidactique/2365>

DOI : 10.4000/educationdidactique.2365

ISSN : 2111-4838

Éditeur

Presses universitaires de Rennes

Édition imprimée

Date de publication : 16 décembre 2015

Pagination : 41-73

ISBN : 978-2-7535-4878-7

ISSN : 1956-3485

Référence électronique

Romain Mario et Alain Mercier, « Méthode d'observation de la biographie didactique de très bons élèves en étude autonome, hors classe : pertinence, modalité, analyse et interprétation des épisodes », *Éducation et didactique* [En ligne], 9-3 | 2015, mis en ligne le 30 décembre 2017, consulté le 19 avril 2019. URL : <http://journals.openedition.org/educationdidactique/2365> ; DOI : 10.4000/educationdidactique.2365

MÉTHODE D'OBSERVATION DE LA BIOGRAPHIE DIDACTIQUE DE TRÈS BONS ÉLÈVES EN ÉTUDE AUTONOME, HORS CLASSE : PERTINENCE, MODALITÉ, ANALYSE ET INTERPRÉTATION DES ÉPISODES

*Romain Mario, docteur en sciences de l'éducation, Aix-Marseille Université
Alain Mercier, professeur émérite, ENS-Lyon IFÉ*

L'objet de cet article est de montrer en quoi l'observation de la biographie didactique d'élèves permet non seulement d'accéder au travail des très bons élèves, mais ouvre aussi des questions nouvelles dans le champ de la didactique d'une discipline (ici, les mathématiques en classe de terminale scientifique). Nous montrons comment cette méthode donne accès à l'institution « étude autonome hors classe pour la classe des bons élèves, en mathématiques », et donne plus généralement une stratégie d'accès aux pratiques mesogénétiques que des sujets déploient dans une institution, pour qu'elle vive. Nous exposons les principes de cette méthode, sa pertinence, le positionnement choisi et enfin les perspectives d'analyses et d'interprétation de données empiriques qu'elle engendre dans le cadre d'une approche anthropologique du didactique : *les épisodes didactique ou les épisodes de la biographie didactique d'élève et la fabrication de répertoires de savoirs efficaces.*

Mots-clés : étude autonome hors classe, mésogénèse, épisodes de la biographie didactique, sujet institutionnel, réussite en mathématiques, savoirs efficaces, répertoire épistémologique, transhumance didactique.

Observation methods of the didactic biography of excellent pupils in independent study, except class : relevance, method, analyze and interpretation of the episodes

The object of this article is to demonstrate that observation of the didactic biography of pupils not only makes it possible to obtain excellent observation of the pupils, but opens also opens new questions in the field of didactics of a discipline (here, mathematics in class of final scientist S). It will show how this method gives access to the institution "out of classroom independent study for excellent students in mathematics", and moreover a general strategy accessing the mesogenetic practices in their institution, so that it lives. The article will also describe the principles of this method, its relevance, selected positioning and finally the prospects for analyses and interpretation of empirical data which it generates within the framework of an anthropological approach of the didactic one : episode didactic or episodes of the didactic biography of pupils and the effective manufacturing of directory of knowledge.

Keywords: autonomous study except class, mesogenese, episodes of the didactic biography, institutional subject, success in mathematics, knowledge effective, epistemological directory, didactic transhumance.

Notre recherche s'inscrit dans une approche ethnographique de l'apprentissage des savoirs scolaires. Elle cherche à repérer des phénomènes d'étude hors classe, à en construire les caractéristiques dans le cas des très bons élèves, et à en cerner les raisons d'être contextuelles. Ainsi, elle situe la didactique dans le champ des sciences sociales pour engager le dialogue avec les travaux de sociologie, en particulier ceux qui s'intéressent aux pratiques de l'étude hors classe, pour la classe¹ (Bautier, Rayou, & others, 2009). Nous avons en effet observé sur plusieurs années des *épisodes biographiques* de quelques très bons élèves en mathématiques, initialement spécifiés par leur réussite en classe de première. Nous avons suivi ces élèves jusqu'au baccalauréat de la filière scientifique puis dans leurs commencements au premier cycle supérieur en utilisant la *méthode d'observation des institutions par les effets biographiques qu'elles ont sur leurs sujets* qui a été mise en place par Mercier (1992, 1996) mais rarement mise en œuvre par d'autres. Elle permet pourtant de répondre de manière adéquate à nos questions de recherche, qui portent sur l'*étude autonome*² en mathématiques³. La méthode rompt avec l'observation *en classe* qui fait du professeur l'alpha et l'oméga des études empiriques, elle développe la position de principe en centrant l'observation sur les élèves choisis.

Mais il ne s'agit pas de faire reconstruire son passé par un élève et il ne s'agit pas non plus, comme lorsque l'on parle de *méthode biographique* en éducation, d'engager un processus de transformation des sujets dans le cadre d'une formation. Plutôt que de céder à une tentation holiste attachée à toute tentative de constituer la biographie d'une personne, nous considérons que nous avons ainsi une approche clinique de l'institution par le moyen de son effet pour un des sujets de cette institution. C'est pourquoi nous limitons volontairement notre recherche à l'identification de quelques *épisodes de la biographie*⁴ d'élèves de lycée (des biographèmes), chacun de ces épisodes conduisant à des apprentissages que l'on peut attester. Comme les élèves les produisent par un mouvement autonome mais qu'ils sont les effets d'un enseignement disciplinaire, nous les qualifions de *didactiques*. Notre interprétation se définit ainsi comme une approche de l'institution didactique qui organise l'étude, conduite en autonomie par les meilleurs élèves dans un effort pour accéder au savoir pertinent que nous avons qualifié de *transhumance*. Ce pour quoi nous nous sommes intéressés à ces élèves-là. L'apport de la méthode que nous avons donc reprise à Mercier (1992, 1996) est d'approcher, par les sujets, cet espace social si particulier qu'est le *didactique*.

Nous présenterons donc ce que nous avons appris des biographèmes, qui nous renseignent sur les *manières de l'étude* pour les très bons élèves, des manières qui sont pour eux des *dispositions* personnelles et qui leur sont donc quasiment invisibles mais qui seront pour nous une description de ce qu'est l'étude efficace. L'observation de cette part du fonctionnement de l'institution didactique, autrement hors d'atteinte, nous donne donc accès à des pratiques qui n'étaient décrites que par le mathématicien engagé dans les procédés de l'introspection.

Nous exposons les bases et les principes de l'approche, son processus de mise en œuvre, notre positionnement, les différentes techniques d'analyses et d'interprétations des données empiriques et enfin quelques résultats, que nous ont montré les biographèmes de nos élèves informateurs.

INTRODUCTION

Nous sommes loin de ce que l'on appelle « la méthode biographique », stratégie d'accès au réel (Wacheux, 1996) fondée sur un entretien compréhensif (Kaufman, 2007), qui est fortement utilisée dans les sciences sociales. Elle ne nous concerne pas sous sa forme courante en éducation où elle est supposée donner accès à la complexité des personnes, au-delà de leur position d'acteurs institutionnels. Par exemple au congrès de l'AREF 2010 plusieurs symposiums portaient sur ce qu'apporte le travail biographique dans la formation des adultes. Le retour des formés sur leur biographie signifie alors leur entrée dans un processus de formation.

La méthode d'*observation biographique* qui est issue de l'école de sociologie de l'université de Chicago, dans les années 1920 (Peneff, 1990), est principalement utilisée en histoire, en ethnologie, et naturellement en anthropologie, et elle est plus proche de notre manière d'accéder au réel car elle se fonde sur des observables. En didactique des mathématiques et suivant cette voie, ouverte par Peneff (*op. cit.*), Mercier (1992, 2007) en a fait une méthode de recherche clinique quasi expérimentale. Pourtant, et malgré le succès des méthodes d'observation cliniques des systèmes didactiques (Francia Leutenegger, 1999, 2000, 2009), son emploi explicite est demeuré ponctuel en didactique. Nous avons repris cette méthode dans une problématique de recherche portant sur l'étude autonome – hors classe et pour la classe –, et nous nous sommes intéressé aux très bons élèves parce qu'ils connaissent mieux que quiconque les techniques de l'étude. Ainsi, cherchant à mieux cerner le fonctionnement et la gestion de l'étude, nous avons exploré, utilisé et adapté l'approche par les *épisodes de la biographie d'un élève ou biographèmes*⁵, relativement à des apprentissages en mathématiques réalisés par les très bons élèves. Nous avons ainsi tenté de parvenir à une connaissance plus objective de l'étude que les bons élèves de lycée organisent à leur bénéfice.

Nous exposons d'abord les principes de la méthode et ses finalités, en caractérisant la manière anthropologique que nous avons retenue par la production de biographèmes comme clés d'une approche des institutions humaines. Ces objets sont en effet considérés dans l'analyse comme des indicateurs des propriétés des institutions qui en sont le lieu. Dans un deuxième temps nous exposerons la mise en œuvre des techniques d'analyse des biogra-

phèmes que nous avons produites, analyses qui mobilisent la théorie anthropologique du didactique. Puis, en dernier lieu, sur la base de quelques épisodes de la biographie didactique d'élèves de terminale scientifique, nous montrerons que l'approche est pertinente pour comprendre l'apprentissage des mathématiques. Elle permet d'accéder aux manières de faire que ces élèves construisent, en réponse aux demandes didactiques qui leur sont faites, en « sujets de l'institution » capables d'accéder à l'autonomie en occupant à leur usage personnel une posture instituante. Ils nous informent ainsi sur les attentes institutionnelles implicites, que d'autres élèves « bons sujets » trop fortement assujettis, ou « mauvais sujets » refusant de s'assujettir, n'arrivent pas à saisir pour en jouer à leur profit.

Nous considérons donc les élèves que nous observerons comme des informateurs sur le fonctionnement d'une institution didactique. Nous décrirons leurs actions comme des pratiques ethnomathématiques qui se développent comme effets d'un environnement social très particulier des classes de mathématiques. Ces pratiques appartiennent aux très bons élèves de ces classes mais apparaissent hors classe, parfois sous l'impulsion de l'entourage de ces élèves lorsqu'une culture de l'étude en général et de l'étude des mathématiques en particulier y est développée, c'est-à-dire dans les situations qui leur sont faites ou qu'ils provoquent en déplaçant le point de leur attention sur d'autres lieux où le du savoir est disponible.

Nous discuterons enfin de notre contribution à la compréhension du didactique, sachant que nous approchons les systèmes didactiques depuis le point de vue des élèves et depuis les positions relativement extérieures mais à notre sens révélatrices que construisent et occupent les meilleurs d'entre eux.

DÉMARCHE MÉTHODOLOGIQUE

L'ethnographie, considérée comme un processus de recherche est « l'étude descriptive et analytique [...] des mœurs, des coutumes de populations déterminées » (Goetz & Le Compte, 1988), ce qui exige « certaines stratégies de recherche comme l'immersion à long terme sur le terrain où se produisent les phénomènes à étudier » (Araya, 2008). C'est aussi le produit de cette recherche, la « description ou reconstruction analytique des scènes et des groupes culturels intacts » (Goetz & Le Compte, 1988,

p. 28). L'ethnographie est pour nous une manière d'étudier le monde, qui « prétend construire des descriptions de phénomènes globaux dans leurs divers contextes et déterminer, à partir de ceux-ci, les réseaux complexes de causes et conséquences qui affectent le comportement et les croyances en rapport à ces phénomènes » (*op. cit.*).

Ainsi, les biographèmes que nous observons seront situés dans les situations qui les ont produites, considérées comme réseaux complexes de causes et conséquences qui affectent le comportement.

Une recherche inspirée d'une approche ethnographique

Dans la recherche éducative, le processus de recherche ethnographique est considéré au sens large comme devant reconstruire les caractéristiques globales du phénomène étudié, permettant au chercheur d'en définir *le sens pour les acteurs*, selon l'observateur. Nous rechercherons une telle description et nous parlerons du sens des actions observées en termes de *contrats* par lesquels les sujets d'une institution didactique participent d'un groupe culturel relatif à la transmission de savoirs (mathématiques, en l'occurrence) et manifestent cette participation. Ces contrats constituent donc « des manières de faire et de penser permises à soi, ou attendues de l'autre » (Mercier, 1992). En observant dans ses dimensions épistémologiques et heuristiques « l'étude autonome hors classe des bons élèves » comme lieu de fabrication de savoirs efficaces pour la classe, nous observons les rapports de ces élèves à l'institution « classe de mathématiques », tels qu'ils les ont développés et qui, pour eux, font sens mais nous observons aussi les rapports que ces élèves développent à d'autres institutions, ce qui leur permet de nourrir d'autres apports : leur rapport aux objets désignés par l'enseignement. Nous verrons en particulier que les savoirs observés sont principalement des *savoirs faire* relatifs à l'usage de savoirs mathématiques qui ont été nommés en classe. Un enjeu important de notre travail est alors l'identification de types de savoirs faire efficaces, dont on peut penser que l'institution les attend sans savoir ni les nommer ni les faire advenir parce qu'ils ne peuvent vivre sans apport extérieur.

Les recherches d'orientation ethnographique « ont recours à l'observation participante et non

participante pour obtenir des données empiriques de première main des phénomènes tels qu'ils se présentent dans les scénarios » (Goetz & Le Compte, 1988, p. 29). De même, notre recherche a exigé des observations de terrain et l'immersion à long terme du chercheur, afin de partager « le mode de vie » des sujets de l'institution d'étude hors classe pour la classe. Les observations initiales que nous avons recueillies sont donc empiriques, naturalistes, et elles peuvent fournir « des données phénoménologiques qui représentent la conception du monde [*mathématique*⁶] des participants » (nous paraphrasons Goetz & Le Compte, 1988, p. 29). Mais elles ne parlent pas d'elles-mêmes et doivent être interprétées : ce sont des traces de phénomènes que définit une théorie de l'espace social observé. Nous allons maintenant qualifier les techniques de recueil et des traces que nous analyserons dans cette recherche.

Une recherche en didactique

Il s'agit d'observer des phénomènes didactiques, c'est-à-dire des phénomènes relatifs aux temps de la transmission d'une œuvre culturelle. Ce sont, comme nous le verrons, *l'enseignement*, ainsi bien sûr que *l'exercice*, mais pour nous ce seront *l'étude* et *l'enquête*⁷. Ces deux temps appartiennent principalement aux élèves et se développent le plus souvent en dehors des temps proprement scolaires. Ceux-ci qui sont en effet plus souvent consacrés à *l'exposé* des questions des résultats ou des techniques à étudier qui sont, aujourd'hui, caractérisés principalement par des activités conduites sous la direction d'un professeur, puis à *l'exercice* des techniques ainsi indiquées. L'action autonome des élèves est alors trop rare pour faire l'objet d'une observation systématique. Nous avons donc développé un accès en trois étapes à ces phénomènes.

La première étape a porté sur l'installation des conditions d'une *observation ethnographique* : observation naturaliste longue (sur près de deux années scolaires) et non participante (sans intervention d'aide) dans les lieux d'étude autonome de cinq élèves de classes de terminale scientifique, dans cinq lycées différents.

La deuxième étape a porté :

- Sur le choix des très bons élèves constituant nos informateurs : un à deux par classe de terminale, que nous avons suivis chez eux

une fois par semaine, dans les périodes où ils étudiaient en classe certains chapitres du programme ;

– Sur le choix des domaines d'étude : les fonctions logarithmes népériens, les fonctions exponentielles, les nombres complexes, les fonctions primitives, les intégrales, les lois de probabilités continues. Ce sont des domaines fortement liés entre eux, le savoir technique y est cumulatif et le savoir théorique de l'analyse s'y construit progressivement ;

– C'est sur ces questions mathématiques que nous sommes intervenus ponctuellement en demandant aux élèves de nous montrer des temps d'étude et d'enquête relatifs à des exercices que nous avons sélectionnés pour leur complexité : nous montrons comment ils constituent pour ces élèves *des épisodes didactiques* (Mercier, 1995).

Nous avons enfin dans une troisième étape analysé les conditions d'apparition de ces épisodes, considérés comme biographèmes pour les élèves qui les produisent et en éprouvent les effets, ce qui en donne le sens didactique.

Nos données sont donc les performances des élèves dans leurs interactions avec les savoirs qu'ils mobilisent et les questions qu'ils cherchent à traiter. Car ce que, en didactique, nous appelons *le savoir* est un *type d'objet* reconnu par les institutions, ce qui fait qu'il est toujours *attribué à une personne* suite à l'analyse d'une performance observée et évaluée par un tiers autorisé (ou par la personne elle-même se posant en tiers instituant), ce qui fait de cette personne un des sujets d'une *institution à savoir* (une personne sachant⁸).

La problématique que nous avons adoptée fait intervenir deux facteurs de variation dont il nous faut choisir les valeurs de manière à disposer d'observables exemplaires. C'est-à-dire à la fois une institution d'observation adéquate et des objets d'étude stables, comportant des enjeux de scolarité importants. Notre travail exploratoire a montré que le travail d'étude autonome hors classe pour la classe est spécifié par les élèves qui sont dans une dynamique de réussite, et qu'au niveau d'études du baccalauréat tout au moins, il est demandé explicitement et implicitement par l'institution scolaire elle-même. Nous avons donc cherché à comprendre comment cette demande s'exprime et comment se fait-il que certains élèves seulement l'entendent et la satisfont. Pour le second facteur, eu égard aux

enjeux pour les études ultérieures et au vu de la variété des domaines abordés dans cette classe, nous avons choisi d'orienter nos analyses sur des exercices touchant les grands chapitres d'analyse et probabilités. Ces deux thèmes constituent les premiers éléments d'initiation à l'analyse dans le second degré, et mobilisent, pour les probabilités, les techniques élémentaires ainsi apprises. L'ensemble constitue une organisation de savoirs stables que l'étude écologique du didactique nomme « un tout structuré » (Rajoson, 1988). Nous avons considéré que les très bons élèves nous montreraient là l'ensemble des gestes d'étude efficaces et quelques-unes de leurs organisations possibles, sachant que d'autres chercheurs ont montré la faible efficacité de certains gestes comme la rédaction de « fiches pratiques » qui enferment les élèves dans le texte officiel du savoir enseigné (Matheron, 2000).

Notre analyse didactique prend en compte très précisément le contenu mathématique des travaux qui se réalisent. À ce sujet, nous mobiliserons donc les descripteurs de la TAD, ainsi que les développements produits par Erdogan (2006, 2014) et Silvy (2010). L'analyse doit nous permettre de comprendre le fonctionnement de l'étude exigée par l'institution, sachant les conditions biographiques didactiques et sociales de l'étude. Elle vise plus largement la compréhension du fonctionnement d'un système didactique (professeur, élèves, mathématiques), du point de vue si souvent oublié des élèves (Mercier, 1998) dont l'abord suppose la prise en compte de l'environnement du système étudié.

UNE APPROCHE BIOGRAPHIQUE DE PHÉNOMÈNES DIDACTIQUES

Nous allons exposer un peu plus longuement la méthode, ses théories, ses amenants ou assignants, et l'orientation que nous avons retenue puis dans un deuxième temps, nous présenterons les principes de sa mise en œuvre pratique, et enfin les choix retenus pour l'analyse en ce qui concerne les épisodes de la biographie didactique d'élèves, en mathématiques.

Rappelons que dans le domaine didactique nous ne postulons pas que notre approche « constitue une démarche spécifique, dont l'objectif est de découvrir et d'apporter un sens à des événements collectifs et particuliers, achevés ou vécus, en construction ou en amélioration par des acteurs et sujets sociaux »

(Sanséau, 2004). Pour Peneff (1990), comme Dubar & Demazière (1997, 2008), Le Grand (1993) ou Wacheux (1996), la méthode biographique est fondée sur « les récits de vie » comme « stratégie d'accès au réel ». C'est pourquoi la méthode biographique est définie d'ordinaire comme « *une analyse d'un récit par un acteur sur des événements qu'il a vécus. Le discours est provoqué par le chercheur. L'acteur reste libre de la formulation des faits qu'il en donne. La subjectivité est donc inévitable, mais elle est connue, le chercheur la gère* » (Wacheux, 1996, p. 127). Elle n'est pas nôtre, car une telle méthode nous conduirait à l'analyse d'épisodes reconstruits par un acteur, le processus de cette reconstruction validant l'interprétation portée par le récit, qui vaudrait donc d'abord pour cet acteur lui-même.

La *méthode biographique* fondée sur des récits de vie donne toujours lieu à des débats dans le champ sociologique. La diversité des positions sur la nature d'un épisode biographique, sur sa structure, sur les techniques propres à sa collecte, du récit de vie à l'observation quotidienne en passant par l'entretien d'anamnèse (Maffesoli, 1980 & Fritsch 1982, 1983), découle de choix théoriques et épistémologiques fondamentaux comme l'expliquent Heinritz & Rammstedt (1991), Mercier (1992), ou Schwartz (1993). Il nous apparaît d'abord qu'un choix est à effectuer au-delà du développement de la méthodologie entre les « réalistes » et les « antiréalistes ». Les réalistes considèrent que l'épisode biographique constitue une description approchée, par tel sujet dénommé, de l'histoire que ce sujet a « réellement vécu » de manière objective et subjective. Alors que « les antiréalistes » considèrent pour leur part que la relation entre narration de faits ou épisode et la biographie ou l'histoire reste incertaine, et même que l'appellation de biographie ne fait pas sens en termes de « vécu ».

Trois principales catégories d'objets sont appréhendables à travers la méthode biographique selon Bertaux (1997) : les mondes institutionnels, les catégories de situations et les trajectoires sociales et institutionnelles. Les critiques de l'anthropologie sur cette « méthode biographique » sont fortes, Bessin (2009) les rappelle :

« Pierre Bourdieu (1986) notamment porta loin la critique en parlant d'illusion biographique. Stigmatisant l'oubli des relations objectives et des structures, il considérerait que la relation du chercheur et de l'enquête

mériterait un peu plus d'approfondissements sur les conditions de production de ce matériau particulier. [...] Le terme « histoire de vie » prêtant à confusion entre l'histoire vécue par une personne et le récit qu'elle pouvait en faire, on lui préféra alors celui de « récit de vie » (Bertaux, 1997), ce qui n'épuise aucunement les débats. En rappelant que la méthode biographique peut aussi être d'abord conçue comme un moyen d'accès aux situations réelles traversées, Jean Peneff (1994) tient à rajouter dans cette nébuleuse bien d'autres chercheurs, en premier lieu ceux qui se réclament avec lui de la tradition de l'École de Chicago, mais aussi certains proches de P. Bourdieu. »

Mais nous ne cherchons pas le sens de l'action pour les acteurs (par exemple, le sens de leur recherche de l'excellence ou le sens de leur investissement dans les mathématiques) mais le sens de leur action pour le fonctionnement de l'institution (le sens et les méthodes de l'étude). Nous ne travaillons donc pas sur des récits ou des narrations produits par les sujets institutionnels, mais sur des observations de leur action qui ne sauraient constituer des « histoires de vie » mais, au mieux, des *biographèmes* au sens de Barthes (1975) : des fragments. Nous situons ces biographèmes dans un monde institutionnel qui, dans le cas de notre recherche, est le monde de l'école au sens large, qui se bâtit autour de rapports à des savoirs généralement organisés en disciplines. Ce principe déterminant de notre perspective a pour socle le fait que *les logiques qui commandent, organisent ou statuent un monde institutionnel sont également à l'œuvre dans tous les microcosmes qui le composent* : un principe énoncé aussi par Bertaux (2005) et à l'œuvre dans les approches cliniques des phénomènes sociaux. Ainsi, nous considérons par principe que, en observant de façon approfondie un seul ou quelques-uns de ses microcosmes – dans le cas de notre recherche, l'étude que conduisent chez eux les élèves qui réussissent les mathématiques –, nous devrions être en mesure de saisir certaines des *logiques institutionnelles* du monde scolaire.

Nous postulons alors que les *épisodes de la biographie didactique d'un sujet* sont des construits de la recherche. Ils n'appartiennent donc pas à l'observation directe de l'action des sujets mais à une interprétation que nous faisons, en didacticiens et en position d'anthropologues du quotidien. Car nous avons une théorie de ce quotidien didactique qui nous fournit des interprétations dont on peut confronter

les conséquences imaginées aux observables. En ce sens, nous sommes donc plus proches de Bourdieu que de Bertaux. Car, bien que nous référions à une tradition ethnographique puisque notre observation est réalisée par l'intermédiaire d'un informateur (Peneff, 1990), cet informateur ne tient pas discours sur le sens des actions observées, il agit pour son compte en nous laissant observer son action. Ainsi donc, les recherches réalisées par l'ethnologue nous intéressent lorsqu'elles travaillent sur la description des pratiques du quotidien comme éléments d'une culture (Fritsch, 1983).

Pourquoi des épisodes didactiques

Les épisodes que nous observons sont provoqués par le chercheur dans le dispositif d'observation clinique. Ils existent pour cet observateur qui les construit et pour les sujets de nos observations, et ces épisodes pourraient être reconnus comme des *moments d'apprentissage, dans des situations*. Les acteurs peuvent ou non en avoir une conscience précise : cela n'est pas notre question. Car pour nous, le fait qu'un sujet institutionnel « sache » quelque chose est toujours l'effet d'une attribution de savoir, suite à l'observation d'un comportement jugé conforme à un comportement institutionnel attendu qui est, dans cette institution, *une technique de traitement d'un type de problèmes*⁹.

Nous sommes donc à la recherche d'indices dont nous réalisons l'interprétation dans le cadre d'une théorie du didactique fondée sur la notion de situation. Notre observation est directe, dans le temps et sur les lieux de l'action, nous l'avons pour cela qualifiée d'ethnologique. Notre intervention est à visée phénoménoteknique et pour cela nous l'avons qualifiée de clinique. Nous cherchons à construire des épisodes de la biographie des élèves relativement au savoir, parce que l'enjeu des institutions didactiques est d'obtenir l'évolution de l'univers cognitif des sujets qui leur sont confiés en position d'élève et que la compréhension du fonctionnement didactique de ces institutions didactiques élémentaires que sont les systèmes didactiques suppose l'analyse de leurs effets.

Nous reconstruisons les épisodes de la biographie didactique des élèves de manière à les situer dans des *épisodes didactiques* comme des temps d'action didactique découpés dans le flux continu des événe-

ments, l'action didactique appartenant à l'élève dans la situation d'étude autonome qui est sienne. Le chercheur observateur laisse ainsi la possibilité à l'acteur de disposer, librement, de la formulation des faits qu'il vit et des interprétations qu'il en donne dans le mouvement même de son action. Le chercheur tente alors d'identifier dans les actions d'étude d'un élève les traces des logiques de situation et les stratégies qui seraient susceptibles de se retrouver dans plusieurs situations similaires. Il construit alors des *épisodes de la biographie didactique d'un sujet d'une institution didactique ou biographèmes*, interprétés comme raison d'être des changements observables du comportement de cet élève, en termes d'apprentissage : un comportement (le rapport d'un élève à un objet ou un outil mathématique) change ou apparaît à cette occasion et dans cette situation. Pour nous, ces biographèmes sont le produit de l'assujettissement de ces sujets à une institution donnée et des épisodes didactiques qui adviennent dans cette institution. Notre approche n'a donc pas pour objet de saisir de l'intérieur, les systèmes de schèmes ou de représentations d'un élève ou d'un groupe d'élèves ni encore leurs logiques d'action dans leur développement biographique, mais de comprendre les demandes implicites et non conscientes faites par l'institution scolaire à ses *bons sujets*. Nous engageons ainsi une *approche biographique des institutions*, par la mise en évidence des dispositions générales de ses « bons sujets », donne accès à un *temps institutionnel* qui articule les dimensions collective et personnelle de la direction d'étude et de l'étude des savoirs. Ainsi, les institutions sont pour nous des instances produites dans le temps, par l'activité de leurs sujets.

Dès lors qu'on évoque les biographèmes se pose la question de la généralisation des résultats. C'est ainsi qu'il nous faut passer du spécifique au générique, de l'aspect micro de l'étude (institution d'études autonomes mathématique, hors classe pour la classe) à l'aspect macro de l'étude (l'institution de l'étude scolaire, par l'enseignement explicite). Nous avons considéré que la possibilité d'une genericité des phénomènes observés repose sur la mise en exergue de processus génériques par des configurations spécifiques de rapports sociaux. Nous avons alors postulé qu'il est possible, en nous appuyant sur une analyse *a priori* fondée sur nos savoirs théoriques, d'aller chercher le générique au sein des formes particulières et spécifiques observées. Pour cette analyse typologique, nous avons aussi considéré que le sens

de l'action n'appartient pas seulement à l'acteur qui la conduit mais vient aussi de l'institution c'est-à-dire du regard des autres sujets qui savent, de même que l'action ne fait jamais sens pour un seul et qu'elle doit toujours être considérée comme adressée à un autre, qui en partage la compréhension : elle est conjointe. C'est ainsi que les actions de transformation et de réorganisation des techniques de résolution par les élèves sont décrites en cohérence avec des approches anthropologiques des techniques humaines, qualifiées ici par l'enjeu didactique.

« Il s'agit, certes, d'une activité didactique, mais la prise en compte de cette seule donnée ne suffit pas : il est nécessaire de pousser plus loin l'analyse pour saisir l'activité dans laquelle les sujets sont engagés, et ceci afin de pouvoir rendre compte de son intelligibilité. La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) s'emploie à décrire les moyens, les outils, grâce auxquels s'accomplit le travail mathématique, tant au cours de l'étude que hors étude, tant pour les élèves (en train d'apprendre) que pour « l'homme », au sens générique du terme, engagé dans une activité mathématique. [...] dans la modélisation que nous utilisons, les objets engagés pour la réalisation d'une activité se différencient en objets ostensifs et objets non-ostensifs » (Mercier, 1992).

Ainsi un ostensif rend visible (et donc appelle si elle n'est pas immédiate) une action technique élémentaire que l'on peut décrire (Matheron, 2000). De même, l'analyse n'est pas pour nous celle d'une activité mathématique en termes d'objets manipulés, car elle consiste à comprendre la mobilisation par un élève de ce que l'on pourrait appeler l'ostension que l'ostensif réalise. Lorsque cette ostension conduit à l'irruption d'un ou plusieurs non ostensifs associés, nous avons un biographème si l'élève identifie cette configuration nouvelle d'objets comme savoir nouveau. Nous présenterons plus loin un exemple de biographème et développerons la technique de sa production.

Le processus de notre enquête

Notre connaissance initiale des phénomènes de l'étude comporte une part importante de stéréotypes, de clichés et de figurations collectives d'acception commune et une petite part d'observation, d'expé-

rience et de construction théorique, bien que nous sachions depuis plusieurs années l'importance de l'activité des élèves dans l'apprentissage scolaire (Mercier, 1999 ; Castela, 1995, 2005, 2008). Nous savons ainsi que les élèves participent à l'enseignement. Leur activité spécifique, l'étude, s'engage à l'occasion de l'enseignement qui les rend ignorants (Mercier, 1996) et comporte deux moments initiaux que nous nommerons respectivement le moment de *recherche* d'une réponse et/ou d'*enquête* sur les éléments de réponses disponibles, puis le moment d'*étude* des acquis de la recherche/enquête. Ce double mouvement devrait aboutir à des gestes rarement observés dans le monde scolaire mais bien connus dans la recherche ou l'enquête : *rédaction* puis *exposé* des savoirs appris, *identification* et *validation* collective de ces savoirs. Car ces *temps didactiques* dans le cadre d'une institution n'existent de fait que dans des lieux très fortement didactiques, pour des savoirs de haut niveau la société n'en sait guère l'importance et ne les exige pas de l'école élémentaire (même, dans ce cas, elle les limite) ou secondaire ils sont nommés uniformément « travail de l'élève » ou « devoirs » ce qui ne permet pas d'en comprendre ni les modalités ni les effets.

Nous considérons que l'élève appartient à un seul système didactique mais se déplace dans plusieurs champs sociaux, potentiellement porteurs d'intentions didactiques et nous cherchons à dégager des éléments de connaissances critiques, basés sur *l'observation en temps réel des pratiques ethniques de l'étude mathématique*, sur le lieu où ces pratiques sont conduites. Il s'agit de comprendre l'étude réussie des bons élèves et si possible, de penser un archétype de son fonctionnement et de sa gestion. C'est ainsi que le chercheur que nous sommes, conscient de sa relative ignorance, s'est adressé sur le terrain à des élèves, bons sujets de l'institution scolaire comme les appelle Chevallard, dans le microcosme des temps et des lieux où ils et elles étudient. Nous les avons sollicités à nous montrer leurs interprétations de divers exercices mathématiques, que nous leur avons proposés et que nous avons collectés pour qu'ils couvrent les éléments essentiels du programme de la classe de terminale scientifique. Car le rapport d'un élève aux mathématiques ne se réduit pas aux liens formés dans les lieux et les temps officiels de l'institution scolaire. Penneff (1990) souligne que l'approche biographique permet d'accéder à des données négligées par les approches institutionnelles

et Chevallard (1989) affirme que les deux approches, sont complémentaires, parce que les rapports institutionnels aux objets sensibles d'une institution ne sont pas immédiatement les rapports personnels effectifs à ces objets, qui peuvent ne pas être idoines et qui supposent des rapports à des objets pertinents mais non sensibles que selon nous l'analyse du site des objets institutionnels rend visibles (Silvy & Delcroix, 2008, 2009 ; Silvy, Delcroix & Mercier, 2013).

LA CONSTRUCTION D'ÉPISODES DE LA BIOGRAPHIE DIDACTIQUE D'UN SUJET, EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

La méthode que nous développons avec l'idée de définir des épisodes de la biographie didactique d'élèves, en mathématiques, est cohérente avec les théories didactiques qui considèrent les systèmes didactiques comme institutions de transmission des savoirs, et elle correspond aux exigences de notre problématique de recherche. Notre question est donc : « Comment des élèves qui réussissent en mathématiques apprennent-ils ? ».

Les techniques topogénétiques et chronogénétiques dans un système didactique sont en principes déterminées par les pratiques mésogénétiques (Schubauer-Leoni et al, 2010). Mais l'action conjointe des professeurs et des élèves ne se situe pas entièrement dans le lieu et le temps de la classe, elle se poursuit hors classe, sous la responsabilité des élèves, ce qui suppose une action mésogénétique des élèves qui étudient. Les travaux de Mercier (1999) ont montré que l'élève a, lui aussi, sa part dans le fonctionnement didactique, et que cette part est importante en classe même. Nous poursuivons cette ligne avec confiance, elle est explorée par Liger-Grimaud (2014) mais depuis plus longtemps par Alain Mercier, Yves Chevallard et principalement ces dernières années par Corine Castela, qui ont montré qu'à l'origine de toute action didactique il y a des gestes didactiques venus de l'instance apprenante.

La mobilisation par l'élève d'un geste d'étude pertinent relatif à un objet mathématique peut donc être questionnée, puisque le professeur ne contrôle plus le milieu, permettant à l'élève d'établir un rapport idoine au savoir, la mésogenèse a changé de mains. Dans un tel contexte nous postulons que l'on peut observer des actions d'étude pertinente par rapport à ce que l'institution attend, sans pour autant

que cette pertinence ne soit fondée dans l'enseignement (Ligozat, 2002 ; Schubauer-Leoni, Leutenegger, & Forget, 2007). Nous considérons que chaque objet du milieu organisé en autonomie par les bons élèves est un moyen d'enseignement qui leur permet de faire progresser leur temps personnel. C'est pour cela que l'observation du travail d'enquête mathématique des bons élèves constitue une entrée importante pour la connaissance et la compréhension des institutions de transmission des savoirs et en particulier, la part essentielle des élèves dans leur efficacité qui tient à leur action autonome.

Tandis que la didactique des mathématiques consacre la plus grande partie de son effort à l'identification et à la modélisation des phénomènes liés à la scène officielle des systèmes didactiques, l'approche par les sujets apporte donc une meilleure connaissance de ces institutions en montrant comment une institution est le produit de l'action continue de ses sujets. Nous explorons les manifestations et le fonctionnement du travail mathématique que produisent les élèves, sujets de l'institution scolaire, pour identifier quelques-unes des questions qui accompagnent à la fois l'étude des savoirs et l'enquête sur les questions mathématiques, par les élèves eux-mêmes. Nous pensons ainsi travailler une question centrale en didactique tout en nous écartant de l'attention exclusive accordée au professeur, qui n'est pas pour nous le seul sujet instituant¹⁰. Nous rejoignons ainsi Chevallard (1996, 1999) qui montrait que la « geste du professeur » avait conduit à la quasi-disparition des temps d'étude.

Une méthode d'observation clinique

La didactique des mathématiques a observé individuellement les élèves pour savoir quel est, pour eux, le sens de leurs activités mathématiques, *quand ils sont en difficulté scolaire* (Brousseau 1983 ; Brousseau et al., 1979 ; Brousseau 1980, 2007 ; Genestoux 2000 ; Assude et al., 2010, 2011) comme si la question du sens ne se posait pas pour les élèves qui réussissent les tâches scolaires (Mercier, 1992). Certains complètent les observations de classe par des entretiens, dans un courant d'approches qualitatives qui porte sur des observations cliniques de cours de mathématiques (Blanchard-Laville et al., 1996 ; Leutenegger, 2000). Cela limite singulièrement l'accès à l'action didactique des élèves, d'abord parce

qu'elle est souvent peu visible en classe, ensuite parce qu'elle n'est pas enfermée ni dans les temps ni dans les lieux scolaires. L'approche biographique serait d'après Wacheux (1996), utilisée lorsque le sens des pratiques passées est ce qu'il s'agit de construire. Nous reprenons aux dispositifs qu'il décrit l'idée de la production d'interprétations partielles *in situ*. C'est ainsi que Mercier (1992) l'a construit par une réinterprétation de la Théorie des Situations Didactiques en Mathématiques (TSDM) et qu'il l'a spécifiée à notre objet, montrant ainsi la participation des élèves à l'enseignement (Mercier, 1998, 2008).

La méthode biographique est une méthode clinique au sens de Leutenegger (1999, 2000, 2002, 2009), et nous avons proposé un léger changement dans les pratiques normales ou habituelles des élèves afin de voir comment le système didactique qu'ils mettent en place résistait à cette perturbation. Nous avons demandé aux élèves observés dans leur monde propre (leurs lieux ordinaires de travail et les personnes de leur entourage) de travailler en temps réel devant nous non seulement sur les objets proposés par leur professeur, mais aussi sur des exercices mathématiques que nous leur avons proposés. Nous avons choisi ces exercices pour leur capacité à mobiliser l'ensemble le plus vaste possible de connaissances dans un domaine d'étude particulier (l'analyse et les probabilités, dans les cas qui seront présentés ici). Cela nous a permis d'observer d'abord l'organisation de leur travail, en particulier les réseaux de connaissances et de savoirs qu'ils mobilisent ainsi que les indices ostensifs qui sont à l'origine de cette mobilisation et qui ont été étudiés d'abord par Matheron (2000), puis les moyens d'enquête mathématique qu'ils se donnent lorsque leurs savoirs leur paraissent insuffisants et qu'ils vont chercher ailleurs des éléments supplémentaires. Nous avons ensuite entrepris de produire un découpage de leur activité enregistrée en *épisodes didactiques* situés, produits dans et par des situations. Nous avons enfin entrepris de construire, le cas échéant, une interprétation de l'évolution des actions observées en situation, ce que nous appelons *des épisodes de la biographie didactique de ces élèves, en mathématiques, hors classe*.

Les traces de leur activité didactique nous sont donc en quelque sorte données à voir par les élèves, qui sont nos informateurs sur l'étude des mathématiques. En les interprétant nous en faisons des signes, qui désignent des faits élémentaires que nous organisons en épisodes didactiques qui peuvent être

les lieux et les occasions d'épisodes de la biographie didactique des élèves. Ce sont nos constructions théoriques, obtenues par l'interprétation des traces recueillies, et nous pouvons les comparer à d'autres épisodes didactiques, impliquant les mêmes élèves ou d'autres. Ni à travers l'analyse et l'interprétation des traces de l'activité que sont les copies et devoirs mathématiques des élèves¹¹, ni à travers des entretiens qui conduisent à la construction d'un récit à la fois subjectif, nous n'aurions pu obtenir cette compréhension de type anthropologique.

Ainsi lorsqu'un élève révise, apprend des formules mathématiques, traite un exercice, discute de ses réussites, de ses stratégies, de ses méthodes de résolution, ou de ses erreurs sur un « savoir mathématique particulier », nous pourrions reconnaître des faits langagiers, scripturaux, graphiques, comme traces d'*épisodes didactiques si ces actions font sens comme occasions d'étude* du point de vue de l'observateur. Nous pourrions reconnaître ces épisodes didactiques comme *producteurs d'épisodes de la biographie didactique de l'élève observé* si l'épisode didactique fait mémoire pour l'élève, et si l'observateur ou l'élève peut attester que le rapport de cet élève à un objet mathématique a changé à cette occasion. Ainsi, nous posons le concept d'épisode de la biographie didactique d'un élève ou *biographème* comme un objet du champ de la didactique des mathématiques, et son analyse épistémologique se fera dans le cadre théorique consistant pour la description des mathématiques qu'est la Théorie Anthropologique du Didactique ou TAD (Chevallard 1994, 2003, 2007). Pour autant nous ferons appel à des descripteurs nouveaux, venus d'efforts de compréhension des phénomènes didactiques ordinaires et de l'action des élèves, de la Théorie des Situations Didactiques en Mathématiques ou TSDM, à la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique ou TACD. Certains de ces descripteurs sont d'ailleurs venus en réponse à des questions sur l'apport des élèves au fonctionnement des systèmes didactiques soulevées par l'approche biographique (Erdogan et Duchet, 2005 ; Silvy et Delcroix, 2009 ; Mercier, Silvy et Delcroix, 2013 ; Erdogan, 2014).

Dans le souci de trouver ce qu'il y a de générique dans chacun des biographèmes observés, nous avons cherché à disposer d'une série d'épisodes permettant les interprétations et les comparaisons, par regroupement de données empiriques qui correspondent à des élèves dont les formes observables d'étude

varient, mais qui appartiennent toutes à de très bons élèves. Elles sont donc, par principe, efficaces. C'est ainsi que nous avons sélectionné un échantillon de biographèmes en variant les situations d'étude. Mais d'après notre analyse épistémologique et scolaire *a priori* toutes ces situations appellent à des recherches ou des enquêtes importantes. Notre population cible a finalement été restreinte à cinq très bons élèves de terminale scientifique de cinq établissements scolaires de la région de Salon de Provence, Aix-en-Provence et Avignon, qui excellaient en mathématiques et que nous suivions depuis la première. Ils sont d'origines sociales variées, ils ne développent pas tous les mêmes stratégies, mais nous n'en présenterons ici qu'un seul.

Le recueil des traces

Nous avons observé directement l'activité des élèves, *à leur domicile*. Les observations sont initiées par l'observateur qui fixe un calendrier de sa présence, et l'élève peut ou non choisir les questions mathématiques qu'il souhaite aborder, les objets mathématiques sur lesquels il souhaite mener l'enquête, les exercices à traiter. Les objectifs de la recherche sont annoncés à l'amont du recueil des données, dans le but de contrôler l'influence sur la recherche de la subjectivité de l'observateur comme des élèves membres de l'échantillon. C'est le motif premier de *l'analyse ascendante* des situations observées (Assude, Mercier, Sensevy, 2007). Cette analyse, fondée sur les éléments théoriques que le chercheur a mobilisés pour prédire des phénomènes hypothétiques, produit des observables permettant une interprétation approfondie, *des symptômes*.

Le travail de collecte de *traces* s'est donc déroulé dans une interaction régulière, sur une période de quatre à cinq mois. Nous avons pris l'engagement de ne jamais montrer nos enregistrements, sauf à y découper une photographie où les personnes sont non identifiables, dans le cadre strict de présentations de recherche. L'observation associe, aux enregistrements vidéo, la collecte des traces écrites de chaque tâche réalisée par chaque élève. Nous avons utilisé un formulaire de présentation et de consentement (inspiré de ce que propose VISA sur le site de l'IFÉ) lors de la première rencontre avec chacune des familles. Ce document mentionnait la nature de la recherche, ses problématiques, la non-utilisation

publique des données, les conditions de participation des élèves. On demandait aux élèves et à leurs familles d'accepter plusieurs séances d'observation filmées. Les modalités de l'enregistrement comprenaient la possibilité de demander l'arrêt du caméscope. Ce document¹² a été signé conjointement par le chercheur, les élèves et leur famille respective et chacune des parties en a gardé un exemplaire qui fait foi.

Tout en travaillant, *l'élève s'est engagé à commenter à voix haute ses hésitations comme ses décisions*. La méthode demande donc que se développe une action supposée spontanée mais provoquée par la demande de l'observateur et que l'élève produise en continu, à l'intention de cet observateur, un discours narratif ou explicatif relatif à une tâche mathématique. Le chercheur s'est interdit d'intervenir en cas de blocage ou d'arrêt de l'élève, l'objectif étant de le laisser se conduire comme à son ordinaire, dans ses habitudes d'étude autonome hors classe de tâches mathématiques. Nous avons proposé d'aider mathématiquement et gratuitement l'élève lorsque l'observation ferait apparaître une difficulté non surmontée en échange de la mise en place du dispositif d'accès à son espace privé, mais cela ne s'est pas produit et nous avons pu tenir notre engagement de non-intervention.

Un suivi longitudinal

Nous avons suivi sur deux années scolaires les cinq élèves de notre échantillon, afin de mieux connaître leurs vécus, leurs façons de faire, l'écologie de leur institution d'étude autonome hors classe et enfin, d'identifier les logiques d'actions qu'ils avaient mises en œuvre et surtout d'apprécier leur évolution et leur sentiment relatif à l'organisation du temps de travail qui était le leur : « leur mode de vie » en étude autonome hors classe pour la classe. La démarche a été complétée par l'analyse des résultats au baccalauréat (session juin 2007 et 2008)¹³ de chacun des élèves de l'échantillon, afin de vérifier la pertinence de leur travail mathématique sur leur réussite aux différents exercices du sujet officiel de mathématiques, de même que plus tard leur réussite aux différents concours post bac et si possible leurs différentes évolutions. Ce suivi longitudinal nous a semblé essentiel pour garantir la validité de nos interprétations. Sur la période, nous avons réalisé

six séances d'observation provoquée avec chacun des élèves de l'échantillon. Ces séances ont été complétées par des échanges informels conduits en fin de période, avec chacun des élèves.

En concordance avec une approche anthropologique, la première phase de cette recherche était l'installation des conditions de la collecte des traces enregistrées. Nous avons ainsi engagé un processus, « l'étude descriptive et analytique [...] des coutumes, des mœurs de populations déterminées », qui est supposé aboutir à la reconstruction des caractéristiques du phénomène examiné (Goetz & Lecomte, *op. cit.*) : ici, l'existence, l'identification, ou la construction d'organisations de savoirs efficaces. Nous les définirons comme « les répertoires épistémologiques des élèves » en introduisant, avec la notion de répertoire, l'idée que l'établissement d'une stratégie d'action dans un milieu complexe suppose de disposer d'une « boîte à outils » (qui est ici « un répertoire de résultats ») permettant l'invention technique¹⁴. Nous recherchons en outre la description et l'analyse des contrats implicites entre l'institution didactique et ses sujets élèves, relatifs à l'usage de ces répertoires. Ces contrats sont porteurs de manières de penser, de savoirs faire, et de techniques d'apprentissage, ils forment le rapport des élèves à l'institution « étude autonome de tâches mathématiques, hors classe pour la classe ».

«... les épisodes didactiques pertinents doivent nous être montrés par des élèves pour qui ils font sens en produisant des fragments de leur biographie didactique, le point d'observation ne peut se situer dans la classe de mathématiques proprement dite. La construction d'un lieu institutionnel où les élèves pourraient apporter les questions venues de leurs rencontres avec l'ignorance institutionnelle et gérer ainsi positivement certains temps de leur biographie est alors nécessaire à la constitution d'un point d'observation des épisodes didactiques tels qu'ils existent pour des élèves, en classe ou à partir du travail scolaire. Mais un tel lieu doit avoir vis-à-vis de l'établissement d'accueil une autonomie de décision qui nécessite qu'il se présente nettement comme un lieu pour la recherche, et que l'usage que pourront en faire les élèves d'une classe soit compris comme le résultat d'un échange de services entre l'institution d'enseignement et une institution de recherche. » (Mercier, 1992, partie 4 chapitre 1).

Premières mises en place : année scolaire 2006-2007

En octobre 2006, nous avons contacté cinq professeurs de mathématiques et de physique de différentes classes de terminales scientifiques S dans cinq lycées de la région PACA. Nous leur avons demandé de nous mettre en contact avec leurs meilleurs élèves en mathématiques et avec leur famille pour la mise en place d'un dispositif de recherche consistant à faire des observations des pratiques d'étude autonome hors classe pour la classe de tâches mathématiques de différents élèves, dans leurs sphères d'étude privées. Un mois plus tard, une seule élève nommée AC et sa famille avait pris contact avec nous pour avoir des éclaircissements sur la recherche et son dispositif. Nous avons commencé à travailler avec celle-ci, avant de chercher à rencontrer d'autres « élèves informateurs ». Le premier rendez-vous a eu lieu directement dans la famille d'AC, le dimanche 18 octobre 2006 après-midi. En présence de tous les membres de la famille, nous avons présenté la recherche : observer les élèves en étude autonome hors classe relativement à des tâches mathématiques, analyser et interpréter le fonctionnement et la gestion du travail mathématique pour en décrire les organisations mises en jeu par des élèves. Nous avons présenté le dispositif avec le document officiel¹⁵ qui stipule les conditions et les engagements du chercheur et du laboratoire de recherche UMR-ADEF/P3¹⁶ en ce qui concerne l'utilisation des enregistrements. Nous avons eu deux autres rencontres, le 24 novembre et le 15 décembre 2006, pour discuter de la mise en place du dispositif : c'est le chercheur qui fournit les exercices sur lesquels l'élève devra travailler, mais éventuellement les séances peuvent porter sur les exercices de maison donnés par le professeur de mathématiques de la classe. Les séances ont lieu le week-end, en semaine (les mercredis) ou sur les vacances scolaires, afin de permettre à l'élève de mieux gérer ses semaines de cours et ses devoirs dans l'établissement scolaire. Le chercheur est un simple observateur qui n'intervient pas dans le processus de rédaction d'un exercice. Ces deux dernières rencontres nous ont permis d'établir un climat de confiance et de respect. Un peu plus tard, nous avons reçu l'accord de la famille et de l'élève pour débiter les séances. Avec AC, nous avons pu avoir sept séances couvrant la période janvier-mai 2007¹⁷.

Mise en place, année scolaire 2007-2008

Nous avons demandé à chacun des cinq professeurs déjà contactés en 2006 de nous accorder quelques minutes d'intervention dans leur classe, pour présenter nous-même le dispositif¹⁸ aux élèves ayant un bon niveau selon leur professeur. Nous avons expliqué aux élèves l'objet de la recherche comme étant une analyse et une interprétation de leurs travaux mathématiques hors école qui conduisent à leur réussite en mathématiques. Nous avons précisé qu'il s'agit pour eux d'accepter de faire des exercices, que le chercheur propose en fonction de la progression pédagogique de la classe dans laquelle évolue chaque élève. Nous avons précisé aussi que les observations se dérouleraient à leur domicile durant leur temps normal d'étude personnelle, à un moment défini ensemble. Nous avons souligné que la recherche n'avait pas pour objectif de les évaluer, mais de voir comment ils travaillent les mathématiques. Nous avons souligné que notre présence dans leur sphère privée ne perturberait pas leur quotidien d'élève d'une classe de terminale scientifique candidat au baccalauréat. À la fin de la présentation, une moyenne de trois élèves par lycée avait accepté [sous réserve de l'accord des parents] de participer au dispositif et ces élèves se réjouissaient de collaborer à une recherche portant sur leurs œuvres mathématiques. À ces élèves, nous avons laissé nos coordonnées et les documents officiels [lettre du directeur de recherche et du laboratoire donnant le caractère officiel de la recherche]. De façon spontanée certains élèves nous ont laissé les coordonnées de leurs parents¹⁹.

Huit parents d'élèves ont accepté de nous rencontrer. Ainsi, d'octobre 2007 à janvier 2008 nous avons

visité chacune des familles pour présenter le dispositif, négocier les conditions de sa mise en place et signer le contrat. Les entretiens avec les familles ont été réalisés au domicile, dans les salles de séjour et souvent en présence de tous les membres de la famille. Trois familles nous ont fait savoir qu'elles ne se sentaient pas à l'aise à l'idée que leurs enfants se fassent filmer, et ont renoncé. Quatre élèves et leurs familles nous ont confirmé leur accord total²⁰. Nous avons alors consulté les bulletins scolaires²¹ des élèves qui avaient accepté d'être *nos informateurs*. Ensuite, nous avons discuté avec les professeurs et nous avons choisi *un élève par établissement* à partir des informations recueillies relativement à : la qualité des rendus mathématiques (devoirs de maison, intervention, participation en séances de cours, évaluations normatives), et la position scolaire en mathématiques.

Les élèves retenus sont âgés de 15 à 17 ans, représentatifs des élèves de terminale scientifique (parents commerçant, enseignant, agriculteur, cadre, restaurateur, conducteur de bus, parents au foyer). Nous les avons observés de janvier à mai 2008. Nous présentons ici le planning des séances d'observation de AC, la première année : nous avons repris ce schéma et cette fréquence pour l'année suivante.

En juillet 2008, nous avons observé les résultats mathématiques de ces élèves au Baccalauréat (session de juin), et relevé les notes obtenues question par question, exercice par exercice, pour comparer leurs résultats mathématiques aux résultats de la population des candidats de la session 2008 des quatre classes de terminales scientifiques S des établissements auxquels ils appartenaient²² : nous avons bien choisi les meilleurs élèves de la cohorte.

Tableau récapitulatif des séances d'observations de AC

Année scolaire 2006-2007		Institution d'étude Autonome : AC	
Mois	Semaines	Objets mathématiques en étude autonome	Référence des séances d'observations
Janvier	15-21	Fonctions exponentielles/équations différentielle / logarithme népérien	Réf : AC/S1/20012007 Réf : AC/S-2/22012007 Réf : AC/S-3/25012007
Février	19-27	Nombres complexe	Réf : AC/S-4/26022007
Mars	7-14	Similitude du plan : similitude indirecte de rapport 1	Réf : AC/S-5/11032007
Avril	10-15	Probabilité : loi continue	Réf : AC/S-6/19042007
Mai	2-11	Géométrie dans l'espace / Similitude indirecte	Réf : AC/S-7/09052007

L'identification et l'analyse des épisodes didactiques et biographiques

L'analyse des épisodes de la biographie didactique d'élèves constitue un exercice délicat. Nos données empiriques ont d'abord été découpées en épisodes, dont nous ferons une analyse épistémologique *a priori* afin de nous mettre en mesure d'identifier des logiques d'actions invisibles lors de l'observation, mais après coup puisque c'est l'observation des objets mobilisés dans l'action qui nous permet de connaître les enjeux de l'enseignement et de l'étude dans les situations observées. Le découpage suit la règle du découpage théâtral : on change d'épisode (de scène) quand un objet (personnage) nouveau entre ou sort du champ (de scène). Nous avons alors constitué un corpus en partant des épisodes qui nous ont surpris, et que nous avons retranscrits intégralement. Ainsi nous sommes en mesure de sélectionner et d'analyser les données empiriques en les organisant en épisodes didactiques puis épisodes de la biographie didactique d'un élève, enfin en regroupant différents épisodes biographiques semblables, car ils ont été produits par des exercices mathématiques différents demandant la mise en œuvre de techniques semblables et mobilisant de ce fait les mêmes objets mathématiques. Nous avons opté pour une analyse thématique permettant de comparer ensuite les effets du contenu en termes de savoirs (Mercier, 1994), et nous avons coordonné ces analyses avec une analyse lexicale, conduite à partir des expressions écrites, parlées, graphiques, que nous avons enregistrées. Cela nous a permis, d'accéder à une chronique de l'articulation et des interactions entre les objets mathématiques.

Nous présentons quelques épisodes exemplaires venus de nos observations de la première année, l'année scolaire 2006-2007. Ils sont relatifs à un seul élève, AC, et à un seul thème mathématique, les équations différentielles. Nous mettrons ainsi à l'épreuve l'idée que ces épisodes didactiques ont produit des transformations observables du rapport de cette élève à ces objets mathématiques particuliers, et que nous observons ici des biographèmes de AC. Nous montrons donc une élève qui apprend et certains de ses apprentissages. Bien sûr, pas *tous* ses apprentissages relatifs à ce thème mathématique²³, mais en revanche ces observations portent sur ce que l'on appelle des compétences : des savoirs d'action et des réorganisations de savoirs, qui font la différence entre bons et très bons élèves. Nous verrons que

ces apprentissages sont relativement rares et que le processus de leur production est certainement aussi long et difficile que ce qu'en savent tous les élèves et les quelques didacticiens qui l'ont observé en cliniciens, sur le long terme et *in situ*.

La première séance sur les équations différentielles dans l'institution d'étude autonome de l'élève AC est la deuxième des sept séances observées (Réf : AC/S-2/20012007/Équation-Différentielle²⁴). L'exercice demandé ne fait pas partie de ceux que AC étudie d'elle-même, c'est un de ceux que nous lui avons proposés. Nous l'avons choisi pour ses implicites et surtout pour l'utilisation de la méthode des variations pour la résolution des équations différentielles. Car à cette date, AC a déjà étudié cette partie du programme et nous voulions voir comment elle mobilise des connaissances anciennes sur les équations différentielles du premier ordre.

Un épisode didactique impliquant AC

Dans l'organisation des savoirs du programme proposé par le professeur, les équations différentielles sont dans le chapitre sur les fonctions exponentielles (la progression de la classe et le cahier de cours de AC en témoignent). Ce chapitre a été très tôt enseigné car il fonde le travail de l'année, en physique comme en mathématiques. L'étude des *fonctions exponentielles* fournit donc un premier rapport à la notion d'*équation différentielle* et montre pour la première fois aux élèves comment faire l'étude d'une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. En outre, la méthode d'Euler introduite en classe de première scientifique fait apparaître une suite géométrique, et son évocation porte l'idée que l'exponentielle est l'analogie continu de la suite géométrique, par une analogie que confirme l'équation fonctionnelle, puisque cette équation énonce le fait que la variation de la fonction cherchée relève de la même équation que la fonction elle-même, comme c'est le cas des suites géométriques. L'exponentielle occupe donc une place centrale, à la fois parce qu'elle renouvelle le non-ostensif « fonction » en le rapprochant de celui de « suite », mettant en relation les ostensifs $f(n)$ et Un , parce qu'elle fait expérimenter le fait qu'une fonction peut être solution d'une équation fonctionnelle, et enfin parce qu'elle introduit des techniques d'étude nouvelles, pour ces objets renouvelés.

En nous fondant sur l'unité que donne la présence d'un même objet mathématique pour un sujet donné, nous avons donc découpé, dans le continuum de la transcription, l'épisode dont nous allons voir d'abord la valeur didactique pour en faire un *épisode didactique* en proposant d'abord une *analyse a priori* de l'énoncé soumis à l'élève, sous la forme du *site* de l'exercice (Erdogan et Duchet, 2005 ; Erdogan, 2006 ; Erdogan, 2014). Nous donnons donc (en italiques) l'énoncé de l'exercice et son analyse, avant de donner la transcription complète de l'épisode et de l'analyser du point de vue de l'élève AC, qui étudie en autonomie.

Exercice 1 : Réf : AC/S-2/20012007/
Équation-Différentielle

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{5}y$

1-) On sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation (E).
Démontrez que l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de la forme : $x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ // avec k un nombre réel quelconque

2-) Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{5}y$ prenant la valeur -4 en 0

Si nous tentons *a priori* de définir le site mathématique local de la question (Silvy, 2010 ; Silvy, Delcroix et Mercier, 2013) nous en donnons une solution « institutionnellement normale » et nous trouvons *a minima* pour la résolution de l'exercice des objets et des concepts requis qui sont :

- des *objets protomathématiques* (ils ne sont ni nommés ni même identifiés) : paramètres, ensembles, etc.
- des *objets paramathématiques* (ils n'ont pas reçu de définition) : l'égalité et l'identité, la quantification dans la définition des identités et des équations, les notions d'antécédent et d'image dans une relation, etc.

Ces types d'objets appartiennent au substrat du site mathématique. Nous trouvons ensuite :

- des *objets mathématiques* (ils ont été présentés et nommés) : équation différentielle, identité, équivalence, dérivabilité, fonction, fonction constante, ensemble de solutions paramétré, condition initiale, valeur d'une fonction en un point, etc.
- des *techniques génériques* (elles ont été travaillées explicitement) : travail algébrique sur

les formules, calcul des dérivées, résolution des équations, méthode de la variation de la constante, etc.

– des *théorèmes* génériques et spécifiques (ils ont été enseignés) : « un produit de fonctions dérivables est dérivable » et la formule associée, « si α est un réel et (α, β) un couple de nombres réels, l'équation différentielle (E) : $y' = \alpha y$ admet une unique solution f vérifiant la condition initiale $f(\alpha) = \beta$ etc.

Ces types d'objets appartiennent aux deux niveaux centraux du site : niveau 0 (objets), ainsi que le niveau 1 (techniques et outils). Il faut ajouter des objets de plus haut niveau :

des organisations de notions et de théorèmes (elles sont souvent au-delà de l'horizon institutionnel, mais peuvent avoir été enseignées) : les propriétés algébriques de la fonction exponentielle, l'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle, la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée, etc.

Ces types d'objets appartiennent aux niveaux théoriques du site local de la question.

Nous pourrions alors demander si tous ces objets appartiennent bien à l'institution observée. Si nous entendons par là une classe de terminale scientifique telle que les programmes la définissent ou telle classe en particulier, la réponse peut varier en partie, et les travaux d'Erdogan (2014) ont montré comment cela dépend des exigences du professeur et de la manière dont il organise l'étude autonome qu'il demande. Ainsi, Erdogan (2006, 2014) montre comment le site mathématique institutionnel du travail algébrique et de l'étude des fonctions est bien plus vaste dans une seconde ordinaire d'un lycée de centre-ville parisien que dans les mêmes classes d'un bon lycée de banlieue recevant des élèves de ZEP. Mais nous nous intéressons ici aux élèves qui, quoi qu'il en soit, réussissent très bien pour l'ensemble des exigences requises par les évaluations externes (ici, le baccalauréat, où nous attendons qu'ils aient une note supérieure à 16)²⁵ et nous considérons donc par principe que ces élèves disposent non seulement de l'ensemble des objets institutionnels adéquats, qu'ils soient sensibles (susceptibles d'entrer dans une évaluation) ou non (ils sont considérés comme connus, ayant été évalués précédemment), mais aussi des objets idoines (appelés par les pratiques attendues) qu'ils savent aller chercher « ailleurs » si nécessaire.

Comme nous nous intéressons aux élèves dans leurs spécificités plutôt que dans leur adhésion aux demandes institutionnelles, qui est acquise, nous allons appeler *répertoire de tel sujet d'une institution un ensemble de pratiques instituées pour lui-même par ce sujet*, dans le temps de l'étude autonome qu'il conduit mais dans notre cas, en relation avec l'institution didactique qui lui a indiqué la matière à étudier. Un répertoire est *un ensemble de résultats, leurs usages efficaces, et l'expérience des conditions de leur efficacité* et c'est plus que ce que l'on appelle en Suisse « les livrets de la multiplication » associés à « un algorithme opératoire » ou plus élémentaire encore « les décompositions additives appuyées sur 10 des nombres inférieurs à 20 », associées à « une stratégie de recherche des différences pour le traitement des additions à trous » ou comme dans nos observations ci-dessous « des théorèmes relatifs aux fonctions exponentielles » et « des techniques élémentaires de résolution d'équations différentielles ».

Analyse de l'action de AC (Réf : AC/S-2/20012007/Équation-Différentielle)

AC relit l'énoncé à voix haute, et nous transcrivons sans autre formalisme ses énonciations, puisque nous n'avons pas pour enjeu une analyse linguistique de ses productions langagières. Cependant, nous indiquons formellement la dimension orale en ne donnant pas de ponctuation et en marquant // pour les pauses. Nous notons en italiques les textes que AC lit, et en droit mais entre guillemets ce que l'élève écrit. Sauf contradiction entre l'écrit et les énonciations, nous utilisons aussi le symbolisme mathématique pour les formules et expressions écrites puisque AC produit ainsi un système d'ostensifs et de non ostensifs sur lequel s'appuie son travail mathématique. Nous suivons Matheron (2000, 2003) pour qui ces ostensifs appellent des pratiques, soit comme souvenirs épisodiques [*des praxèmes*] soit comme objets institués [*des savoirs*] : ce que nous avons nommé ensemble d'un seul terme, le *répertoire*.

Le verbatim est découpé en suivant les propositions de Sinclair et Coulthard (1975) c'est-à-dire en appui sur les bornes, embrayeurs ou pauses, qui forment donc un découpage proposé par AC. Le plus souvent, l'élève laisse un silence plus long, en particulier quand le silence correspond au passage à un nouveau type d'énoncé (théorème ou reformu-

lation par exemple). Mais AC peut aussi utiliser les bornes classiques « donc » et « alors », ou des outils d'articulation logique « étant donné que », « alors ». Ce découpage est donc stable et invariant par changement d'observateur : nous pouvons le considérer comme chose entendue aussi bien que les énoncés reportés à partir de l'enregistrement vidéo. Il montre ici par exemple le passage d'une question de l'exercice à l'autre, avec retour à l'énoncé et reformulation : un premier découpage pour identifier des épisodes didactiques, qui devrait résister à la possibilité d'enjambements. Notons enfin que nous avons numéroté les éléments ainsi obtenus.

Verbatim Réf : AC/S-2/20012007/Équation-Différentielle

AC lit : Soit l'équation différentielle $(E): y' = \frac{1}{5}y$ // on sait que la fonction $x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation (E) // question 1 / démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation $(E): y' = \frac{1}{5}y$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ / de la forme $x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ avec k un nombre réel quelconque

AC1 : « // l'équation différentielle $(E): y' = \frac{1}{5}y$ a pour solution $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ »

AC1' : // si la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ alors on a // $\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{5}}} = \frac{e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}}}k$ / en simplifiant le deuxième membre par $e^{\frac{x}{5}}$ on a $\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{5}}} = k$ // ce qui implique que $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$

AC1'' : // la fonction ainsi définie par $h(x) = f(x)e^{-\frac{x}{5}}$ est une constante

AC1''' : // donc la fonction dérivée $h'(x) = 0$ »

AC2 : « // on peut aussi répondre à la question de cette manière

AC2' : // soit f une solution quelconque de l'équation (E) montrons que la fonction h définie par $h(x) = f(x)e^{-\frac{x}{5}}$ est une fonction constante »

AC3 : « // étant donné que h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ / elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

AC3' : et pour tout réel x on a // $h'(x) = \frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{5}}f(x) + e^{-\frac{x}{5}}f'(x)$

AC4 : « ce qui implique par factorisation que : $h'(x) = e^{-\frac{x}{5}}\left(\frac{-1}{5}f(x) + f'(x)\right)$ // sachant que la fonction f est solution de $f'(x) = \frac{1}{5}f(x)$

AC4' : // donc $h'(x) = \frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{5}}f(x) + e^{-\frac{x}{5}}f'(x) = h'(x) = e^{-\frac{x}{5}}\left(\frac{-1}{5}f(x) + f'(x)\right) // 0$

AC4'' : // d'où h est une fonction constante

AC4''' : // ce qui implique qu'il existe un réel k tel que $\forall x \in \mathbb{R} h(x) = k$

AC4'''' : // on a donc $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ »

AC5 : « // réciproquement on vérifie sans peine que

AC5' : / quel que soit le réel k , la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ vérifie l'équation (E) »

AC6 : « // // // // autre méthode / la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation AC6' : / ainsi pour montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions je peux utiliser la technique de la variation d'une constante »

AC7 : « // // étant donné que $e^{\frac{x}{5}} \neq 0$ / je cherche la solution de l'équation différentielle (E) sous la forme générale $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ avec k une fonction numérique dérivable »

AC7' : « // // c'est-à-dire $k(x)$

AC7'' : // la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation (E) si / et seulement si elle vérifie l'équation »

AC8 : « // // on a donc // $k'(x)e^{\frac{x}{5}} + \frac{1}{5}ke^{\frac{x}{5}} - \frac{1}{5}ke^{\frac{x}{5}} = 0$ // ce qui implique

$k'(x)e^{\frac{x}{5}} = 0$ // On a donc la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ // est par conséquent une fonction constante

AC9 : / donc $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ sont les solutions de l'équation (E) »

AC lit : // // question 2 // // démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{5}y$ prenant la valeur -4 en 0

AC10 : « // // je sais que // si a est un réel et (α, β) un couple de nombres réels l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{5}y$ admet une unique solution f vérifiant la condition initiale $f(\alpha) = \beta$ »

AC11 : « on sait que l'équation (E) a $y' = \frac{1}{5}y$ pour solution la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

AC11' : // // $f(\alpha) = \beta$ est équivalent à $ke^{\frac{\alpha}{5}} = \beta$ // donc $k = e^{-\frac{\alpha}{5}}(\beta)$ »

AC12 : « // // ainsi pour tout couple (α, β) le réel k existe et est unique »

AC13 : « // on a alors $k = e^{\frac{0}{5}}(-4)$ implique $k = -4$ // l'unique fonction solution de l'équation différentielle prenant la valeur -4 en 0 $f(x) = -4e^{\frac{x}{5}}$ // // »

Nous avons suivi la transcription au plus près. Cela nous donne 13 groupes d'énoncés différents, séparés par une pause plus longue et une borne (on sait que ou je sais que, étant donné que), ou un changement d'objet marqué par le retour à l'embrayeur, plus quelques sous divisions marquées seulement par un embrayeur (donc, ainsi, on a donc, on a alors, ce qui implique que) ou une borne, la pause étant brève ou inexistante.

L'élève AC commence directement et sans hésitation, en prenant au corps sans embrayeur ni pause les éléments donnés, en AC1 « L'équation » et en AC2 « on peut aussi » pour les deux premiers groupes. Puis l'introduction d'un élément informatif par un embrayeur AC3 « étant donné que », logiquement suivi d'un conséquent AC4 « donc » que complète le AC5 « réciproquement ». C'est sans doute là un premier mouvement. On trouve alors un développement introduit par une sorte de titre en AC6 « autre méthode », qui ouvre sur une information AC7 « étant donné que » puis un développement et un premier résultat AC8 « on a donc » qui se poursuit jusqu'à AC9 « donc », qui conclut. La première question est donc traitée complètement. La reprise de l'énoncé est marquée par le titre « Question 2 ». La

réponse est ouverte par l'énoncé d'un théorème AC10 « je sais que » puis l'intervention d'un lemme et du calcul donnant sa conséquence AC11 « on sait que » ce qui donne un résultat AC12 « ainsi » et la conclusion de la question AC13 « on a alors ». Ce qui donne un synopsis du traitement réalisé, qui nous servira de première organisation des traces que constitue le verbatim. Nous en développons ci-dessous l'analyse.

L'activation d'un répertoire

(Réf : AC/S-2/20012007/Équation-Différentielle)

On remarquera que AC répète la définition entière de l'équation différentielle chaque fois qu'est écrit son nom. C'est une technique mémorielle pour, disposer de la description immédiate (symbolique bien sûr mais non écrite) de l'équation : le travail des ostensifs scripturaux se contrôle par son énonciation, c'est vrai déjà avec la multiplication dont l'algorithme conduit à voix haute « trois fois quatre douze, je pose deux et retiens un, trois fois sept vingt et un et un de retenue vingt-deux je pose deux et je retiens deux, etc. » diminue de manière remarquable le taux d'erreurs et double aisément le taux de réussite (Bosch, 1994).

AC lit : « soit l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{5}y$ // on sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation (E) : $y' = \frac{1}{5}y$. // // Question 1 / démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $y' = \frac{1}{5}y$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ / de la forme $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ avec k un nombre réel quelconque // »

AC fait une pause rapide et reprend le problème par sa solution dans un procédé connu en géométrie comme « l'analyse », premier temps du mouvement « analyse-synthèse » où la synthèse donne une rédaction de la solution. Nous l'interprétons ainsi en particulier parce que, suite au mouvement AC1 qui aboutit à retrouver la fonction $h(x)$ de dérivée nulle, AC2 et la suite partent d'une donnée, une fonction $h(x)$ constante. Ce jeu analyse/synthèse que joue AC n'est pas souvent indiqué dans les ouvrages de la classe de terminale scientifique, pourtant nous observons comment l'analyse du problème que AC engage revêt un caractère heuristique qui nous paraît fondamental. Nous envisageons donc que ce jeu analyse-synthèse soit, pour l'élève, un effet de son expérience, l'effet d'une posture autodidactique forte, que AC

nous montre en bonne informatrice, consciente des pratiques qu'elle maîtrise. L'élève engage l'analyse du problème à partir de sa solution, donnée :

AC1 : « / l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{5}y$ a pour solution $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$

AC1' : « /// si la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ alors on // a / $\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{5}}} = \frac{e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}}}k$ /// en simplifiant

le deuxième membre par $e^{\frac{x}{5}}$ on a // $\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{5}}} = k$ ce qui implique que $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$

AC1'' : « /// la fonction ainsi définie par $h(x) = f(x)e^{-\frac{x}{5}}$ est une constante

AC1''' : « // donc la fonction dérivée $h'(x) = 0$ »

Sans donc évoquer la *variation de la constante*, AC isole k , qu'elle considère dans l'équation comme une fonction inconnue. Elle avance prudemment et par exemple, elle transforme l'équation pour obtenir l'expression de la solution donnée par l'énoncé, sans utiliser immédiatement l'exposant négatif. Elle se laisse apparemment guider par son répertoire de praxèmes, tel qu'il est appelé en mémoire par les ostensifs et les non ostensifs qui lui ont été proposés. C'est un procédé de travail pratique dont elle a le souvenir [une mémoire pratique au sens de Matheron, 2000]. Mais elle va pouvoir énoncer la clé du raisonnement : une *constante* est une *fonction constante*, une fonction dont la dérivée est donc nulle, ce qui est une *propriété fonctionnelle*, utilisable dans une *équation différentielle*. Cette propriété est semblait-il pour AC le discours fondateur de la technique enseignée la variation de la constante n'est plus une idée sortie de la tête du professeur comme un lapin du chapeau du prestidigitateur, elle est située dans une organisation mathématique vivante pour AC.

La suite va nous montrer que cet épisode va s'avérer construit en prolégomènes à la démonstration proprement dite, qui va advenir maintenant une technique démontrée. AC engage en effet une deuxième visite de la question, exécutant la technique de « la variation de la constante » qu'elle a pu réactiver. Nous considérerons donc que cette technique figurait dans son *répertoire heuristique* sans être immédiatement rendue disponible par le système d'ostensifs que l'énoncé présente : ce qui a justifié pour AC l'analyse du problème et pour l'observateur, la distinction entre mémoire et répertoire, ce dernier correspondant selon nous à une couche de techniques plus profonde, que la construction après-coup du site de la question nous permettra de situer. La synthèse est annoncée comme « une autre manière » de formuler une réponse. On peut

penser alors que « l'analyse-synthèse » n'est pas une technique enseignée puisque pour AC cette technique n'est pas nommée. AC forme donc ici ce qu'on appelle un savoir d'expérience.

Nous voyons ici un élément important de son répertoire heuristique : AC explore l'écosystème d'une question pour en déduire une stratégie d'attaque. On sait la lenteur de la formation des savoirs d'expérience (ce que les psychologues du travail nomment « le développement ») puisque ces savoirs ne peuvent pas être l'effet d'une intention conduisant à une auto-évaluation et définissant une norme de comportement. On peut en inférer l'existence d'une grande quantité de travail personnel qui se trouve avoir été réalisé sans guidage enseignant.

AC2 : « / on peut aussi répondre à la question de cette manière

AC2' : « // soit f une solution quelconque de l'équation (E), montrons que la

fonction h définie par $h(x) = f(x)e^{-\frac{x}{5}}$ est une fonction constante

AC3 : « /// étant donné que h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ / elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

AC3' : « et pour tout réel x on a // $h'(x) = \frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{5}}f(x) + e^{-\frac{x}{5}}f'(x)$.

AC4 : « ce qui implique par factorisation que /// $h'(x) = e^{-\frac{x}{5}}\left(\frac{-1}{5}f(x) + f'(x)\right)$

/// sachant que la fonction f est solution de / $f'(x) = \frac{1}{5}f(x)$

AC4' : « // don $h'(x) = \frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{5}}f(x) + e^{-\frac{x}{5}}f'(x) = h'(x) = e^{-\frac{x}{5}}\left(\frac{-1}{5}f(x) + f'(x)\right) = 0$

AC4'' : « // d'où h est une fonction constante /

AC4''' : « // ce qui implique qu'il existe un réel k tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = k$

AC4'''' : « // on a donc $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ /// »

AC tire bénéfice de son exploration, par exemple en reprenant sans plus d'hésitation l'expression fonctionnelle de k utilisant l'exposant négatif. On remarque comment par ailleurs AC ralentit le temps et vérifie les manipulations formelles en produisant une grande redondance d'écriture, puisqu'elle aurait pu conclure en AC4' sans répéter l'expression de $h'(x)$. Le raisonnement qu'elle conduit est donc pour elle délicat, et en effet ce n'est pas tous les jours qu'un élève manipule une expression comportant des fonctions inconnues. Le calcul de dérivée ne lui pose pas de problème, mais l'intervention de l'équation vérifiée par dans f le travail sur h est une opération rare, puisque l'inconnue de cette équation est une fonction. Cela dit, AC n'oublie pas la réciproque et l'expédie en professeur ou en lectrice d'ouvrages mathématiques : « On vérifie sans peine que... », dit l'élève, sans hésiter.

AC5 : « /// réciproquement on vérifie sans peine que

AC5' : « / quel que soit le réel k / la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ vérifie l'équation (E) »

L'épisode se termine en ce point, où le problème est résolu. Nous avons donc ici un *épisode didactique*, qui conduit l'élève à mobiliser des savoirs et des connaissances dans un type de travail qu'elle ne maîtrise pas complètement, même si elle le conduit avec sûreté. Un tel épisode peut être produit par un professeur explorant, avec une classe ou un groupe d'élèves, un type de tâches que l'on pourrait appeler « résolution des équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, sans second membre ». Mais ici le professeur est absent et l'élève ne se réfère pas explicitement à ce type de tâches.

OBSERVATION ET ANALYSE D'UN BIOGRAPHÈME :

AC ne s'arrête pas à la fin de l'exercice mais change de position institutionnelle, et apprend (Réf : AC/S-2/20012007/Équation-Différentielle)

Le plus intéressant dans cette observation se situe, en AC6 : en effet, la question est résolue et AC ne s'arrête pas... Une seule interprétation de cela, elle doit considérer qu'elle n'a encore pas appris grand-chose en résolvant l'exercice puisque la méthode à laquelle elle a abouti n'est pas standard.

Toujours est-il que, sans autre transition, AC reprend la question en mobilisant cette fois ce que l'on appellerait en Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) une *technique générique pour un type de tâche*. Comme si l'élève répondait aux attentes d'un contrat (auto)didactique et se disait : « il doit bien y avoir quelque chose à apprendre, là. » C'est un geste d'étude essentiel, que de mettre au point une méthode et de la mettre à l'épreuve, puisque ce geste d'étude conduit à faire ce que le professeur aurait fait : identifier le type de tâche dont la question relève, et « institutionnaliser un savoir ».

On remarque alors que le « on » qui prévalait dans les énoncés de AC est remplacé ici par un « je » qui montre l'investissement fort et le changement de position de l'élève, lorsqu'elle devient son propre professeur.

76 : « //!!!! autre méthode / la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation »

Cela n'est pas la donnée de l'énoncé mais bien l'un des résultats possibles des calculs réalisés lors de l'étude précédente, et AC n'y revient pas inutilement. Elle s'appuie maintenant sur ce résultat pour identi-

fier le type de tâche dont il est la réalisation, et elle le fait comme on pratique d'ordinaire : en reprenant la technique que l'on mobilise. Et la technique va devoir et pouvoir être nommée (*variation de la constante*), parce que la question a été reformulée de manière conventionnelle : « montrer quel est l'ensemble des solutions de (E) » est devenu « montrer » qu'il n'y a pas d'autres solutions que les solutions connues.

Le fait est que l'élève n'a pas la maîtrise complète de ce qu'elle fait maintenant : pour la première fois dans cet exercice on relève une erreur de quantification, puisque $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ définit une fonction pour chaque valeur de k : il aurait donc fallu dire « toute fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation (E) » au lieu de « la fonction... », pour indiquer que k est ici la grandeur inconnue.

AC6' : // ainsi pour montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions je peux utiliser la technique de la variation d'une constante »

AC7 : « /// étant donné que $e^{\frac{x}{5}} \neq 0$ / je cherche la solution de l'équation différentielle (E) sous la forme générale $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ /// avec k une fonction numérique dérivable »

AC7' : /// c'est-à-dire $k(x)$

AC7'' : /// la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation (E) si / et seulement si elle vérifie l'équation »

AC8 : « /// on a donc $k'(x)e^{\frac{x}{5}} + ke^{\frac{x}{5}} - \frac{1}{5}ke^{\frac{x}{5}} = 0$ /// ce qui implique que $k'(x) = e^{\frac{x}{5}} = 0$ // la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ est par conséquent une fonction constante

C'est par ce genre de raisonnement qu'elle avait commencé, mais la méthode et son nom n'ont pas été appelés immédiatement en mémoire par le système d'op-tensifs donné par l'énoncé : le répertoire ne comprenait pas l'identification de l'équation différentielle comme « du premier degré sans second membre » et la technique associée dite « variation de la constante ». On voit donc ici comment son travail d'étude conduit AC à intégrer un type de tâches nouveau dans le domaine d'extension de la technique de variation de la constante c'est-à-dire, comment elle étudie pour renouveler intentionnellement son répertoire. C'est un exemple de phénomènes dont nous avons trouvé plusieurs traces et que nous avons appelés « transhumance didactique » parce que les élèves se déplacent pour trouver de quoi nourrir leur questionnement.

Cela donnera à AC une maîtrise forte de la technique étudiée (la variation de la constante), et on le voit, une mobilisation dorénavant aisée des résultats obtenus dans le cours du travail antérieur, comme le

calcul de la dérivée de $h(x)$ ou le fait que les fonctions d'une certaine classe sont solutions de l'équation différentielle donnée. On remarquera encore un indice du travail didactique de AC : la conclusion en AC8 montre « une distraction » et donc une charge cognitive importante : c'est $h(x)$ qui est une fonction constante, et il aurait fallu conclure que « la fonction $h(x)$ définie par l'équation $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ est constante » : soit AC est prise dans la réalisation d'un travail qui n'est pas routinier, soit c'est une ellipse due à une maîtrise plus grande encore que ce que nous pensons. Nous penchons pour la première de ces interprétations.

Nous avons donc identifié ici un épisode de la biographie didactique de AC, puisque cette élève a rencontré un problème nécessitant d'apprendre quelque chose de nouveau. Nous avons observé un procédé d'étude qui a consisté en la « reprise » d'une « manière pratique » pour « mettre au point une technique », ce que AC a fait sans hésitation. C'est manifestement pour AC un geste didactique bien connu. Ce geste correspond dans la description de la TSD à une situation de formulation et de validation, et dans la description de la TAD à un moment de mise en place et de travail de la technique, avec le développement de la technologie associée. Cela conduit à l'institutionnalisation d'un savoir et se fait d'ordinaire à l'initiative du professeur. Mais ici, nous observons un élève qui s'enseigne en professeur expert, en se situant à cet effet dans une position plus favorable que celle que lui aurait donné son assujettissement de bon sujet, par un effet de transhumance. Cet élève étudie en autonomie, il est auteur de sa biographie didactique.

La fin de l'exercice (Réf AC/S-2/20012007/ Équation-Différentielle)

AC ne s'arrête pas pour autant et enchaîne aussitôt avec la question suivante : indice que ce qui vient de se passer est normal pour cet élève et n'entraîne aucune lassitude.

AC lit : *//// question 2 // démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle // $y' = \frac{1}{5}y$ // prenant la valeur -4 en 0*

AC10 : *« // je sais que // si a est un réel et (α, β) un couple de nombres réels // l'équation différentielle (E) : $y' = ay$ admet une unique solution f vérifiant la condition initiale $f(\alpha) = \beta$ »*

AC11 : *« // on sait que l'équation $y' = ay$ // // a pour solution la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ // avec $k \in \mathbb{R}$ //*

AC11' : *« // $f(\alpha) = \beta$ est équivalent à $ke^{\frac{\alpha}{5}} = \beta$ donc $k = e^{-\frac{\alpha}{5}}(\beta)$ »*

AC12 : *« // ainsi pour tout couple (α, β) le réel k existe et est unique »*

AC13 : *« / on a alors : $k = e^{-\frac{-4}{5}} \cdot (-4) \Leftrightarrow k = -4$ l'unique fonction solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{5}y$ // prenant la valeur -4 en 0 est $f(x) = -4e^{\frac{x}{5}}$ »*

Une fois les éléments du répertoire des équations différentielles mobilisés et les éléments manquants mis en place, plus de difficultés : tout vient en mémoire au bon moment, les techniques sont appelées par les ostensifs. Mais notre observation a montré que la leçon présentant à la fois une résolution institutionnellement normale (la méthode de variation de la constante) et des objets ostensifs et non-ostensifs de divers niveaux mobilisés par cette résolution (voir le site de l'exercice) ne donne pas à un sujet institutionnel la mobilisation immédiate de la technique adéquate : il y faut une étude conséquente et des gestes d'étude experts inouïs.

L'exploration qui nous conduit à identifier le répertoire de ce sujet et les éléments qu'il a dû construire apporte une meilleure compréhension de ce qu'est l'étude d'un corps de savoirs mathématiques de haut niveau épistémologique (Gascon, 2001, 2003). Car même s'il s'agit d'un « bon sujet », son rapport aux objets ainsi institués n'est pas ce que la TAD identifie comme le rapport institutionnel à ces objets. En revanche, la construction *a priori* du site de la question donne les objets, les techniques instituées qui pourraient être utiles, et permet d'ouvrir l'espace des traitements possibles de la question mais c'est l'observation seule qui peut montrer les voies d'attaque possibles pour un élève. L'analyse *a priori* ne permet pas d'anticiper les actions observées, mais elle permet d'en préparer l'observation et l'interprétation en situant les observations dans une organisation mathématique large²⁶ qui devient maintenant pour l'observateur, l'espace des stratégies d'action possibles. L'espace des rapports institutionnels à un problème ou type de tâche n'est donc que la norme que les bons sujets visent, mais la manière d'atteindre la norme n'est pas décrite tant que l'on n'observe pas

les rapports personnels de tels et tels élèves, et leur évolution : ce que nous avons identifié comme leur répertoire relatif à ce type de tâche.

Le cas présent est exemplaire, autrement dit, il permet de fonder un paradigme. Nous allons en étudier une variation afin de repérer les constantes personnelles de AC.

Un second épisode didactique impliquant AC (Réf : AC/S-3/25012007/Équation-Différentielle)

L'exercice est standard, mais nous avons ici affaire à une équation différentielle avec second membre. Il est fait par AC après l'étude précédente, la même semaine.

Exercice 2 :

- 1-) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = -e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $(E): y' - 3y = e^{2x}$
- 2-) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y' - 3y = 0$
- 3-) Démontrer qu'une fonction f est solution de $(E): y' - 3y = e^{2x}$ si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y' - 3y = 0$
- 4-) Résoudre l'équation différentielle $(E): y' - 3y = e^{2x}$
- 5-) Déterminer la fonction h solution de l'équation $(E): y' - 3y = e^{2x}$, telle que $h(0) = 0$

Verbatim d'AC Réf: AC/S-3/25012007/Équation-Différentielle

AC lit : question 1 / vérifier que la fonction g définie par $g(x) = -e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $(E): y' - 3y = e^{2x}$

AC1 : « // il s'agit d'une équation différentielle $(E): y' - 3y = e^{2x}$ /

AC1' : // si $g(x)$ est une solution // si et seulement si elle vérifie cette équation différentielle »

AC2 : « // la fonction g est une fonction exponentielle // donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ »

AC2' : // telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction dérivée $g'(x) = -2e^{2x}$ // par conséquent $g'(x) - 3g(x) = -2e^{2x} - 3(-e^{2x}) = e^{2x}$

AC2'' : / donc ce qui signifie que la fonction g est une solution de l'équation (E) »

AC lit : // question 2 // résoudre l'équation différentielle $(E'): y' - 3y = 0$

AC3 : « / on sait que l'équation différentielle $y' = ay$ admet comme solutions les fonctions $y: x \mapsto ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$ »

AC3' : / donc les solutions de l'équation $(E'): y' - 3y = 0$ / sont les fonctions $x \mapsto ke^{3x}$ avec $k \in \mathbb{R}$ »

AC lit : // question 3 // démontrer qu'une fonction f est solution de $(E): y' - 3y = e^{2x}$ si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y' - 3y = 0$

AC4 : « // de la même façon $f - g$ est une solution de l'équation différentielle si elle vérifie $(E'): y' - 3y = 0$ »

AC4' : // la fonction f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, implique $f - g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ »

AC4'' : « // alors // $f - g$ est une solution de l'équation $(E'): y' - 3y = 0$ // signifie que $(f - g)' - 3(f - g) = 0$ »

AC4''' : / ce qui implique $f' - g' - 3f + 3g = 0 \Leftrightarrow f' - 3f = g' - 3g$ »

AC5 : « / sachant que $g(x) = -e^{2x}$ est une solution de $(E): y' - 3y = e^{2x}$ [question 1] »

AC5' : / on a $f' - 3f = g' - 3g \Leftrightarrow f' - 3f = e^{2x}$

AC5'' : // donc la fonction f est une solution de l'équation (E) »

AC lit : // question 4 / résoudre l'équation différentielle $(E): y' - 3y = e^{2x}$

AC6 : « // on sait que $f - g$ est solution de $(E'): y' - 3y = 0$ /

AC6' : // donc $f - g = ke^{3x}$ // $g(x) = -e^{2x}$ est une solution de (E) // la fonction f est aussi une solution de (E) »

AC7 : // donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = ke^{3x}$ // ce qui implique que $f(x) = g(x) + ke^{3x}$ // ce qui implique que $f(x) = e^{2x} + ke^{3x}$ / par factorisation on a // $f(x) = e^{2x}(1 + ke^x)$ avec $k \in \mathbb{R}$

AC lit : // question 5 // déterminer la fonction h solution de l'équation $(E): y' - 3y = e^{2x}$ // telle que $h(0) = 0$

AC8 : // on sait que : « Si a est un réel et $(\alpha; \beta)$ un couple de nombres réels // l'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution h vérifiant la condition initiale $h(\alpha) = \beta$ »

AC8' : // donc $h(x) = e^{2x}(1 + ke^x)$ ce qui implique que $h(0) = e^0(1 + k)$

AC8'' : // d'où $(1 + k) = 0 \Leftrightarrow k = -1$ // la fonction $h(x) = e^{2x}(1 - e^x)$

Nous avons défini le répertoire de l'élève, relatif à une tâche, comme l'ensemble de ses savoirs c'est-à-dire les éléments mémorisés de son pouvoir d'agir. Le répertoire comprend donc aussi bien des objets mathématiques, paramathématiques et protomathématiques (la mémoire du savoir selon Matheron, 2000) que des objets qualifiés de didactiques (relevant du contrat didactique selon Schubauer-Leoni, 1986). Dans cette même veine théorique, Araya (2005 ; 2007 ; 2008) a développé une description des « gestes d'enseignement » (reconnaissables et donc contractuels) des professeurs de mathématiques dans l'enseignement secondaire. Nous allons reprendre la classification proposée par Araya pour les gestes d'enseignement du professeur afin de déterminer quelques-uns des éléments de ce qui est pour l'élève son répertoire heuristique et qui décrit les manières spécifiques de s'enseigner que cet élève a acquises.

Le répertoire heuristique et sa mobilisation (Réf : AC/S-3/25012007/Équation-Différentielle)

Nous relevons d'abord dans le verbatim les énoncés par lesquels AC « fixe²⁷ » (Araya, 2008) les éléments du répertoire mathématique qu'elle considère comme connus à la lecture des questions et qui fonderont les « augmentations²⁸ » à venir (Araya, *op. cit.*). Nous devons ensuite interpréter le contenu des énoncés restant, dont nous pensons *a priori* qu'ils nomment des objets qui ne seront pas changés, et qui sont donc simplement *activés*²⁹ dans l'action, de manière non consciente. Fixation et activation sont, selon Araya les deux grandes fonctions des gestes ostensifs du professeur. Nous les reprenons ici dans le topos de l'élève qui s'enseigne pour apprendre : ces gestes sont mésogénétiques.

Dans la résolution de la question 1, AC fixe en les nommant les éléments qui définissent son travail. D'abord en AC1, le lieu mathématique de l'exercice « il s'agit d'une équation différentielle » puis AC reprend la question et énonce en AC1' le schéma du travail à conduire « ... (g est solution) si et seulement si elle vérifie cette équation différentielle » et attaque la question posée, la vérification d'une égalité dans une relation impliquant g, g' et une autre fonction, ce qui active le calcul de la dérivée en AC2 « g est une exponentielle donc elle est dérivable :

AC1 : « // il s'agit d'une équation différentielle (E) : $y' - 3y = e^{2x}$ »

AC1' : « // si g(x) est une solution // si et seulement si elle vérifie cette équation différentielle »

AC effectue les gestes nécessaires sur l'écriture activée [remplace la fonction g et sa dérivée g' dans l'équation (E) : $y' - 3y = e^{2x}$], et conduit les calculs attendus. Cependant, nous remarquons l'annonce d'une équivalence (si et seulement si) quand il aurait fallu une implication (par conséquent). Cela montre une certaine hésitation sur un point identifié comme délicat jusqu'à l'université selon Deloustal-Jorrand (2004).

AC2 : « // la fonction g est une fonction exponentielle, donc elle est dérivable sur IR »

AC2' : « // telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction dérivée $g'(x) = -2e^{2x}$ / par conséquent $g'(x) - 3g(x) = -2e^{2x} - 3(-e^{2x}) = e^{2x}$ »

Enfin un énoncé expose une interprétation du calcul, qui est introduite par un embrayeur, *donc*, qui n'a pas de signification logique : AC ne parle pas « comme un livre », elle est notre informatrice sur ses pratiques ethnomathématiques.

AC2'' : « // donc ce qui signifie que la fonction g est une solution de l'équation (E) »

La question 2 se résout d'un coup, par appel au résultat de cours, générique (le coefficient a), et son actualisation avec le coefficient 3. La rhétorique de mobilisation d'un résultat est maîtrisée et le jeu de reconnaissance de $y' - 3y = 0$ comme relevant du résultat de cours $y' = ay$ est immédiat, sans doute parce que ce n'est pas la première rencontre avec cela, pour AC. Pas besoin de décrire l'équation comme « du premier ordre sans second membre » pour connaître le résultat qui s'applique, la fixation est immédiate.

AC lit : // question 2 // résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - 3y = 0$

AC3 : « / on sait que l'équation différentielle $y' = ay$ admet la comme solutions les fonctions $x \rightarrow ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$ »

AC3' : « / donc les solutions de l'équation (E') : $y' - 3y = 0$ / sont les fonctions $x \rightarrow ke^{3x}$ avec $k \in \mathbb{R}$ »

AC dispose à présent de deux éléments de production de la solution générale de l'équation, qui n'ont pas été nommés : « une solution particulière de l'équation complète » et « une solution générale de l'équation sans second membre » ne sont pas encore des objets présents pour AC. La technique qui s'appuie sur cette nomination n'est donc pas, sans doute, un objet d'enseignement. On remarqua alors que les termes de « solution générale », « solution particulière », « équation sans second membre », « équation complète » manquent au lexique technique de l'élève. L'enjeu de l'exercice est donc, comme ce sera souvent le cas à l'université, de présenter sur un cas une technique absente en la faisant rencontrer à cette occasion, qui demeurera peut-être unique.

La question 3 vise donc la recherche d'une solution générale de l'équation avec second membre. Dans sa résolution, AC poursuit explicitement la mobilisation d'un élément de son répertoire et introduit l'ostensif qui l'appelle en mémoire : la fonction f-g vérifie l'équation.

AC lit : // question 3 // démontrer qu'une fonction f est solution de (E) : $y' - 3y = e^{2x}$ si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - 3y = 0$

AC4 : « // de la même façon $f - g$ est une solution de l'équation différentielle si elle vérifie (E') : $y' - 3y = 0$ »

Il s'agit alors de calculer la dérivée de la fonction f-g et de substituer à y et y' les valeurs particulières connues, pour obtenir une égalité, le geste du répertoire observé dans l'exercice précédent est pour AC le geste efficace. Nous avons donc ici une stratégie de fixation qui donne à AC une grande assurance dans ses calculs, parce qu'elle s'engage à coup sûr.

On retrouve le même fonctionnement que dans l'exercice précédent. Cette fois il se nomme d'abord par analogie stratégique (AC4 de la même façon) puis comme *interprétation* particulière d'un énoncé général (AC4'' signifie) et élément d'un raisonnement en forme de syllogisme (AC4''' ce qui implique), l'énoncé introductif AC4' étant un apport relatif aux conditions de réalisation de l'opération logique.

AC4 : « // de la même façon $f - g$ est une solution de l'équation différentielle si elle vérifie (E') : $y' - 3y = 0$ »

AC4' : « // la fonction f est une fonction dérivable sur IR, implique $f - g$ est dérivable sur IR »

AC4'' : « // // alors // $f - g$ est une solution de l'équation (E') : $y' - 3y = 0$ signifie que $(f - g) - 3(f - g) = 0$ »

AC4''' : « // ce qui implique $f' - g' - 3f + 3g = 0 // \Leftrightarrow f' - 3f = g' - 3g$ »

La forme du discours et les techniques de résolution demeurent. AC utilise l'analogie avec la question n° 1 qui vient d'être traitée, en considérant la somme de deux fonctions ($f - g$) comme définissant une troisième fonction, qu'elle n'a pas besoin de nommer. En revanche, selon le procédé vu plus haut à propos de la technique syllogistique majeure/mineure consistant à donner l'énoncé générique avant de donner son actualisation, elle traduit avec soin ce que cela signifie, de manière à ce que l'analogie guide au plus près la résolution de la question posée. Le reste des formes rhétoriques est respecté, ainsi elle conduit le travail avec la forme « sachant que [...] on a », et c'est cette fois non pas un « alors » mais un « donc » final qui sert de borne/embrayeur et introduit l'interprétation de la forme obtenue.

AC5 : « // sachant que $g(x) = -e^{2x}$ est une solution (E) : $y' - 3y = e^{2x}$ [question 1] »

AC5' : « // on a $f' - 3f = g' - 3g \Leftrightarrow f' - 3f = e^{2x}$ »

AC5'' : « // donc la fonction f est une solution de l'équation (E) »

Nous avons ici un épisode didactique, puisque le professeur introduit par un exercice une technique qui n'est pas enseignée. D'ailleurs, il se tient officiellement à distance en omettant le lexique correspondant. Cet épisode pourra être pour AC un épisode de sa biographie didactique si nous observons qu'en effet, l'élève intègre dans son répertoire le jeu avec les fonctions f , g , et leur différence (nous nous interrogeons aussi de les qualifier de « solution particulière de l'équation complète », « solution générale de l'équation sans second membre », et « solution générale de l'équation complète »). Nous ne pouvons le savoir immédiatement, mais nous pouvons le supposer parce que l'élève AC semble bien disposée

à faire flèche de tout bois ce qui signifie ici faire de tout épisode didactique (une occasion d'apprendre) un épisode de sa biographie didactique (un temps d'apprentissage).

AC, élève chronogène et autonome

Nous remarquons que AC utilise immédiatement la réponse obtenue à la question 1.

$$// g'(x) - 3g(x) = -2e^{-2x} - 3(-e^{2x}) = e^{2x} //$$

C'est un indice remarquable de sa position institutionnelle dans sa classe de terminale. En effet, son travail a produit pour elle un résultat, et à l'évidence tout résultat figure immédiatement dans l'organisation des savoirs efficaces de AC, son répertoire. Nous dirons que AC est « une élève chronogène », parce que son étude n'est pas l'exécution d'une tâche, mais elle *augmente* son univers cognitif³⁰. On sait (Chevallard et Mercier, 1988 ; Sensevy, 1994, 1996, 1998) que beaucoup d'élèves et de professeurs considèrent que seul le professeur est chronogène, et que seuls les éléments qu'il note explicitement peuvent faire progresser l'étude. Or, AC est chronogène pour elle-même et elle conduit l'étude d'une manière qu'avec Erdogan (2006) nous qualifions d'*autonome*, tandis que les élèves non chronogènes se sont sur-assujettis à l'institution en attendant tout du professeur. L'analyse présentée ci-dessus cherche à interpréter « l'apprentissage par l'étude autonome », afin de mieux comprendre ce que l'on pourrait appeler *l'intention didactique d'un élève*, qui est une *intention autodidactique sous couvert de l'intention didactique institutionnelle* relative au thème « équation différentielle du premier ordre à coefficients constants », qui pourtant n'a pas été nommé par l'élève. Mais que l'on ne s'y trompe pas, l'intention didactique institutionnelle n'est plus pour AC qu'une forme régulatrice de son activité, et ne l'empêche aucunement d'aller voir où le savoir semble plus efficace.

Comme le montrent les éléments dont nous avons observés l'existence dans l'espace cognitif de l'élève et qui sont présentés ci-dessous comme le *site mathématique local de l'exercice*, l'espace épistémologique mobilisé par l'intention didactique de AC excède largement l'espace des objets institués par d'enseignement³¹ et encore plus l'espace des objets définis par le programme d'enseignement. C'est en effet l'espace de ses transhumances possibles.

Figure 1 : tableau comportant quelques éléments du site mathématique local du deuxième exercice pour AC.

Substrat : objets paramathématiques et protomathématiques	Objets	Outils. et Techniques	Concepts 1	Concepts 2
Quantification		Calcul. de dérivées	Équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants	
Égalité	Équation différentielle	Caractérisation de la fonction constante, par sa dérivée		Conditions initiales
Identité	Fonction exponentielle			Solution d'équation fonctionnelle
Équation	Dérivabilité	Propriétés fonctionnelles exponentielle	Définition équationnelle d'une fonction	
Vérification	Équivalence			Espace vectoriel de fonctions
Second membre d'une ED	Variable fonctionnelle	Symétrie l'égalité		
Paramètre	Inconnue fonctionnelle	Substitution d'une variable	Solutions particulière et générale d'une Équation Différentielle	
Syllogisme				

Le tableau ci-dessus décrit le contenu mobilisé par l'action autonome de AC dans cet épisode didactique. Ces objets, relevés dans l'analyse et relatifs au répertoire heuristique utilisé par AC, constituent le site mathématique local pour la question telle que la traite AC et son entour immédiat constitué des objets manipulés *en acte*, ce qui répond à la question : « sur quoi AC s'appuie-t-elle pour réactiver les éléments pertinents de son répertoire ? ». Nous ne pouvons pas dire que le rapport de AC à l'ensemble de ces objets a changé, tant qu'elle ne manifeste pas qu'elle a identifié à l'occasion de l'exercice *une technique de traitement des équations avec second membre*.

Cela nous conduit à dire que cet épisode didactique n'a pas produit un épisode de la biographie didactique de AC, bien que sans doute on puisse affirmer que l'élève a augmenté son expérience des équations différentielles. En effet, on remarque aussi (et c'est un des mérites du site présenté ci-dessus que de le mettre en évidence) que la solution obtenue $f(x) = e^{2x} + ke^{3x}$ est « la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre ». Mais faute de professeur (ou d'ouvrage de niveau universitaire) pour l'énoncer, l'élève qui pourtant gagne en expérience n'apprendra pas immédiatement cette propriété générale. Ainsi, nous observons que *l'absence de certains termes du niveau technologique (concepts 1) empêche l'étude autonome conduite par AC d'être complètement efficace : nous constatons à quel point leur présence, qui relève de la responsabilité enseignante d'un professeur, est nécessaire à l'autonomie des élèves*³².

SUR LE FONCTIONNEMENT D'UNE INSTITUTION D'ENSEIGNEMENT QUI SE MANIFESTE PAR L'ENQUÊTE ET L'ÉTUDE AUTONOME HORS CLASSE, POUR LA CLASSE

Au fur et à mesure que la recherche progressait, le contrôle de la variété des épisodes construits par les participants du dispositif expérimental nous a permis de penser la mise en place d'entretiens individuels qui cherchaient à nous renseigner sur les grandes lignes des organisations didactiques mise en œuvre par l'élève, ses obligations relatives à l'étude des mathématiques, et les dispositions d'apprentissages par l'étude autonome qu'il a construites dans les institutions didactiques dont il a fait partie. Il s'agissait de compléter nos informations pour comprendre le dynamisme didactique des institutions d'étude autonome observées et les moyens qu'elles se donnent. Nous avons recueilli des traces des assujettissements des élèves, dans les différentes positions institutionnelles qu'ils occupent (en classe et hors classe). Ainsi, nous avons pu valider certaines inférences à partir des entretiens sur les manières de faire et de penser, propres à chaque élève.

Nous serons toujours surpris par l'inventivité des élèves aussi bien que, parfois, par leur assujettissement dramatique aux rythmes et rituels institutionnels. Nous serons tout aussi surpris par la faible ouverture des sites mathématiques officiels, lorsque nous les rapportons à l'analyse *a priori* du site d'une question. L'ensemble de ces étonnements nous permet de mieux comprendre l'exigence portée

par les demandes de la TSD et de son auteur, Guy Brousseau, puisqu'il cherche les conditions d'une étude autonome en classe même, sous le regard et la direction du professeur. Présenter des éléments de réponse à ces questions ne peut se faire ici, mais nous présentons rapidement quelques éléments obtenus.

Comparaison rapide des discours de trois élèves de l'échantillon, AC, LE et RC

Pour trois des élèves que nous avons observés, nous présentons quelques données d'entretien. Nous donnerons deux dimensions de leur discours.

*Tout n'est pas dit dans les leçons*³³

Les déclarations de ces élèves sont, pour nous, deux cas exemplaires d'une position partagée par tous. La plupart des réponses sont très précises, et on retrouve des termes proches d'un élève à l'autre. Ainsi, tous disent que la séance de cours mathématiques en classe ne donne que les points de repère et qu'elle laisse implicite la plupart des questions permettant de réaliser les activités attendues.

L'élève AC, terminale scientifique du lycée SC : verbatim :

« les maths sont un outil important //// on en a besoin dans la plupart des carrières /// moi // je serai en classe préparatoire l'année prochaine // donc je travaille beaucoup les mathématiques // en classe // d'habitude // disons que le cours est clair // il y a souvent les formules importantes // quelques exercices d'application pas souvent compliqués non plus // les travaux de recherches en classe dans les différentes leçons déjà étudiées ne donnent pas souvent l'ampleur et la portée des objets mathématiques en étude avec tous les sous-entendus de notions ou autres objets qui se cachent derrière la notion en cours d'apprentissage en classe /// je travaille à la maison les exercices pour apprendre et pour comprendre sur les façons de faire //// »

L'élève LE, terminale scientifique du lycée J.-C : verbatim

« /// mon cahier de cours est une sorte de résumé donné par mon professeur de mathématiques /// je sais

qu'il utilise plusieurs livres // donc je fais pareil /// de toute façon il y a des choses /// des façons de faire qui ne sont pas dans les cours et qu'il faut connaître si je veux réussir les évaluations /// je travaille beaucoup à la maison pour cela //// »

Il y a des liens invisibles, des liants cachés que l'étude fait découvrir

La plupart des élèves observés décrivent les mathématiques à apprendre comme organisées en « une chaîne » dont certains maillons seulement sont donnés en classe, ou « des éléments à tisser ensemble » : nous disons que *le savoir enseigné est organisé comme un texte* (Chevallard, 1985). L'un des élèves dit qu'il cherche à connaître ce texte avant que le professeur ne l'ait enseigné, un autre qu'il le constitue à partir de plusieurs ouvrages, comme son professeur.

L'élève AC, terminale scientifique du lycée SC : verbatim :

« // j'ai compris qu'il existe des liens entre les notions d'une leçon à l'autre /// je fais beaucoup d'exercices pour connaître les liens implicites relatifs aux objets mathématiques //// je sais comment cela fonctionne // derrière chaque consigne //// il y a des consignes non-dites qui impliquent des façons de faire //// des transformations qui nécessitent d'autres objets mathématiques ainsi de suite //// c'est une sorte de chaîne la question mathématique /// une fois les maillons rassemblés //// je construis la chaîne réponse de la question /// je fais beaucoup d'exercices pour rencontrer plusieurs systèmes //// sur internet ou dans mes autres livres je trouve d'autres formules //// regardez //// j'ai trouvé ça dans un des livres ////³⁴

LE, élève de terminale scientifique du lycée J.-C : verbatim :

« /// maintenant je sais comment tout cela fonctionne /// pour répondre à une question donnée en mathématique /// il faut d'abord répondre à d'autres questions qui se cachent derrière celle de l'exercice en trouvant les liants /// les relations qui ne sont pas visibles mais présentes //// je fonctionne comme ça depuis toujours //// disons plus approfondi depuis la classe de seconde générale et technique /// et j'ai toujours de bons résultats donc je continue pareil //// ».

Ces élèves montrent une connaissance didactique profonde, relative à la fois au temps didactique officiel et à la nécessité de construire personnellement et pour soi-même un texte du savoir articulé aux points d'appui du cours, que la séance de cours en classe ne peut à elle seule constituer. Ils savent aussi que l'attaque d'une question problématique suppose la résolution de questions préalables, et comme le disait Descartes, qu'il faut *reprendre* ses connaissances pour chaque question étudiée. On remarque enfin que l'étude autonome mérite son nom, puisque les élèves cherchent à se confronter à d'autres normes que celles de leur professeur, à la fois en allant chercher d'autres exercices, en les cherchant dans d'autres ouvrages, et en étudiant d'autres organisations du texte à partir d'une enquête large, pour laquelle par exemple le net est mobilisé : bref, *si le professeur désigne la matière de l'étude, c'est leur initiative dans l'étude autonome qui rend cette matière consistante.*

Nous avons donc quelques traces des rapports aux mathématiques et à l'étude autonome mathématique hors classe que les participants de l'échantillon déclarent. Ils reconnaissent « la valeur » des mathématiques dans la société mais cette valeur se rapporte soit au rôle des mathématiques apprises pour la réussite des évaluations dans l'institution scolaire (secondaire et universitaire), soit à un emploi qu'ils n'ignorent pas et qu'ils rencontreront bien plus tard, dans les grandes écoles ou les pratiques professionnelles.

Mais ces entretiens nous désignent aussi un problème de l'enseignement. Dès lors que le projet d'apprendre est formé par un élève qui s'est vu présenter le savoir à étudier, l'étude autonome, qui est toujours « pour la classe », doit être définie soit par le professeur proposant des « situations didactiques » soit, par les élèves qui répondent en pratique à la double question : Comment apprendre ? Comment s'enseigner³⁵ ? Les formes du contrat didactique déterminent la part de l'étude que chaque élève a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre responsable devant l'institution scolaire. Chevallard le dit clairement : « l'institution scolaire [...] montre un objet ou une propriété, l'élève accepte de le voir comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances³⁶ » et nos analyses font apparaître que les bons élèves arrivent à s'emparer de cette responsabilité que le contrat d'ostension qui fonde l'enseignement traditionnel leur laisse. Ils le disent clairement :

[RC // j'essaie déjà en classe de comprendre les leçons c'est-à-dire les notions en étude // je sais qu'il existe des liens entre toutes les mathématiques étudiées avant dans l'année ou durant les années scolaires précédentes[....] //// je cherche en classe pendant les séances de cours de situer les nouvelles leçons étudiées par rapport aux autres existantes //// je ne cherche pas connaître par cœur les formules et les propriétés mais à les comprendre // comment les notions étudiées vivent entre elles/]

[LE /// à la maison je n'ai personne qui puisse m'aider // donc je suis obligé de commencer mon travail d'étude mathématique par la classe // c'est en classe que le professeur introduit les notions que je dois étudier /// vous voyez mes parents n'ont pas fait des études[....] // j'écoute le professeur dans ses explications et applications // je pose des questions pour comprendre / des fois simplement pour m'assurer de la bonne compréhension ou application de notions étudiées /// je participe en classe // lorsque j'ai la chance d'avoir un bon professeur cela m'aide beaucoup // sinon je prends // quelques cours de soutien pour comprendre uniquement ce manque d'explication ou d'application du professeur // les démonstrations en classe m'aident aussi beaucoup car je vois les liens que je pourrai construire lorsque j'étudie seule les exercices ///]

QUELQUES RÉSULTATS

Le travail mésogénétique de l'élève est contraint par le contrat didactique. Les bons élèves ont appris à enquêter, à chercher et à trouver des réponses avec leurs propres ressources ou celles de la situation, en se comportant comme leurs propres professeurs : leurs gestes d'enseignement sont ceux que Araya (2008) a observés chez les professeurs dans les séances de travaux dirigés, lorsqu'ils ont à organiser les conditions de l'étude que d'ordinaire leurs élèves conduisent en autonomie.

Le contrat de conditionnement qui propose aux élèves plus faibles de ne s'engager qu'à accomplir des tâches réductibles aux répertoires didactiques mis en place lors des cours ou des exercices d'application directe en classe, ne garantit pas l'apprentissage. Mais nous comprenons pourquoi dans les classes faibles, le professeur et les élèves peuvent s'entendre tacitement sur cette position de repli, faisant comme si l'étude autonome pouvait être évitée.

La transformation des savoirs anciens et la production de savoirs nouveaux adaptés aux questions rencontrées caractérisent le contrat didactique dans les institutions de l'étude autonome que nous avons observées. Ainsi, pour RC001, les faits principaux et les actions passées sont évoqués :

« la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{k=0}^5 (-1)^k e^{kx}$ // Donc // [silence]
 $f(x) = \sum_{k=0}^5 (-1)^k e^{kx}$ signifie la somme des termes $(-1)^k e^{kx}$ avec k allant de 0 à 5 // Il s'agit donc des termes consécutifs d'une suite numérique // [Silence] // »

Puis actions et faits sont reconstruits, rationalisés et justifiés après coup dans une situation mathématique particulière, qui devient pour ces «élèves, didactique :

« supposons la suite $u_k = (-1)^k e^{kx} = (-e^x)^k = 1(-e^x)^k$ // Donc $f(x) = \sum_{k=0}^5 (-1)^k e^{kx}$ est la somme de six termes consécutifs de la suite géométrique de raison $q = (-e^x)$ et de premier terme $u_0 = 1$ // Donc $u_0 q^k$ // En utilisant $S_k = u_0 \times \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$ // »

Et l'explicitation qui vient maintenant est placée sous le contrôle du répertoire épistémologique qui a été convoqué :

« [En utilisant $S_k = u_0 \times \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$ On a // $f(x) = \sum_{k=0}^5 (-1)^k e^{kx} = \frac{1-(-e^x)^6}{1-(-e^x)}$ // donc $f(x) = \frac{1-e^{6x}}{1-e^x}$] »

Le jeu du spécifique de l'exercice au générique de la formule prise dans le répertoire est remarquable et l'élève peut l'explicitement.

L'une des responsabilités dont l'élève s'empare à son bénéfice est ici de *stabiliser les rapports à des objets qu'il a jugé nécessaires pour la compréhension du travail mathématique*, et c'est d'ordinaire le travail du professeur de les lui désigner, comme Araya (op. cit.) l'a observé. À la différence des élèves moyens ou en difficultés, ceux de notre dispositif de recherche étudient et apprennent ainsi à *maîtriser le fonctionnement pratique des organisations mathématiques* mobilisées dans la production de réponses aux exercices. Le plus souvent ils ne nomment pas explicitement pour nous ces savoirs, mais ils nous indiquent leur rapport à ces objets par leurs silences et les éléments de liaisons qui fondent leurs raisonnements (les « *donc* » pour cet élève). Leur travail modifie leur *topos* d'élève en leur attribuant le premier rôle dans la production du répertoire épistémologique adéquat au type de tâche qu'ils auront à savoir traiter.

L'élève agissant, constructeur de répertoires de savoirs efficaces, définit ses objets d'étude, il contribue grandement à la construction du milieu sur lequel il appuie son travail d'enquête mathématique. Ces deux dimensions, qui différencient la position de l'*étudiant* de celle du simple apprenant, permettent de cerner en quoi l'autonomie nécessaire à l'étudiant dans la situation de référence est plus développée que

celle qui convient à un élève apprenant sur-assujetti à un contrat didactique dont il attend tout.

DISCUSSION ET CONCLUSION

L'utilisation d'une démarche didactique à travers la méthode des épisodes biographiques a été un choix fécond pour le traitement de notre problème de recherche : observer et comprendre le fonctionnement et la gestion de l'étude autonome hors classe des très bons élèves du lycée. L'enquête empirique qualitative et longitudinale est une stratégie efficace mais coûteuse d'accès à notre objet mais l'observation des copies d'évaluations déjà corrigées par le professeur ou l'observation de séances de cours en classe ne nous informe que très peu et très indirectement sur ce qui produit les différences de réalisation que l'on observe d'un élève ordinaire à un élève excellent. Notre apport est donc venu de la production de l'analyse et de l'interprétation des épisodes biographiques et des épisodes didactiques qui en sont la situation. Nous avons retrouvé les apports de ceux qui nous ont précédés dans la voie ouverte en 1992 par Mercier et continuée par Matheron (2000), Erdogan (2006) et Silvy (2010), et nous avons poursuivi l'exploration de ce que Chevallard appelait en 1992 une *terra incognita* : l'activité mathématique des élèves, le maillon perdu entre enseignement et apprentissage : l'étude.

La technique d'analyse dont nous exposons ici les tenants et les aboutissants révèle des phénomènes inconnus dont chacun savait l'existence. Les professeurs pensent que leur action détermine l'espace institutionnel, alors que *toute institution vit par l'action de ses sujets institutionnels*, ceux qui occupent un *topos* supposé instituant comme ceux qui occupent un *topos* supposé institué : c'est ce que nomme la notion d'action conjointe.

Cette symétrie a conduit à la définition de l'espace des actions didactiques comme espace d'*actions conjointes*, ce qui a produit une réorganisation importante de la pensée didactique et de ses rapports à une anthropologie des savoirs dont on imagine aujourd'hui quelques éléments premiers au-delà de ce que désigne la TAD (Mercier Schubauer-Leoni et Sensevy, 2002 ; Sensevy et Mercier, 2007, 2011 ; Mercier 2012 ; Sensevy, 2012 ; etc.) et nous montrons ce que l'action conjointe signifie lorsque l'on regarde du point de vue des élèves, sachant que la *symétrie des points de vue* est un principe fonda-

teur de cette approche. Mais nous n'oublions pas les avancées de la TAD et les deux éléments mis en avant ces dernières années par Chevallard : la dialectique « média-milieu » (Chevallard, 2003) qui se traduit pas les gestes « d'enquête (dans les médias) et d'étude (avec et contre le milieu) ». Sans l'accent mis sur cette dialectique dans les séminaires du laboratoire d'accueil de notre étude doctorale, nous n'aurions peut-être pas abouti.

Il a été question pour nous de montrer en quoi la méthode des épisodes biographiques constitue une contribution pouvant permettre l'accès au travail des élèves hors classe pour la classe. Ainsi nous sommes parvenus à une première connaissance du phénomène de construction, de fabrication et d'organisation de savoirs efficaces. Des organisations que les très bons élèves construisent, par leur étude et leur enquête personnelle loin de la classe et à l'insu des professeurs, par des techniques didactiques qui sont semble-t-il celles des professeurs eux-mêmes.

Cette recherche nous permet alors d'envisager des développements dans les classes : la confrontation des élèves étudiant sur une même question engagerait sans doute d'autres élèves à suivre l'exemple efficace des meilleurs. Mais cela suppose que les professeurs soient au fait à la fois de l'existence d'objets mathématiques non enseignés mais utiles à l'activité qu'ils demandent (donc, il faudrait que l'analyse du site local des questions posées ait été conduite), et de l'existence de gestes d'enquête qui leur sont d'ordinaire propres, mais qu'ici leurs élèves développeraient (donc, il faudrait que l'analyse didactique de leur activité d'enseignement leur soit disponible). Ce sont des questions posées à une formation professionnelle continue, qui pourraient être traitées dans le cadre d'une recherche collaborative entre un collectif de professeurs et un collectif de chercheurs posant la question de *la construction de savoirs professionnels efficaces*.

C'est alors apparemment une question nouvelle, puisque nous ne connaissons que d'un côté les travaux pionniers déjà cités de Castela (2000, 2002, 2007, 2011) et de l'autre côté les travaux de Matheron (2000), de Erdogan (2006), de Araya (2008) et de Silvy (2010) sur ce domaine. L'enjeu de nos travaux à venir sera donc la confrontation plus serrée de ces connaissances relatives à ce que nous appelons, avec ces didacticiens, d'un terme nouveau au singulier : l'étude.

NOTES

1. Cette synthèse remarquable fait le point sur les approches sociologiques de l'étude « hors la classe, pour la classe », en Sciences de l'éducation, jusqu'au point où c'est le contenu même des apprentissages des divers élèves qui doit être questionné, au cas par cas. C'est de cette manière-là que nous poursuivons l'approche.

2. La notion d'étude autonome est travaillée par Erdogan (à paraître).

3. Nous faisons référence ainsi au remarquable travail de Sociologie de l'éducation de Bautier et Rayou (2010). Nous développons nos travaux en dialoguant avec le regard sociologique sur ces questions, qui ne se focalise pas nécessairement sur la description des rapports des élèves aux objets de l'étude mais plutôt sur les conditions sociales de l'établissement de ces rapports.

4. Nous reprendrons parfois l'expression de Roland Barthes, qui pour le même motif parle de *biographèmes* et qui en fait la critique : « J'ai l'illusion de croire qu'en brisant mon discours, je cesse de discourir imaginairement sur moi-même, j'atténue le risque de transcendance mais comme le fragment (le haïku, la maxime, la pensée, le bout de journal) est finalement un genre rhétorique et que la rhétorique est cette couche-là du langage qui s'offre le mieux à l'interprétation, en croyant me disperser, je ne fais que regagner sagement le lit de l'imaginaire. » (p. 90).

5. Le terme est repris à Barthes (1975), qui ne voulait pas, en écrivant lui-même l'ouvrage le concernant dans la collection « l'auteur par lui-même », faire acte d'auto-biographie. Ainsi, il donnait à voir des biographèmes le concernant, refusant de produire une vision holiste de sa personne.

6. Selon nous.

7. La production d'une réponse à partir d'une question, production pouvant servir à l'exploration dans le temps et dans l'espace à la construction de répertoire de savoirs efficaces.

8. Cet adjectif est d'emploi rare, mais attesté. Il nous permet d'éviter les ambiguïtés de *savante*. *Sachant* est proche de *instruit* et bien sûr de *savant*.

9. Nous disons que le rapport du sujet aux objets que l'institution propose est *adéquat* à la situation (il produit la réussite dans l'exécution d'une tâche, ce dont le sujet peut juger par lui-même) et qu'il est *idone* au rapport institutionnel (ce qui suppose qu'un tenant de l'institution, qui peut être le « bon sujet » lui-même, en juge).

10. Tout au moins au niveau du lycée, sans doute dès le collège et à l'école, ce phénomène rend sans doute compte de l'efficacité différentielle de l'enseignement élémentaire.

11. Ces copies ont été produites plus d'une semaine avant que nous y ayons accès. Elles ont été corrigées en classe, rendues par le professeur de la classe et elles appartiennent au passé des élèves : ceux-ci ne peuvent les commenter qu'à la lumière de leurs connaissances nouvelles, comme l'a montré Matheron (2000).
12. Le contrat chercheur-familles-élèves participants au dispositif d'observation. R. Mario (2012)
13. Document qui nous a permis de vérifier simplement les résultats obtenus au bac session 2008, par les élèves de notre échantillon de recherche, d'une question à l'autre dans un même exercice.
14. Yves Matheron (2003) et Andréa Araya (2008) appellent « mémoire » ces répertoires et en effet, ce sont des ensembles de résultats mémorisés. Le terme de mémoire permet de traiter des conditions du rappel en mémoire et de l'oubli d'un résultat donné. Mais nous travaillons plutôt sur la constitution de systèmes techniques mobilisant de nombreux résultats venus de plusieurs domaines étudiés et permettant d'attaquer des questions nouvelles. Dans ces conditions, il n'est plus vraiment possible de parler simplement de mémoire pour un phénomène qui semble bénéficier d'une gestion explicite et consciente (Matheron et Araya parlent alors de *mémoire du savoir*). Nous avons donc préféré parler d'un « répertoire (de résultats) » comme « invention technique » pour la production d'un(e mémoire du) savoir.
15. Attestation de recherche du laboratoire UMR-ADEF et du directeur de recherche. R. Mario (2012)
16. Attestation UMR-ADEF. R. Mario (2012)
17. Le tableau récapitulatif des séances d'observation d'AC. R. Mario (2012)
18. Document de présentation du dispositif de recherche aux professeurs. R. Mario (2012)
19. Document de présentation du dispositif de recherche aux élèves. R. Mario (2012)
20. Les contrats de mise en place du dispositif de recherche. R. Mario (2012)
21. Des années antérieures et des premiers semestres de l'année scolaire 2007-2008. R. Mario (2012)
22. Les tableaux récapitulatifs des séances d'observations biographiques des élèves de notre échantillon de recherche. R. Mario (2012)
23. Rappelons qu'il est même impossible de nommer toutes les règles permettant de suivre une règle d'action... Ce que nous appelons des savoirs sont donc seulement des objets mathématiques, paramathématiques, et parfois protomathématiques, au sens de Chevallard (1985).
24. Les références renvoient aux annexes de thèse. R. Mario (2012).
25. Document, relevé des résultats obtenus au BAC. R. Mario (2012)
26. Comme nous l'avons vu, cet espace comprend aussi des objets protomathématiques et paramathématiques, et même des pratiques didactiques.
27. Fixer est un des gestes d'enseignement du professeur identifiés par Araya (2008, p. 258).
28. Dans le cadre de la TSD, ou de la TACD qui développe les notions de jeu et de situation, nous dirions que *l'actant définit les objets sensibles du milieu et leurs propriétés (son action est mésogénétique)*, afin de permettre *l'émergence des règles d'un jeu épistémique avec ces objets*. L'augmentation est un des enjeux possibles de ce type de travail, nous en avons un exemple dans l'épisode précédent.
29. Un second geste d'enseignement du professeur identifié par Araya (*op. cit.*).
30. Comme le dirait Araya, parlant de l'activité d'enseignement des professeurs.
31. Mais on sait depuis longtemps que pour une grande part, le curriculum excède largement le système des objets d'enseignement et que ce système n'est en général pas inclus dans les objets produits par un parcours curriculaire.
32. On comprend mieux maintenant comment l'enseignement en ses commencements pouvait être efficace, avec un temps d'étude bien plus important que le temps de l'exposé professoral de contenu à étudier. On comprend aussi comment les professeurs, mis en demeure de démontrer qu'ils enseignaient aussi aux élèves qui n'apprenaient pas, ont peu à peu pris le contrôle de tout l'espace didactique (Chevallard, 2005 / la gestion du professeur)
33. Entretien AC001AC, LEL001&RCA001. R. Mario (2012).
34. Relation entre objets mathématiques trouvés dans un livre personnel (Cf. annexe thèse R. Mario -2012)
35. Chevallard, 1988, p. 13
36. Brousseau, p. 46

RÉFÉRENCES

- Araya-Chacon, A. (2008). *La gestion de la mémoire didactique par le professeur, dans l'enseignement secondaire des mathématiques : étude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa-Rica*. Mémoire de thèse de l'université Paul Sabatier, Toulouse.
- Assude, T. (2010, septembre). *Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers*. Communication présentée aux Actes du congrès de l'actualité de la Recherche en Éducation et en Formation (AREF). Université de Genève.
- Assude, T., Mercier A., & Sensevy, G. (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique du milieu. *Recherche en didactique des mathématiques*, 27(2), 221-252.
- Assude, T., Perez J.-M., Tambone J., Vêrillon A., (2011). Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Éducation et Didactique*, 5(2), 65-84.
- Barthes, R. (1975). Roland Barthes par Roland Barthes. Le Seuil, collection écrivain et toujours.
- Bautier, E., & Rayou, P. (2009). *Les inégalités d'apprentissages. Programmes, Pratiques et malentendus scolaires*. Rennes : PUR.
- Bertaux, D. (1976). *Histoires de vie ou récits de pratiques ? Méthodologie de l'approche biographique en sociologie*. Rapport au CORDES.
- Bertaux, D. (1980). L'approche biographique, sa validité méthodologique, ses potentialités. *Cahiers internationaux de sociologie*, 69(2), 198-225.
- Bertaux, D. (1997). *Les récits de vie*. Paris : Nathan.
- Bertaux, D. (1997, 2005). *L'enquête et ses méthodes : le récit de vie* (2^e édition). Armand Colin : Paris.
- Bessin, M. (2010). Parcours de vie et temporalités biographiques : quelques éléments de problématiques. Partie I : Appréhender les parcours : éléments de méthode. *Information sociale*, 156, 12-21.
- Blanchard-Laville, C. (1996). *Pour une clinique du rapport au savoir*. Paris : L'Harmattan.
- Bourdieu, P. (1986). L'illusion biographique, *Actes de la recherche en science sociale*, 62(63), 69-72.
- Bosch, M. (1994a). *La dimension ostensive l'activité mathématique. Le cas de la proportionnalité*, (Thèse de doctorat). Université autonome de Barcelone.
- Bosch, M. (1994b). Les instruments du travail mathématique : le cas de la proportionnalité. Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnignot (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 305-312). Grenoble : La pensée sauvage.
- Brousseau, G., (1979-1980). *La question de la difficulté des élèves en calcul*. Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement.
- Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherche*, 41, 177-182.
- Brousseau, G. (1983). Obstacle épistémologiques en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 4(2), 167-196.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactique en mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2000, 2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. Étude dans le cadre de la théorie des situations didactiques. *Petit x*, 57, 5-30.
- Castela, C., (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherche en didactique des mathématiques*. 15(1), 7-45.
- Castela, C., (2000). Un objet de savoir spécifique dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 20(3), 331-380.
- Castela, C. (2007). Travail de la question des enjeux non explicités d'apprentissage avec les outils de la théorie anthropologique. Curriculum et chronogenèse praxique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. Javier García (dir.), *Sociedad, escuela y matematicas. aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (p. 117-138). Universidad de Jaén.
- Castela, C. (2008). Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. Dans A. Rouchier, & I. Bloch, (dir.), *Perspective en didactique des mathématiques* (p. 87-160). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Castela, C. (2011). *Des mathématiques à leur utilisation, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets. Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques*. Note de synthèse pour l'obtention de HDR. Université Paris Diderot.
- Castela, C., & Mercier, A. (1995). Peut-on enseigner des méthodes ? Comment les élèves apprennent-ils des méthodes ? *Petit x* 41, 5-25.
- Chevallard, Y. (1986). Esquisse d'une théorie formelle du didactique. Dans C. Laborde (dir.), *Actes du premier colloque franco-allemand de Didactique des mathématiques et de l'Informatique* (p. 97-106). Paris : La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1988). L'univers didactique et ses objets : fonctionnement et dysfonctionnements. *Interactions didactiques*, 9, 9-36.
- Chevallard, Y. (1989). *Le concept de rapport au savoir : rapport personnel, rapport officiel, rapport institutionnel*. Communication présentée lors des Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique (p. 211-235), université Joseph Fourier, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition Didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1994, février). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Communication présentée lors des Actes du séminaire de l'Associazione Mathesis (p. 190-200), Turin, Italie.

- Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale, esquisse d'un modèle didactique. Dans R. Noirfalise, et M.-J. Perrin Glorian (dir.), *Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 83-122). Clermont-Ferrand.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Structures et Fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (dir.) *Actes de la XI^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactiques des mathématiques. Dans S. Maury, et M. Caillot, *Rapport au savoir et didactiques* (p. 81-104). Paris : FABERT.
- Chevallard, Y. (2005). La didactique dans la cité avec les autres sciences. Journées 2005 du Réseau Éducation Formation, Montpellier.
- Chevallard, Y. (2007). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. Dans ARDM (dir.), *Actes du séminaire National de didactique des Mathématiques*.
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique, Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz, A. Higuera, & F. Javier Garcia (dir.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (p. 705-746). Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y. (2009, avril). *La notion de PER*, communication présentée lors d'un exposé à l'IUFM de Toulouse.
- Chevallard, Y. & Bosch, M. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Chevallard, Y., & Mercier A., (1988). *Sur la formation historique du temps didactique*. Marseille : Publication 8.
- Deloustal-Jorrand, V. (2004a). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Deloustal-Jorrand, V. (2004b). Studying the mathematics of implication through a problem on written proofs. Dans M. Johnsen Hoiné, & A. Fuglestad, (dir.) *28th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 263-270). Bergen, Norway.
- Demazière, D., & Dubar C. (1997). *Analyser les entretiens biographiques, l'exemple des récits d'insertion*. Col. Essais et recherche. Paris : Nathan.
- Demazière, D. (2008). L'entretien biographique comme interaction biographique, contre interprétations, ajustements de sens. *Langage et Société*, 123.
- Erdogan, A. (2006). Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques (Thèse de doctorat). Université de Paris-Diderot, Paris 7.
- Erdogan, A., & Duchet P., (2005, février). *Pupil's autonomous studying : from an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis*. Communication présentée lors du Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Sant Feliu de Guixols, Spain.
- Erdogan, A., & Mercier A., (2007). Un regard sur le travail des élèves. Les forums de questions mathématiques sur internet et les attentes sur le travail des élèves. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 12, 147-164.
- Erdogan, A. (accepté). Condition épistémologique de l'étude des fonctions et de l'algèbre, en France. *Recherche en Didactique des Mathématiques*.
- Fritsch, P. (1982, mai). *Le sens de l'ordinaire*. Communication présentée lors du Colloque Quotidienneté & Histoire, Lyon.
- Fritsch, P. (1983). *Le sens de l'ordinaire*. Paris : CNRS.
- Gascon, J. (1993). Développement de la connaissance mathématique et de l'analyse didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 13(3), 295-332.
- Gascon, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revisita Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 4(2), 129-160.
- Gascon, J. (2003, juillet). *El espacio de las organizaciones didácticas posibles en las instituciones docentes*. Communication présentée au IX^e JAEM, Tenerife et Gran Canaria.
- Genestroux, F. (2000). *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques* (Thèse de doctorat). Université Sciences et Technologie, Bordeaux 1.
- Genestroux, F. (2002). Les assortiments didactiques. Dans J.-L. DORIER, M. ARTAUD, M. ARTIGUE (dir.) *Actes de la XI^e école de didactique des mathématiques* (p. 177-186). Grenoble : La pensée Sauvage.
- Genestroux, F. (2008). L'élève et sa conquête de l'autonomie dans l'étude des mathématiques. Approche didactique d'un cas de rééducation mathématiques. *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, 41(1), 33-64.
- Goetz, J.-P., & Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid : Ediciones Morata.
- Heinritz, C., & Rammstedt, A. (1991). L'approche ethnographique en France. *Cahiers internationaux de sociologie*, 91, 330-370.
- Kaufmann, J.-C. (2007). *L'enquête et ses méthodes. L'entretien compréhensif* (2^e édition). Paris : Armand Colin.
- Legrand, M., (1993). *L'approche biographique : théorie, clinique*. Paris : Desclée de Brouwer.
- Leutenegger, F. (1999). *Contribution à la théorisation d'une clinique pour la didactique : trois études de cas en didactique des mathématiques* (Thèse de Doctorat). Université de Genève.

- Leutenegger, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 20(2), 209-250.
- Leutenegger, F. (2009). *Le temps d'instruire. Approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématiques*. Bruxelles : Peter Lang.
- Liger-Grimaud, G. (2014). *L'enseignement, l'apprentissage, le didactique : approche comparative. Transmission des savoirs*. (Thèse de doctorat). Aix- Marseille université.
- Ligozat, F. (2008). *Un point de vue de didactique comparée sur la classe de mathématiques. Étude de l'action conjointe du professeur et des élèves à propos de l'enseignement/apprentissage de la mesure de grandeurs dans des classes françaises et suisses romandes*. (Thèse de doctorat). Université de Genève, université de Provence.
- Maffesoli, M. (1980). Le rituel et la vie quotidienne comme fondement des histoires de vie. *Cahiers internationaux de sociologie*, 69.
- Matheron, Y. (1999-2000). Analyser les praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petitx*, 54, 51-78.
- Matheron, Y. (2000). *Étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples*. (Thèse de Doctorat). Aix- Marseille université.
- Mercier, A. (1986). Du côté du savoir. Dans A. Rouchier (dir.), *Actes de la 4^e école d'été de Didactique des mathématiques*. Orléans : IREM d'Orléans-Tours.
- Mercier, A. (1992). L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique. (Thèse de doctorat). Université de Bordeaux I.
- Mercier, A. (1994). Des études didactiques pourraient-elles aider à l'enseignement des savoirs professionnels ? (le cas des mathématiques dans les pratiques professionnelles). *Didaskalia*, 4(5), 20.
- Mercier, A. (1995a). Approche biographique de l'élève et des contraintes temporelles de l'enseignement : un cas en calcul algébrique *Recherche en didactique des mathématiques*, 15(1), 97-142.
- Mercier, A. (1995b). Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoirs mathématiques. Dans G. Arsac, et al., *Différents types de savoirs et leur articulation* (p 129-144). Grenoble : La pensée sauvage.
- Mercier, A. (1996a). La création de l'ignorance, condition de l'apprentissage, à l'école. *Des Sciences de l'éducation*, 22(2), 345-363.
- Mercier, A. (1996b). Lettres. Dans C. Blanchard- Laville, Y. Chevallard, M.-L. Schubauer-Leoni (dir), *Regard croisés sur le didactique, un colloque épistolaire de chercheurs*. Grenoble : La pensée Sauvage.
- Mercier, A., (1996c). *Comment appréhender le cognitif, depuis la position de la didactique des mathématiques ?* Communication présentée au symposium REF, université de Montréal.
- Mercier, A., (1998). La participation des élèves à l'enseignement. *Recherche en didactique des mathématiques*, 18(3), 279-310.
- Mercier A. (1999). *Sur l'espace-temps didactique. Études du didactique en Sciences de l'éducation*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, université de Provence.
- Mercier, A. (2000). La théorie des situations didactiques est-elle une théorie de connaissance collective ? Dans F. Conne, G. Lemoyne (dir), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 89-106). Montréal : Presses Universitaires de Montréal.
- Mercier, A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique. *Éducation et Didactique*, 1(2), 7-40.
- Mercier, A. (2011). Les inégalités d'apprentissage. Programme pratique et malentendus scolaire. *Éducation et Didactique*, 5(2), 151-156.
- Mercier, A. (2012a). Suivre une démarche d'investigation pour enseigner les relatifs, au collège : une proposition pragmatique et une expérimentation, en France. Dans J.-L. Dorier, S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le XXI^e siècle* (p. 1423-1431). Actes du colloque EMF2012 (GT10).
- Mercier, A. (2012b). Note critique : M.-P. Chopin, Le temps de l'enseignement. L'avancée du savoir et la gestion des hétérogénéités dans la classe. *Revue française de Pédagogie*, 178, 132-135.
- Mercier, A., Schubauer M., & Sensey, G. (2002). Vers une didactique comparée. *Française de Pédagogie*, 141, 5-16.
- Peneff, J. (1990). *La méthode biographique*. Paris : Armand Colin.
- Rajoson, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*. (Thèse de doctorat). Aix-Marseille université.
- Sanséau, P.-Y. (2005). Les récits de vie comme stratégie d'accès au réel en science de gestion. *Recherches Qualitatives* 25(2), 35-57.
- Schubauer-Leoni, M.-L. (1986). Le contrat didactique : un cadre pour comprendre les Savoirs Manifestés par les élèves en Mathématiques. *European Journal of Psychology of Education*, 1(2) 139-153.
- Schubauer-Leoni, M.-L., & Leutenegger, F. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élève : les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter Dans Sensevy G., Mercier A., (dir.). *Agir ensemble, l'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 51-91). Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- Schubauer-Leoni, M.-L., Leutenegger, F., & Forget, A. (2007). L'accès aux pratiques de fabrication de traces scripturales convenues au commencement de la forme scolaire : interrogation théoriques et épistémologiques. *Éducation & Didactique*, 1(2) 9-35.
- Schwartz, O. (1993). *L'empirisme irréductible* (postface à l'édition française de N. Anderson). Paris : Nathan.

- Sensevy, G. (1994). Institution didactique, régulation, autonomie. Une étude des fractions au cours moyen (Thèse de doctorat). Aix-Marseille université.
- Sensevy, G. (1996). Le temps didactique et la durée de l'élève. Étude d'un cas au cours moyen : Le journal des fractions. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(1), 7-46.
- Sensevy, G. (1998). *Institution didactique : étude et autonomie à l'école élémentaire*. Paris Presses universitaires de France.
- Sensevy, G., & Mercier A. (2007). *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presse universitaire de Rennes.
- Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Élément pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.
- Sensevy, G. (2012). Le jeu comme modèle de l'activité humaine et comme modèle en théorie de l'action conjointe en didactique. Quelques Remarques. Nouvelles perspectives en sciences sociales. *Revue internationale de systémique complexe et études relationnelles*, 7(2), 105-132.
- Sinclair, J., & Coulthard, M. (1975), *Towards an analysis of discourse : the English used by teachers and pupils*. London : Oxford university press.
- Silvy, C. (2010). *Étude à l'aide de la notion du « site mathématique local d'une question », des effets possibles d'une innovation : les restitutions organisées de connaissances dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat S*. (Thèse de doctorat). Aix-Marseille université.
- Silvy, C., & Delcroix, A. (2009). Site mathématique d'un Roc : une nouvelle façon d'interroger un exercice ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 4, 103-122.
- Silvy, C., Delcroix, A., & Mercier, A. (2013). Enquête sur la notion de « Pedagogical content Knowledge » Interrogé à partir du site local d'une question. *Éducation & Didactique*, 7(1), 35-58.
- Wacheux, F. (1996). *Méthodes qualitatives et recherche en gestion*. Paris : Economic.