Mathématiques et sciences humaines

Mathematics and social sciences

190 | Été 2010

Mathématiques discrètes : théories et usages.
Numéro en hommage à Bruno Leclerc

Les treillis de Coxeter

Coxeter lattices

Claude Le Conte de Poly-Barbut et Nathalie Caspard

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/msh/11729>

DOI : 10.4000/msh.11729

ISSN : 1950-6821

Éditeur

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée

Date de publication : 10 mars 2010

Pagination : 41-57

ISSN : 0987-6936

Référence électronique

Claude Le Conte de Poly-Barbut et Nathalie Caspard, « *Les treillis de Coxeter* », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 190 | Été 2010, mis en ligne le 16 octobre 2010, consulté le 23 juillet 2020. URL : <http://journals.openedition.org/msh/11729> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/msh.11729>

LES TREILLIS DE COXETER

Claude LE CONTE DE POLY-BARBUT¹, Nathalie CASPARD²

RÉSUMÉ – *La carrière mathématique de Bruno Leclerc embrasse un très grand nombre de sujets. Parmi ceux-ci on compte les treillis associés aux groupes de Coxeter finis. L’apport majeur de B. Leclerc sur ces objets consiste en la réponse (négative) à une question posée dix ans plus tôt par Björner : les treillis de Coxeter finis sont-ils partitionnables en chaînes symétriques ? Sa preuve repose sur une fine observation des niveaux centraux d’un treillis de Coxeter particulier, traditionnellement désigné par H_3 . Ce papier se propose de présenter cette preuve et de l’accompagner du rappel d’un certain nombre de propriétés fortes des treillis de Coxeter. Les développements effectués dans cet article se restreignent au cas fini.*

MOTS-CLÉS – Groupe de Coxeter, (Partition en) chaînes symétriques, Treillis borné, Treillis de Coxeter

SUMMARY – Coxeter lattices

Bruno Leclerc’s mathematical study covers an important number of different fields. Among them, one finds the lattices associated with finite Coxeter groups. The main contribution of B. Leclerc on this subject consists in the (negative) answer to a question raised ten years earlier by Björner: are finite Coxeter lattices symmetric chain partitionable ? His proof is based on a sharp observation of the central rank-sets of a particular Coxeter lattice traditionally denoted by H_3 . This text proposes a presentation of this proof, together with the recollection of a number of strong properties satisfied by Coxeter lattices. All developments in this paper are limited to the finite case.

KEYWORDS – Bounded lattice, Coxeter group, Coxeter lattice, Symmetric chains (partition)

1. INTRODUCTION

Au cours de l’année universitaire 1989-1990, Bruno présenta un brillant exposé à la Sorbonne, dans le cadre du séminaire animé par le professeur André Lentin. Dans cet exposé – qui donna lieu à publication [Leclerc, 1994] – B. Leclerc répondait à une question posée dans [Björner, 1984] à propos des treillis définis par l’ordre faible sur les groupes de Coxeter finis : peut-on toujours partitionner les éléments d’un treillis de Coxeter en des chaînes toutes symétriques ?

B. Leclerc apporta une réponse négative à cette question en trouvant en le treillis de Coxeter H_3 (l’un des 6 groupes de Coxeter isolés finis et irréductibles) un contre-exemple. Cependant, la propriété est trivialement satisfaite pour le treillis Permutoèdre $Perm_3$ et on a montré à la Figure 3 qu’elle l’est également pour le

¹CAMS, École des Hautes Études en Sciences Sociales, 54 boulevard Raspail, 75006 Paris, barbut@ehess.fr

²Laboratoire d’Algorithmique, Complexité et Logique, Université Paris-Est Créteil, 60 avenue du Général de Gaulle 94010 Créteil, caspard@univ-paris12.fr

Permutoèdre $Perm_4$. B. Leclerc a établi à la main une telle partition sur $Perm_5$ (cf. le Tableau 1 p. 50). La question de savoir si cette propriété est valable pour la famille $(Perm_n)_{n \geq 6}$ reste à ce jour encore un problème ouvert.

FIGURE 1. Dessin de H_3 par Lentin

Ce papier se compose de trois parties. La Section 2 pose ou rappelle un nombre de définitions préliminaires nécessaires, sur les groupes de Coxeter et sur les ordres.

Dans la Section 3, on reprend la preuve du résultat de B. Leclerc : le treillis de Coxeter H_3 n'est pas partitionnable en chaînes symétriques.

Enfin, avec la Section 4, nous passons en revue un nombre de propriétés fortes des treillis de Coxeter avec les références aux articles d'origine pour les preuves. Ces propriétés sont à compter parmi les nombreuses que l'on connaît à ce jour sur ces structures. Pour une présentation plus exhaustive des groupes de Coxeter et des treillis associés, le lecteur pourra se référer par exemple à [Björner, 1984], [Björner et Wachs, 1988], [Humphreys, 1990], [Le Conte de Poly-Barbut, 1994].

2. PRÉLIMINAIRES

DÉFINITION 1. *Un groupe de Coxeter est un groupe W d'élément neutre e et à k générateurs $s_1, \dots, s_k$ soumis uniquement aux propriétés suivantes :*

- Pour tous $i, j \in \{1, \dots, k\}$, il existe un plus petit entier $m_{ij} \geq 2$ tel que $(s_i s_j)^{m_{ij}} = e$, et
- Pour tout $i = 1, \dots, k$, $m_{ii} = 2$ (i.e. $s_i^2 = e$).

L'entier m_{ij} est appelé l'ordre de s_i et s_j .

On appelle système de Coxeter tout couple (W, S) où W est un groupe de Coxeter et $S \subseteq W$ l'ensemble de ses générateurs.

Il existe des groupes de Coxeter finis et infinis. Un groupe de Coxeter fini est dit *irréductible* s'il n'est pas obtenu comme produit direct d'autres groupes de Coxeter. Les groupes de Coxeter finis irréductibles sont classés (selon les valeurs des ordres des paires de générateurs) en quatre familles infinies et six groupes isolés. Les quatre familles sont notées (A_n) (groupes symétriques), (B_n) , (D_n) et (I_n) (groupes diédraux). Les 6 groupes isolés sont désignés respectivement par E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , H_3 et H_4 et ont respectivement 51840, 2903040, 696729600, 1152, 120 et 14400 éléments.

Pour tout système de Coxeter (W, S) , on définit son *graphe de Cayley à droite* comme le graphe non orienté $G_W = (W, E)$ défini sur les éléments de W et où l'arête $\{w, w'\}$ est dans E si $w' = ws$ pour un générateur $s \in S$. Le graphe de Cayley à gauche est défini dualement. Dans ce texte, on utilisera le graphe de Cayley à droite et on parlera simplement du « graphe de Cayley ».

La *longueur* $\ell(w)$ de l'élément $w \in W$ est le plus petit entier r tel que w soit le produit de r éléments de S (ce que l'on appelle une *décomposition réduite* de w). Tout groupe de Coxeter fini admet un unique élément de longueur minimum (égal à e) et un unique élément de longueur maximum.

Si l'on définit la fonction d sur W^2 par $d(w, w') = \ell(w^{-1}w')$, alors d est une distance sur W . En effet, $d(w, w') = 0 = \ell(e)$ si et seulement si $w = w'$, et la symétrie et la condition d'inégalité triangulaire sont satisfaites.

On peut orienter le graphe de Cayley G_W d'un système de Coxeter (W, S) selon les longueurs croissantes des éléments. Si donc on oriente l'arête $\{w, w'\}$ de G_W en l'arc (w, w') lorsque $\ell(w) < \ell(w')$, on obtient une version orientée du graphe de Cayley à droite de W , que l'on note $\vec{G}_W$.

Tout système de Coxeter admet un ensemble d'éléments remarquables par leur propriétés, que l'on appelle les *réflexions* (parfois aussi les *miroirs*) du groupe. Cette terminologie se justifie par les propriétés fortes qu'ils vérifient lorsque l'on considère les groupes de Coxeter sous un angle géométrique.

DÉFINITION 2. Soit (W, S) un système de Coxeter. Les éléments de l'ensemble $T_{W,S} = \{t \in W : \exists s \in S, \exists w \in W \text{ tels que } t = wsw^{-1}\}$ sont appelés les réflexions de (W, S) .

Ces éléments sont les conjugués des générateurs de W et sont par conséquent d'ordre 2. Il existe deux manières utiles d'étiqueter les arêtes du graphe de Cayley d'un système de Coxeter (W, S) . La première consiste à étiqueter chaque arête par un générateur : l'arête $\{w, w'\}$ reçoit l'étiquette s si $w' = ws$ et l'on parle alors

de *g-étiquetage* ou d'*étiquetage générateur*. La seconde utilise les réflexions : si $w' = ws$, l'arête $\{w, w'\}$ est étiquetée par la réflexion $t = wsw^{-1}$. On parle en ce cas de *r-étiquetage* ou d'*étiquetage réflexion*.

Remarque. Il est intéressant de noter la propriété forte suivante des groupes de Coxeter : si l'on oriente les arêtes du graphe de Cayley G_W d'un système de Coxeter (W, S) à partir d'un élément w quelconque du groupe et toujours en s'éloignant de w , le graphe orienté ainsi obtenu est isomorphe à $\vec{G}_W$. C'est l'une des manifestations des nombreux types de symétries présentes dans les groupes de Coxeter. En revanche, l'étiquetage générateur (et donc aussi l'étiquetage réflexion) n'est évidemment pas le même dans $\vec{G}_W$ et dans le graphe orienté à partir d'un w quelconque (différent de e).

Soient w, w' deux éléments d'un groupe de Coxeter W . Le *translaté à gauche* (respectivement, *à droite*) de $w \in W$ par $w' \in W$ est l'élément $w'w$ (respectivement, ww') de W . L'opération de translation d'un élément peut naturellement être étendue à celle de translation d'un ensemble $X \subseteq W$ en posant que le translaté à gauche (respectivement, à droite) de X par un élément $w' \in W$ est égal à l'ensemble $w'X = \{w'x : x \in X\}$ (respectivement, $Xw' = \{xw' : x \in X\}$).

La translation à gauche sur un groupe de Coxeter présente de fortes propriétés : entre autres, elle préserve l'étiquetage générateur ainsi que la distance, résultat qui sera d'importance dans la Section 4.

Une relation binaire $\leq$ sur un ensemble X est un *ordre (partiel)* sur X si elle est réflexive (pour tout $x \in X, x \leq x$), antisymétrique (pour tous $x, y \in X, [x \leq y \text{ et } y \leq x] \text{ implique } x = y$) et transitive (pour tous $x, y, z \in X, [x \leq y \text{ et } y \leq z] \text{ implique } x \leq z$). Quand une paire $\{x, y\}$ d'éléments vérifie $x \leq y$, on dit que x et y sont *comparables* et que x est un *minorant* de y . L'ensemble des éléments z vérifiant $x \leq z \leq y$ est l'*intervalle* $[x, y]$. Si x et y sont tels que $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$, il sont dits *incomparables*. Un *ensemble ordonné* est un couple $P = (X, \leq)$ où X est un ensemble et $\leq$ un ordre sur X . La notation $x < y$ signifie $x \leq y$ avec $x \neq y$. En outre, si $x < y$ et qu'il n'existe aucun élément z vérifiant $x < z < y$, on dit que y *couvre* x et l'on note $x \prec y$. La relation $\prec$ associée à une relation d'ordre est appelée sa relation de *couverture*.

Plusieurs relations d'ordre partiel peuvent être définies sur un système de Coxeter. Parmi eux, l'*ordre faible à droite* est exactement la fermeture transitive du graphe orienté $\vec{G}_W$. L'ordre faible à gauche sur W est obtenu de la même manière à partir du graphe de Cayley à gauche de W et les deux ordres faibles à droite et à gauche sont isomorphes. Sauf mention contraire, nous utiliserons toujours l'ordre faible à droite dans ce papier.

DÉFINITION 3. Soit (W, S) un système de Coxeter et H un sous-ensemble de S . Le sous-groupe parabolique W_H est le sous-groupe de W engendré par les éléments de H .

Tout sous-groupe parabolique W_H est également un groupe de Coxeter, qui est toujours un intervalle pour l'ordre faible sur W . En outre, si $H = \{s, s'\}$, le graphe de Cayley de W_H est un polygone à $2m_{ss'}$ éléments et autant d'arêtes.

DÉFINITION 4. Un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est rangé s'il admet une application – appelée un rang – r de X dans l'ensemble ordonné des entiers $\mathbb{N}$ conservant la relation de couverture ($x \prec y$ entraîne $r(y) = r(x) + 1$).

Un rang de P est dit normé si $r(x) = 0$ pour au moins un élément minimal de P .

Tout ensemble ordonné P rangé admet une infinité de rangs (l'addition d'une constante entière à un rang détermine encore un rang) mais admet par définition un unique rang normé dès lors que P est connexe et on assimilera désormais dans le texte les expressions « rang » et « rang normé ». Par ailleurs, la notation $r(P)$ désignera alors la valeur $r(P) = \max_{x \in P} r(x)$ pour r le rang normé de P .

Si P est un ensemble ordonné rangé de rang r et $k \geq 0$ un entier, on pose $N_k = \{x \in P : r(x) = k\}$. Tout N_k non vide est appelé le *niveau* de rang k de P (notons qu'ils forment une partition en antichaînes³ de P). On appelle *nombre de Whitney* (associés à P) les entiers $n_k = |N_k|$, pour tout entier $0 \leq k \leq r(P)$, et l'on pose $\nu(P) = \max_{0 \leq k \leq r(P)} n_k$. Puisque les niveaux sont des antichaînes particulières, on a $\nu(P) \leq \alpha(P)$, où $\alpha(P)$ désigne la *largeur* de P , c'est-à-dire la cardinalité maximum d'une antichaîne de P .

On dit qu'une suite finie $m_0, m_1, \dots, m_q$ d'entiers est *unimodale* si elle est la concaténation d'une suite croissante $m_0 \leq \dots \leq m_p$ et d'une suite décroissante $m_{p+1} \geq \dots \geq m_q$. Un ensemble ordonné rangé P de rang r est *unimodal* si la suite $n_0, \dots, n_k, \dots, n_{r(P)}$ de ses nombres de Whitney est unimodale (les chaînes⁴ et les treillis booléens sont clairement des exemples d'ensembles ordonnés unimodaux).

Un ensemble ordonné P est dit *symétrique*⁵ (*quant aux rangs*) si ses nombres de Whitney vérifient $n_0 = n_{r(P)}, n_1 = n_{r(P)-1}, \dots, n_k = n_{r(P)-k}, \dots$ pour tout $k \leq \frac{r(P)+1}{2}$.

Un ensemble ordonné P est un *inf-demi-treillis* si, pour toute paire $\{x, y\}$ d'éléments de P , l'ensemble des minorants communs à x et y admet un plus grand élément – appelé son infimum et noté $x \wedge y$. Dualelement, P est un *sup-demi-treillis* si, pour toute paire $\{x, y\}$ d'éléments de P , l'ensemble des majorants communs à x et y admet un plus petit élément – appelé son supremum et noté $x \vee y$. Enfin P est un *treillis* si c'est à la fois un inf- et un sup-demi-treillis.

En 1984, Björner publiait un article où il démontrait que l'ordre faible de Bruhat vérifiait nombre de propriétés. Notamment :

THÉORÈME 1 (Björner, 1984). *L'ordre faible de Bruhat défini sur les groupes de Coxeter finis vérifie les propriétés suivantes :*

- *il est rangé,*

³Une *antichaîne* d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est un ensemble d'éléments de P deux à deux incomparables pour $\leq$.

⁴Une *chaîne* d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est un ensemble d'éléments de P deux à deux comparables pour $\leq$. Si X est un tel ensemble, P lui-même est appelé une chaîne.

⁵Il convient de préciser que cette définition est variable selon les auteurs. Contrairement à ce qui est fait dans ce texte, les propriétés d'unimodalité et de symétrie quant aux rangs ne sont pas toujours définies indépendamment l'une de l'autre. Un grand nombre d'auteurs considèrent que la symétrie quant aux rangs n'est vraiment intéressante que lorsqu'elle s'accompagne de l'unimodalité et incorporent par conséquent celle-ci à la définition de celle-là.

- *il est unimodal,*
- *il est symétrique quant aux rangs,*
- *c'est un treillis.*

Dans la suite, et notamment dans la Section 4., la notation T_W désignera toujours le treillis associé à l'ordre faible de Bruhat défini sur le groupe de Coxeter W . On parlera plus simplement du « treillis de Coxeter de W ».

3. LA RÉPONSE À UNE QUESTION DE BJÖRNER

FIGURE 2. Diagramme du treillis T_{H_3}

Au cours de ses recherches sur les treillis de Coxeter finis, Björner a également soulevé la question de savoir si ces derniers étaient « partitionnables en chaînes symétriques ». Commençons par rappeler la définition de cette propriété.

DÉFINITION 5. Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné rangé et $C = x_0 x_1 \dots x_p$ une chaîne de P .

- C est couvrante si $x_0 \prec x_1 \prec \dots \prec x_p$, avec $\prec$ la relation de couverture sur P associée à $\leq$,

- C est symétrique si elle est couvrante et si $r(\max C) + r(\min C) = r(P)$, où $\max C$ et $\min C$ sont respectivement le plus grand élément et le plus petit élément de C ,
- P est dit partitionnable en chaînes symétriques si on peut partitionner l'ensemble de ses éléments en chaînes toutes symétriques. Nous notons (SYM) cette propriété.

Il est clair que le produit direct de deux ensembles ordonnés rangés satisfaisant (SYM) est encore partitionnable en chaînes symétriques. Ainsi tout produit direct de chaînes vérifie-t-il cette propriété. C'est aussi le cas du treillis Permutoèdre sur 4 éléments, comme le démontre la Figure 3.

Comme il est rappelé dans [Leclerc, 1994] (voir aussi l'article de Caspard, dans ce numéro), l'existence d'une partition en chaînes symétriques pour un ensemble ordonné P implique d'autres propriétés fortes de P . Par exemple, un ensemble ordonné vérifiant (SYM) est nécessairement *de Sperner*, c'est-à-dire que le cardinal maximum d'une antichaîne de P est égal au maximum $\nu(P)$ des nombres de Whitney de P . Il vérifie même une propriété plus forte encore, il est *fortement de Sperner*. Un ensemble ordonné P est fortement de Sperner si le cardinal maximum α_q d'une q -antichaîne de P est égal à la somme des q plus grands nombres de Whitney de P (où une q -antichaîne de P est un sous-ensemble A de P vérifiant $|A \cap C| \leq q$, pour toute chaîne C de P).

FIGURE 3. Une partition en chaînes symétriques du treillis $Perm_4$ des permutations sur 4 éléments

La question posée par Björner de l'existence d'une partition en chaînes symétriques pour les treillis de Coxeter finis a réapparu à maintes reprises dans la littérature qui suivit, notamment dans [Grigg, 1988], sans qu'une réponse lui soit offerte. On donne dans le Tableau 1 une partition en 22 chaînes symétriques du treillis Permutoèdre

sur 5 éléments. Chaque ligne du tableau décrit les éléments d'une chaîne, repérée par un numéro et en colonne, on indique les rangs des éléments. Cette partition en chaînes symétriques de $Perm_5$ a été établie par B. Leclerc ; son existence est mentionnée dès 1990 dans [Leclerc, 1990] et la partition est explicitée dans [Leclerc, 1994].

FIGURE 4. Une partition en chaînes symétriques de $Perm_5$

C'est finalement en 1994 que B. Leclerc invalide ce qui était devenu une conjecture. Il trouve au sein du treillis de Coxeter fini irréductible T_{H_3} les éléments de réponse. On désigne par H_3 le groupe de Coxeter fini à 3 générateurs, a , b et c , vérifiant $a^2 = b^2 = c^2 = e$ et $(ab)^3 = (bc)^5 = (ac)^2 = e$. Ce treillis a 120 éléments, sa hauteur est 15 et ses plus grands nombres de Whitney sont $n_6 = n_7 = n_8 = n_9 = 12$ et $n_5 = n_{10} = 11$. Notons, comme le mentionne B. Leclerc, que le graphe de couverture associé au treillis T_{H_3} et donné à la figure 2 est un graphe dont les 180 arêtes correspondent à celles d'un polytope archimédien de $\mathbb{R}^3$. Ce polytope possède 62 faces et, plus précisément, 12 décagones, 20 hexagones et 30 carrés (cf. [Coxeter, 1948, p. 27 à 32]).

La preuve de B. Leclerc repose sur une fine observation des niveaux N_5 à N_{10} du treillis T_{H_3} ; dans cette zone, il met en évidence des propriétés locales rendant impossible tout partitionnement en chaînes symétriques du treillis.

THÉORÈME 2 (Leclerc, 1994). *Le treillis T_{H_3} associé au groupe de Coxeter fini H_3 n'est pas partitionnable en chaînes symétriques.*

Preuve. Supposons qu'une partition $\mathcal{P}$ en chaînes symétriques existe pour T_{H_3} et portons dans un premier temps l'attention sur les niveaux de rangs 6 à 9 (observés à la loupe sur la Figure 5), tous de cardinal 12.

FIGURE 5. Zoom sur les niveaux centraux de H_3

Le lecteur pourra vérifier qu'entre deux niveaux consécutifs d'iceux, il existe un unique couplage parfait⁶. Ainsi, la restriction $\mathcal{P}'$ à ces 4 niveaux de la partition $\mathcal{P}$ de T_{H_3} en chaînes symétriques, si cette dernière existe, consiste inévitablement en les 12 chaînes indiquées en gras dans la Figure 5 et formées par ces couplages.

Les niveaux de rangs 5 et 10 ont chacun 11 éléments. Il existe donc exactement une chaîne C_1 de $\mathcal{P}'$ qui ne s'étend pas vers le haut dans $\mathcal{P}$. De même, il existe exactement une chaîne C_2 de $\mathcal{P}'$ qui ne s'étend pas vers le bas dans $\mathcal{P}$. Par définition d'une partition en chaînes symétriques, on doit avoir $C_1 = C_2$. Or, en pointillés, on a représenté les possibilités d'extension vers le haut des chaînes numérotées 8 à 12 et on constate qu'il n'y a que 4 possibilités pour l'ensemble de ces 5 chaînes. On a aussi représenté, toujours en pointillés, les possibilités d'extension vers le bas des chaînes numérotées 1 à 5 et là encore il n'y a que 4 possibilités. Ainsi C_1 est forcément l'une des chaînes numérotées 8 à 12 alors que C_2 est forcément l'une des chaînes numérotées 1 à 5. Elles ne peuvent coïncider d'où le théorème.

Nous poursuivons cette section sur un second résultat concernant le treillis T_{H_3} et issu du même papier de 1994. B. Leclerc utilise un théorème important de Griggs [Griggs, 1980] caractérisant les ensembles ordonnés fortement de Sperner parmi les ensembles ordonnés rangés unimodaux pour démontrer que, si T_{H_3} n'est pas partitionnable en chaînes symétriques, il est tout de même fortement de Sperner.

Pour énoncer ce théorème, il est plus commode de renommer les niveaux N_k d'un ensemble ordonné rangé P selon leurs cardinalités décroissantes (et arbitrairement pour les niveaux de même taille) : les niveaux de P sont dans ce cas notés $V_1, V_2, \dots, V_{r(P)+1}$, de cardinalités respectives $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{r(P)+1}$ de sorte que $\nu(P) = \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_{r(P)+1}$. Avec ces notations, le théorème de Griggs s'exprime comme suit :

THÉORÈME 3 (Griggs, 1980). *Soit P un ensemble ordonné rangé P unimodal. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. P est fortement de Sperner,

⁶Un *couplage parfait* dans un graphe ayant un nombre pair $2n$ de sommets est un sous-ensemble de n arêtes deux-à-deux disjointes du graphe, de sorte que chaque sommet du graphe est incident à exactement une arête du couplage.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	12345	21345	23145	23415	24315	42315	43215	43251	43521	45321	54321
2		12435	21435	24135	42135	42153	42513	45213	54213	54231	
3		13245	31245	31425	34125	34215	34251	34521	35421	53421	
4		12354	13254	13524	31524	35124	53124	53142	53412	54312	
5			14235	41235	41325	43125	43152	43512	45312		
6			13425	14325	14352	41352	41532	45132	54132		
7			12453	21453	24153	24513	24531	42531	45231		
8			21354	23154	23514	25314	25341	25431	52431		
9			12534	21534	25134	52134	52314	52341	53241		
10				32145	32415	32451	32541	35241			
11				14253	41253	41523	45123	54123			
12				13452	31452	34152	34512	35412			
13				31254	32154	32514	35214	53214			
14				12543	21543	25143	25413	52413			
15				15234	15324	15342	15432	51432			
16					23451	24351	42351				
17					14523	15423	51423				
18					13542	31542	35142				
19					15243	51243	52143				
20					51234	51324	51342				
21						14532					
22						23541					

Table 1. Liste des 22 chaînes symétriques partitionnant le treillis $Perm_5$

2. P vérifie la condition suivante⁷ (DC) : pour tout $k = 2, \dots, r(P) + 1$, il existe ν_k chaînes disjointes de P ayant une intersection avec tous les niveaux $V_1, \dots, V_k$.

COROLLAIRE 1 (Leclerc, 1994). *Le treillis associé au groupe de Coxeter fini H_3 est fortement de Sperner.*

Preuve. On montre que T_{H_3} vérifie la condition (DC).

Pour $k \leq 4$, des ensembles de chaînes respectant les termes de la condition (DC) sont constitués par les 12 chaînes données en gras dans la Figure 5.

On considère ensuite l'ensemble B constitué des 4 éléments encadrés dans le dessin de la Figure 5. Leclerc met alors en évidence l'existence d'une partition Π en chaînes symétriques du sous-ensemble ordonné $T_{H_3} \setminus B$ et vérifie que la partie adéquate de cette partition Π offre un ensemble de chaînes symétriques pour les cas $5 \leq k \leq r(P) + 1$.

Un ensemble ordonné rangé, symétrique quant aux rangs, unimodal et fortement de Sperner est dit « de Peck »⁸. Ainsi T_{H_3} est-il un ensemble ordonné de Peck, et

⁷La notation (DC) viendrait de [Griggs, 1980] et signifie « disjoint chains ».

⁸G.W. Peck est en réalité un pseudonyme utilisé pour la première fois comme nom d'auteur officiel du papier [Peck, 1979]. Le pseudonyme est construit à partir des initiales des 6 vrais auteurs de cet article, à savoir Ronald Graham, Douglas West, George B. Purdy, Paul Erdős, Fan Chung et Daniel Kleitman. D'après Wikipédia, le nom de Peck est apparu à ce jour sur quelque 16 publications, parfois comme pseudonyme pour le seul Kleitman. Ce serait le grand combinatoricien Richard P. Stanley qui aurait – en référence à G.W. Peck – défini les ensembles ordonnés de Peck comme les ensembles ordonnés rangés, symétriques quant aux rangs, unimodaux et fortement de

la conjecture selon laquelle tous les treillis de Coxeter finis le seraient reste toujours à vérifier.

Pour terminer cette section, ajoutons que dans [Le Conte de Poly-Barbut, 1990], l'auteur démontre que le treillis Permutoèdre $Perm_n$ est un sous-ordre couvrant – et qui conserve les mêmes niveaux – du treillis produit de chaînes $\underline{2} \times \underline{3} \times \dots \times \underline{n}$ où, pour tout $i \leq n$, $\underline{i}$ désigne une chaîne à i éléments. B. Leclerc utilise ce résultat pour dénombrer par un biais nouveau les cardinalités des niveaux des treillis $Perm_n$ [Leclerc, 1990].

4. D'AUTRES PROPRIÉTÉS IMPORTANTES DES TREILLIS DE COXETER

Soit (W, S) un système de Coxeter et W_H le sous-groupe parabolique de W engendré par $H = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq S$. Soit $x \in W$ tel qu'il existe k éléments $y_1, \dots, y_k$ vérifiant $y_i = xs_i$ et $\ell(x) = \ell(y_i) - 1$ pour tout $i = 1, \dots, k$. L'intervalle $[x, \bigvee_{i=1}^k y_i]$ est appelé *une classe de Lagrange* – ou encore *un coset* – *de W par W_H* et l'ensemble des plus petits éléments des cosets de W par W_H est appelé le *quotient* de W par W_H . On a le résultat suivant :

PROPOSITION 1. *L'intervalle $[x, \bigvee_{i=1}^k y_i]$ est isomorphe à T_{W_H} (pour l'ordre) et préserve l'étiquetage générateur ; de plus, l'ensemble de tous les cosets de W par W_H constitue une partition du treillis T_W en intervalles isomorphes pour l'ordre et l'étiquetage générateur.*

En termes de graphes, l'ensemble des classes de Lagrange du groupe de Coxeter W par le sous-groupe parabolique W_H forme un pavage du graphe de Cayley G_W de W .

Tout sous-groupe parabolique W_H est un groupe de Coxeter engendré par H , les arêtes de son graphe de Cayley sont par conséquent g -étiquetées par les éléments de H . En particulier, si $H = \{s, s'\}$, l'intervalle $W_{\{s, s'\}}$ est un polygone et ses arêtes sont alternativement g -étiquetées par s et s' .

De plus, puisque l'étiquetage générateur est préservé par passage d'un sous-groupe parabolique à ses classes de Lagrange, il est simple de constater que si l'on considère deux arêtes e et e' consécutives dans le graphe de Cayley G_W d'un système de Coxeter (W, S) , et si e et e' sont g -étiquetées par s et s' respectivement, alors il existe une classe de Lagrange de W par $W_{\{s, s'\}}$ qui passe par ces deux arêtes, et dont les arêtes sont alternativement g -étiquetées par s et s' .

La propriété suivante est une autre illustration intéressante de la traduction sous l'angle combinatoire de propriétés algébriques des groupes de Coxeter finis.

PROPOSITION 2. *Soit W un groupe de Coxeter, G_W son graphe de Cayley et $x, y \in W$. L'ensemble de toutes les plus courtes chaînes (au sens des graphes) entre x et y dans G_W est isomorphe – pour la distance et l'étiquetage générateur – à l'intervalle $[e, x^{-1}y]$ du treillis T_W .*

Sperner et ce, malgré le fait que la propriété de symétrie quant aux rangs ne soit pas satisfaite par les ensembles ordonnés du papier d'origine [Peck, 1979].

La *semidistributivité* est une propriété algébrique très forte de certains treillis. Un treillis T est semidistributif si, pour tous éléments $x, y, z \in L$, $x \wedge y = x \wedge z$ implique $x \wedge y = x \wedge (y \vee z)$, et $x \vee y = x \vee z$ implique $x \vee y = x \vee (y \wedge z)$.

THÉORÈME 4 (Le Conte de Poly-Barbut, 1994). *Tout treillis de Coxeter est semidistributif.*

Notons que, la même année et de façon indépendante, Duquenne et Cherfouh prouvaient par une approche différente la semidistributivité des treillis Permutoèdre [Duquenne et Cherfouh, 1994].

La semidistributivité généralise la distributivité. Dans [Le Conte de Poly-Barbut, 1994] l'auteur remarque que, si tous les treillis de Coxeter finis sont semidistributifs, aucun n'est distributif à l'exception des treillis booléens (qui sont des treillis de Coxeter non irréductibles).

Les treillis semidistributifs généralisent également une autre classe de treillis, dits *bornés*. Un treillis est borné s'il peut être obtenu à partir du treillis $\underline{2} = (\{0 < 1, \leq\})$ par un nombre fini de *duplications* d'intervalles. La duplication est une opération introduite dans [Day, 1970] dans le cadre du problème des mots dans les treillis. Cette opération s'applique à un treillis T et un intervalle I de T et construit un nouveau treillis $T' = T[I]$ en remplaçant I dans T par son produit direct $I' = I \times \underline{2}$. Nous donnons ci-dessous la définition formelle de l'opération de duplication d'intervalle.

DÉFINITION 6. Soit $T = (X, \leq)$ un treillis et $I \subseteq T$ un intervalle de T . On note $\underline{2} = (\{0 < 1\}, \leq)$ la chaîne à 2 éléments. Le treillis résultat de la duplication de l'intervalle I dans T – noté $T' = T[I]$ – est défini sur l'ensemble $(T \setminus I) + (I \times \underline{2})$ et son ordre est défini comme suit:

$$x' \leq' y' \iff \begin{cases} x', y' \in T \setminus I \text{ et } x' \leq y', \text{ ou} \\ x' \in T \setminus I, y' = yi \in I \times \underline{2} \text{ et } x' \leq y, \text{ ou} \\ x' = xi \in I \times \underline{2}, y' \in T \setminus I \text{ et } x \leq y', \text{ ou} \\ x' = xi \in I \times \underline{2}, y' = yj \in I \times \underline{2}, x \leq y \text{ et } i \leq j \text{ dans } \underline{2}. \end{cases}$$

FIGURE 6. Duplication d'un intervalle I dans un treillis T

Cette construction a trouvé de nombreuses applications dans l'étude des treillis finis, des treillis libres et des variétés. Les opérations de supremum et d'infimum sont trivialement préservées par la duplication d'intervalle, de sorte que $T' = T[C]$ est bien un treillis lorsque T l'est, mais il est évident que la duplication peut être appliquée plus généralement à un ensemble ordonné quelconque.

L'opération de duplication a été en outre étendue à la duplication d'ensembles *convexes*⁹ — voir [Day, 1994], [Geyer, 1994] et [Bertet et Caspard, 2002] pour des développements sur ce sujet.

DÉFINITION 7. *Un treillis T est borné si T est réduit à un élément unique ou s'il existe une séquence $\underline{2} = T_1, \dots, T_i, \dots, T_{k-1}, T_k = T$ de treillis et une suite $I_1, \dots, I_i, \dots, I_{k-1}$ tels que, pour tout $i < k$, I_i est un intervalle de T_i et $T_{i+1} = T_i[I_i]$.*

La définition initiale d'un treillis borné date de 1972 et est due à McKenzie [McKenzie, 1972]. Un treillis T est *borné inférieurement* au sens de McKenzie si tout homomorphisme h d'un treillis finiment engendré L sur le treillis T est tel que pour tout $u \in h(L)$, l'ensemble $\{x \in L : h(x) \geq u\}$ soit vide soit admet un plus petit élément. La notion de treillis *borné supérieurement* est duale et un treillis est *borné* s'il est borné inférieurement et supérieurement. Quelques années plus tard, Day démontrait la caractérisation constructive de ces treillis au moyen de la duplication d'intervalle dans les termes donnés à la définition précédente.

THÉORÈME 5 (Caspard, Le Conte de Poly-Barbut, Morvan, 2004). *Tout treillis de Coxeter fini est borné.*

FIGURE 7. Une série de duplications d'intervalles menant à $Perm_3$

Le caractère borné des treillis Permutoèdre avait déjà été démontré dans [Caspard, 2000] suivant une autre caractérisation des treillis bornés au moyen des « relations flèches » et de la « table fléchée ».

Dans [Caspard, Le Conte de Poly-Barbut et Morvan, 2004] on trouve en outre la preuve du résultat suivant :

THÉORÈME 6. *Soit T_W un treillis de Coxeter fini. Pour tout sous-groupe parabolique W_H de W , il existe une suite de duplications d'intervalles depuis le treillis $\underline{2}$ jusqu'à T_W qui passe par le treillis de Coxeter T_{W_H} associé à W_H .*

Ce théorème a donc le joli corollaire suivant :

⁹Un ensemble $C \subseteq X$ est dit *convexe* dans un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ si, pour tous x, y de C vérifiant $x \leq y$, on a $[x, y] \subseteq C$.

COROLLAIRE 2. Soient W_n un groupe de Coxeter engendré par n générateurs et T_{W_n} son treillis associé. Il existe une suite de duplications d'intervalles depuis le treillis $\underline{2}$ jusqu'à T_{W_n} qui passe par tous les treillis de Coxeter T_{W_i} (pour $i \leq n$) associés aux groupes de Coxeter de la même famille que W_n et générés par $i \leq n$ générateurs.

Ceci est valable également pour les treillis de Coxeter T_{E_6} , T_{E_7} et T_{E_8} d'une part, et pour les treillis T_{H_3} et T_{H_4} d'autre part.

FIGURE 8. (a) Les classes de Glivenko dans $Perm_4$ (en gras) et (b) le sous-treillis de ses inf-pseudocompléments (éléments cerclés)

Soit T un treillis de plus petit élément 0 et de plus grand élément 1, et soit $t \in T$. Quand il existe, l'*inf-pseudocomplément* de t est le plus grand des éléments x tels que $x \wedge t = 0$. Le treillis T est dit *inférieurement pseudocomplémenté* (IPC) si chacun de ses éléments a un inf-pseudocomplément. Les définitions d'un sup-pseudocomplément et d'un treillis supérieurement pseudocomplémenté (SPC) s'obtiennent dualement. Un treillis est dit *pseudocomplémenté* s'il est à la fois IPC et SPC. Dans [Chameni-Nembua et Monjardet, 1992] les auteurs établissent un nombre de résultats sur ces treillis ; ils y notent aussi que, dans la littérature sur les treillis, le terme « pseudocomplémenté » est souvent utilisé pour « inférieurement pseudocomplémenté » et qu'un treillis pseudocomplémenté au sens où il a été défini ci-avant est souvent appelé (en anglais) « double p -lattice ».

Les treillis de Coxeter sont pseudocomplémentés et complémentés, ce qui leur confère une structure bien particulière. Dans les treillis T inférieurement pseudocomplémentés, l'ensemble $g(T) = \{g(x) : x \in T\}$ de tous les inf-pseudocompléments de T est un treillis booléen. L'équivalence Π définie sur T par $x \Pi y$ si $g(x) = g(y)$ (x et y ont même inf-pseudocomplément) est une congruence sur T , appelée *congruence de Glivenko* et dont les classes d'équivalence sont appelées *classes de Glivenko* de T . Le quotient T/Π est un treillis booléen isomorphe à $g(T)$. De manière générale, ce treillis n'est pas nécessairement un sous-treillis de T , cependant Le Conte de Poly-Barbut a démontré, entre autres, que c'était le cas dans les treillis de Coxeter finis.

PROPOSITION 3 (Le Conte de Poly-Barbut, 1994). *Soit (W, S) un système de Coxeter et T_W son treillis.*

(1) *L'ensemble des inf-pseudocompléments de T_W forme un sous-treillis de T_W , isomorphe au treillis booléen $\underline{2}^n$ (avec n le cardinal de S).*

(2) *Soient G_1 et G_2 deux classes de Glivenko de T_W telles qu'il existe $w_1 \in G_1$ et $w_2 \in G_2$ avec $w_1 \prec w_2$ dans T_W . Soit t la réflexion qui étiquette le couple (w_1, w_2) . Alors tous les couples (x, y) vérifiant $x \in G_1$, $y \in G_2$ et $x \prec y$ dans T_W sont également r -étiquetés par t .*

Cette réflexion est égale à l'unique générateur $s \in S$ qui est inférieur aux éléments de G_2 mais pas aux éléments de G_1 .

5. BONUS

Le lecteur trouvera p. 57 un kit de construction du H_3 à découper et monter soi-même. En outre, s'il oriente les arêtes à partir d'un sommet quelconque du H_3 (cf. la Remarque p. 44), il pourra chercher à repérer dans le treillis construit les niveaux utilisés par B. Leclerc dans la preuve de son théorème et représentés dans la Figure 5.

BIBLIOGRAPHIE

- BERTET K., CASPARD N. (2002), "Doubling convex sets in lattices: characterizations and recognition algorithms", *Order* 19(2), p. 181-207.
- BJÖRNER A. (1984), "Orderings of Coxeter groups", C. Greene (ed.), *Combinatorics and Algebra, Contemporary Mathematics* 34, Providence (R.I.), American Mathematical Society, p. 175-195.
- BJÖRNER A., WACHS M.L. (1988), "Generalized quotients in Coxeter groups", *Transactions of the American Mathematical Society* 308, p. 1-37.
- CASPARD N. (2000), "The lattice of permutations is bounded", *International Journal of Algebra and Computation* 10(4), p. 481-489.
- CASPARD N. (2010), « Des chaînes et des antichaînes dans les ensembles ordonnés finis », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* 190, p. 19-38.
- CASPARD N., LE CONTE DE POLY-BARBUT C., MORVAN M., (2004), "Cayley lattices of finite Coxeter groups are bounded", *Advances in Applied Mathematics* 33(1), p. 71-94.
- CHAMENI-NEMBUA C., MONJARDET B. (1992), « Les treillis pseudocomplémentés finis », *European Journal of Combinatorics* 13, p. 89-107.
- CHAMENI-NEMBUA C., MONJARDET B. (1993), "Finite pseudocomplemented lattices and 'permutoèdre' ", *Discrete Mathematics* 111, p. 105-112.
- COXETER H.M.S. (1970), *Regular polytopes*, London, Methuen.
- DAY A. (1970), "A simple solution to the word problem for lattices", *Canadian Mathematical Bulletin* 13, p. 253-254.
- DAY A. (1979), "Characterizations of finite lattices that are bounded-homomorphic images or sublattices of free lattices", *Canadian Journal of Mathematics* 31, p. 69-78.
- DAY A. (1994), "Congruence normality: the characterization of the doubling class of convex sets", *Algebra Universalis* 31, p. 397-406.

- DUQUENNE V., CHERFOUH A., (1994), "On permutation lattices", *Mathematics and Social Sciences* 27, p. 73-89.
- GEYER W. (1994), "The generalized doubling construction and formal concept analysis", *Algebra Universalis* 32, p. 341-367.
- GRIGGS J.R. (1980), "On chains and Sperner k -families in ranked posets", *Journal of Combinatorial Theory Series A* 28, p. 156-168.
- GRIGGS J.R. (1988), "Problems on chain partition", *Discrete Mathematics* 72, p. 157-162.
- LECLERC B. (1990), « Sur le nombre d'éléments des niveaux des produits de chaînes et des treillis permutoédres », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* 112, p. 37-48.
- LECLERC B. (1994), "A finite Coxeter group the weak Bruhat order of which is not symmetric chain", *European Journal of Combinatorics* 15, p. 181-185.
- LE CONTE DE POLY-BARBUT C. (1986-1990), Communications personnelles.
- LE CONTE DE POLY-BARBUT C. (1990), « Le diagramme du permutoèdre est intersection des diagrammes de deux produits d'ordres totaux », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* 112, p. 49-53.
- LE CONTE DE POLY-BARBUT C. (1994), « Sur les treillis de Coxeter finis », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* 125, p. 41-57.
- MCKENZIE R. (1972), "Equational bases and non-modular lattice varieties", *Transactions of the American Mathematical Society* 174, p. 1-43.
- PECK G.W. (1979), "Maximum antichains of rectangular arrays", *Journal of Combinatorial Theory Series (A)* 27(3), p. 397-400.

FIGURE 9. Puzzle de construction de H_3 , par Le Conte de Poly-Barbut