



## Quel pouvoir mesure-t-on dans un jeu de vote ?

*What power is measured in a voting game?*

Lawrence Dikko Lambo et Joël Moulen

---



### Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/msh/2821>

DOI : 10.4000/msh.2821

ISSN : 1950-6821

### Éditeur

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

### Édition imprimée

Date de publication : 1 décembre 2000

ISSN : 0987-6936

### Référence électronique

Lawrence Dikko Lambo et Joël Moulen, « Quel pouvoir mesure-t-on dans un jeu de vote ? », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 152 | Hiver 2000, mis en ligne le 10 février 2006, consulté le 23 juillet 2020. URL : <http://journals.openedition.org/msh/2821> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/msh.2821>

---

## QUEL POUVOIR MESURE-T-ON DANS UN JEU DE VOTE ?

Lawrence DIFFO LAMBO\* et Joël MOULEN†

**RÉSUMÉ** – *Plusieurs théories de pouvoir a priori ont été introduites dans les jeux de vote. Sans être exhaustif, on peut citer : l'indice de Shapley-Shubik, l'indice absolu de Banzhaf-Coleman et la relation d'influence de Taylor. Ces théories tentent de comparer les joueurs sur la base du « pouvoir » que chacun détient dans le jeu de vote. Dans cet article, nous voulons cerner la nature du pouvoir dont il s'agit. Pour cela, nous posons a priori que le pouvoir dans un vote doit traduire l'aptitude d'un joueur à influencer le résultat de ce vote. Formalisant ce critère, nous caractérisons les classes de jeux de vote pour lesquelles la relation d'influence de Taylor d'une part, les indices de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman d'autre part, traduisent bien l'aptitude à influencer le résultat du vote.*

**MOTS CLÉS** – Jeu de vote, Jeu simple, Indices de pouvoir, Relation d'influence.

**SUMMARY** – What power is measured in a voting game?

*Several a priori power concepts for voting games are available in the literature. To name only a few, we have the Shapley-Shubik and the Banzhaf-Coleman's power indices, and the Taylor's influence relation. Each of these concepts is an attempt to rank the voters with respect to how much empowered they are. In this paper, we are focused on the true nature of the power modelled by these concepts. We take that true power must traduce the voter's capability of really influencing the result of the election, so as to enforce his personal interest. A formalization of this criterion is presented. Also, a characterization is obtained for voting games in which the Shapley-Shubik and the Banzhaf-Coleman's power indices on the one hand, and the Taylor's influence relation on the other hand actually traduce the voter's capability of enforcing his personal interest in the election.*

**KEYWORDS** – Voting game, Simple game, Power Indices, Influence relation.

## 1 INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, nous désignons par jeu de vote, tout jeu simple monotone sur un ensemble fini  $N$  de joueurs, avec un ensemble fini  $A$  de candidats. Un tel jeu est défini par la donnée d'un ensemble de coalitions gagnantes. La monotonie signifie que tout sur-ensemble d'une coalition gagnante est encore une coalition gagnante. Nous

---

\*Ecole Normale Supérieure, B.P 47 Yaoundé Cameroun.

†B.P. 1069, Yaoundé Cameroun, e-mail : joel.moulen@camnet.cm.

considérons pour ces jeux, le préordre total  $\geq_S$  induit dans l'ensemble des joueurs par l'indice de Shapley-Shubik [10], le préordre total  $\geq_B$  induit par l'indice absolu de Banzhaf-Coleman [1], [6] et la relation d'influence de Taylor [11], [12], [13] notée  $\geq_T$ . On a montré que cette dernière est un sous-préordre de (c'est-à-dire un préordre contenu dans) chacun des deux préordres  $\geq_S$  et  $\geq_B$  [5], [8] ou [4]. Ces préordres sont autant de théories de pouvoir qui tentent de comparer les joueurs sur la base du « pouvoir » que chacun détient dans le vote. L'objet de la présente étude est de cerner la nature de ce pouvoir.

Dans un livre récent, Brams [2] (1994, p. 154) écrit ceci : *Although a central, if not the central, concept in the field of political science and international relations, power has proved to be an elusive concept indeed, even at a purely theoretical level.* Analysant des notions de pouvoir qui conduisent dans certains votes à la situation paradoxale qu'un joueur est mieux quand c'est son adversaire qui détient le pouvoir que lorsqu'il le détient lui-même, Brams ajoute (p. 123) : *In my opinion, such reversals cast doubt on the usefulness of staying and holding power as concepts that explain why players, because of their special prerogatives, prevail in situations of conflict. If a prerogative may be a liability, degrading the ability of a player to induce the outcomes it prefers, it seems contradictory to call it power.*

Nous posons *a priori* que *le pouvoir dans un vote doit traduire l'aptitude d'un joueur à influencer le résultat de ce vote.* On pense tout naturellement que ce résultat dépend, entre autres, de la procédure électorale et des préférences des électeurs. Or les théories de pouvoir élaborées jusqu'ici sont des théories *a priori* qui ne prennent en compte que la structure des coalitions gagnantes. Parviennent-elles malgré tout à cerner l'aptitude à influencer le résultat du vote ? C'est la question à laquelle nous voulons apporter un début de réponse.

Nous avons choisi dans ce papier d'examiner de ce point de vue trois notions de pouvoir : l'indice de Shapley-Shubik, l'indice absolu de Banzhaf-Coleman et la relation d'influence de Taylor. À propos de chacune de ces notions, nous nous demandons si elle traduit l'aptitude d'un électeur à influencer le résultat du vote. Mais la réponse à cette question dépend bien évidemment du sens donné à l'expression « résultat du vote ». Nous nous plaçons donc successivement dans deux optiques.

Dans un premier temps, nous considérons le vote comme une simple procédure d'agrégation des préférences, qui, à partir des préférences individuelles des électeurs, construit la préférence collective ou sociale. Voter pour un électeur consiste à déclarer ses préférences sur l'ensemble des candidats. Le résultat du vote est alors la préférence collective associée par la procédure d'agrégation aux votes des électeurs. Nous supposons que cette préférence collective est la relation de dominance classique du jeu. Notre question fondamentale devient alors : telle notion de pouvoir cerne-t-elle l'aptitude d'un électeur à influencer la formation de la relation de dominance classique du jeu ?

Dans cette optique, nous admettons que l'objectif de chaque électeur est que la relation de dominance du jeu soit aussi rapprochée que possible de ses préférences personnelles. Nous nous donnons une distance dans l'ensemble des relations binaires dans  $A$ . Elle nous permettra de mesurer la distance entre les préférences d'un joueur et

la relation de dominance. La « force » d'un joueur dans un vote est alors son aptitude à « tirer » la relation de dominance vers ses préférences. La comparaison de cette force pour deux joueurs est formalisée par une relation dite de « puissance » que nous définissons dans l'ensemble des joueurs. Nous considérons *a priori* que c'est cette relation de puissance qui traduit, dans un vote, et dans l'optique selon laquelle le résultat du vote est la relation de dominance classique, ce qui mérite d'être appelé pouvoir d'un joueur.

La relation de puissance prend en compte, par l'intermédiaire de la relation de dominance, la structure des coalitions gagnantes, la procédure électorale, l'ensemble des candidats et les préférences des électeurs. Elle diffère donc *a priori* des notions de pouvoir évoquées plus haut, lesquelles sont exclusivement basées sur les caractéristiques structurelles de l'ensemble des coalitions gagnantes du jeu. Les résultats que nous démontrons n'en paraissent que plus surprenants.

Nous montrons en effet que la relation de puissance est identique à la relation d'influence de Taylor pour tout jeu simple monotone et propre. Cela nous permet d'affirmer que la relation d'influence de Taylor cerne bien l'aptitude d'un joueur à influencer le résultat du vote. Pour les indices de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman, nous obtenons le résultat suivant : le préordre total induit dans l'ensemble des joueurs par chacun de ces indices est identique à la relation de puissance si et seulement si le jeu simple est monotone, propre et  $\pi$ -robuste. La  $\pi$ -robustesse est une notion due à Taylor.

La deuxième optique considère que le vote ne se limite pas à la simple construction d'une préférence collective, mais qu'il produit des élus. Le résultat du vote devient alors l'ensemble des candidats dont l'élection peut être « raisonnablement attendue » à l'issue du vote. Un tel ensemble de candidats sera appelé une « notion de solution » du jeu. Cela peut être le cœur du jeu, l'ensemble de stabilité, etc. Nous considérons donc, dans ce deuxième temps, que l'objectif de chaque électeur est d'influencer le plus possible le résultat du vote représenté par une notion de solution du jeu. Prenons par exemple le cœur du jeu. Si on fait varier le profil des préférences individuelles, il en résulte une variation du cœur. Avec un choix judicieux de la variation du profil des préférences individuelles, l'aptitude d'un joueur  $i$  à influencer au moins autant qu'un joueur  $j$  la formation du cœur du jeu se manifeste dans la variation induite au niveau du cœur. Notre question fondamentale reçoit alors la nouvelle formulation suivante : si une notion donnée de pouvoir (par exemple l'indice de Shapley-Shubik) attribue dans un jeu au moins autant de pouvoir à  $i$  qu'à  $j$ , cela signifie-t-il que  $i$  est au moins aussi apte que  $j$  à influencer la formation du cœur du jeu ? S'il en est ainsi, nous considérons que cette notion de pouvoir cerne bien l'aptitude d'un joueur à influencer la formation de la notion de solution concernée.

Après cette introduction, la section 2 est consacrée à quelques définitions et propriétés préliminaires. Dans la section 3, nous étudions le pouvoir d'un votant en supposant que son objectif dans le jeu est que la dominance classique de ce dernier soit aussi proche que possible de sa préférence individuelle. Nous définissons la relation de puissance sous cette hypothèse. Nous obtenons des résultats importants relatifs à la comparaison de cette relation de puissance avec la relation d'influence de Taylor d'une part (Théorème 3.1), et avec les préordres de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman

d'autre part (Corollaire 3.4). La section 4 est consacrée à l'étude du pouvoir lorsque l'objectif de chaque joueur est supposé être la maîtrise de la formation de la solution du jeu. Ici, la relation de puissance fondée sur la distance à la relation de dominance n'est plus disponible, et nous n'en définissons pas de nouvelle. Par contre, nous recourons à diverses manifestations plausibles de l'aptitude d'un joueur  $i$  à influencer au moins autant que le joueur  $j$  la formation d'une notion de solution donnée. Nous considérons tour à tour le cœur classique et l'ensemble de stabilité. Nous montrons (Théorème 4.3, Proposition 4.4, Proposition 4.8, Théorème 4.10 et Théorème 4.11) que chacune de ces manifestations plausibles équivaut à la relation d'influence de Taylor, et en concluons que cette dernière, ici encore, cerne bien l'aptitude à influencer le résultat du vote. En conséquence, et à cause du Théorème de l'équivalence ordinale, la même conclusion vaut pour les indices de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman, sous réserve, cette fois, qu'il s'agisse des jeux simples monotones, propres et  $\pi$ -robustes. La section 5 est consacrée à la conclusion.

## 2 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS PRÉLIMINAIRES

Dans tout ce qui suit,  $N$  désigne l'ensemble fini des joueurs encore appelés électeurs :  $N = \{1, 2, \dots, i, \dots, n\}$ . Toute partie non vide de  $N$  est appelée coalition. On appelle *ensemble des majorités* ou *ensemble des coalitions gagnantes*, tout ensemble  $\mathcal{W}$  non vide de parties non vides de  $N$  vérifiant la propriété suivante dite de monotonie : si  $S$  est une coalition gagnante, toute coalition  $T$  contenant  $S$  est aussi gagnante. Une *coalition gagnante minimale* est une coalition gagnante qui ne contient aucune partie propre qui est une coalition gagnante. Toute coalition qui n'est pas gagnante est dite perdante ou minoritaire.

On appelle *jeu simple* ou *jeu de vote*, tout couple  $(N, \mathcal{W})$  où  $\mathcal{W}$  est un ensemble de majorités sur  $N$ . Un jeu de vote sera interprété comme la formalisation d'une situation de vote où  $N$  est l'ensemble des électeurs. Une coalition gagnante a alors le pouvoir d'imposer à l'ensemble des électeurs toute décision unanimement supportée par ses membres.

Si on désigne par  $A$  l'ensemble fini des candidats encore appelés options, le jeu peut être particularisé par la notation  $G = (N, \mathcal{W}, A)$ .

Nous supposons, comme d'habitude, que les préférences d'un joueur quelconque  $i$  sur l'ensemble des candidats sont données par une relation binaire  $R^i$  sur  $A$ . La partie stricte de  $R^i$  notée  $P^i$  est définie par : pour tous candidats  $x$  et  $y$ ,  $xP^iy$  si  $xR^iy$  et non( $yR^ix$ ). Si  $S$  est un sous-ensemble de  $N$  et si  $x$  et  $y$  sont deux candidats, nous notons :  $xP^Sy$  si et seulement si  $xP^iy$  pour tout  $i$  appartenant à  $S$ . La famille  $(R^i)_{i \in N}$  appelée profil (des préférences) sera notée  $R^N$ . Dans ce travail, nous supposons que  $R^i$  est un ordre total, c'est-à-dire que  $R^i$  est réflexive, transitive, antisymétrique et totale. On a alors  $xP^iy \iff [xR^iy \text{ et } x \neq y]$ .

**DÉFINITION 2.1** *On dit qu'un jeu simple est propre si le complémentaire de toute coalition gagnante est une coalition perdante.*

Nous allons introduire les notions de  $\pi$ -robustesse et de relation d'influence dues à Taylor. Pour cela, définissons l'opération de permutation de deux joueurs entre deux coalitions gagnantes. Elle consiste, à partir de deux coalitions gagnantes  $S$  et  $T$  et deux joueurs  $i$  et  $j$ , à construire deux nouvelles coalitions  $S'$  et  $T'$  par échange (permutation) de  $i$  et  $j$ . Les conditions suivantes doivent être vérifiées :

1.  $S$  et  $T$  sont deux coalitions gagnantes.
2.  $i \in S$  et  $i \notin T$ , alors que  $j \in T$  et  $j \notin S$ .

On pose alors :

1.  $S' = [S \setminus \{i\}] \cup \{j\}$
2.  $T' = [T \setminus \{j\}] \cup \{i\}$

Les nouvelles coalitions ainsi formées peuvent ne pas être gagnantes.

**DÉFINITION 2.2** *On dit que le jeu simple  $(N, \mathcal{W})$  est  $\pi$ -robuste si toute permutation de deux joueurs entre deux coalitions gagnantes  $S$  et  $T$  conduit aux coalitions  $S'$  et  $T'$  dont l'une au moins est une coalition gagnante.*

Dans tout ce papier, le signe  $\subset$  désigne l'inclusion ensembliste au sens large.

**DÉFINITION 2.3** *Soient  $(N, \mathcal{W})$  un jeu simple et  $i$  et  $j$  deux joueurs.*

1) *On dit que  $i$  est au moins aussi influent que  $j$  dans le jeu et on note  $i \geq_T j$ , si  $\forall S \subset N : \{i, j\} \cap S = \emptyset, S \cup \{j\} \in \mathcal{W} \Rightarrow S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ .*

*La relation  $\geq_T$  est appelée relation d'influence de Taylor.*

2) *On dit que  $i$  est strictement plus influent que  $j$ , et on note  $i >_T j$  si  $i \geq_T j$  et  $\text{non}(j \geq_T i)$ .*

3) *On dit que  $i$  et  $j$  sont de même influence et on note  $i \sim_T j$  si  $i \geq_T j$  et  $j \geq_T i$ .*

Taylor (1995) a montré que la relation d'influence de tout jeu simple est un préordre, et que ce préordre est total si et seulement si le jeu est  $\pi$ -robuste.

Rappelons maintenant la définition de l'indice de pouvoir de Shapley-Shubik, et celle de l'indice absolu de Banzhaf-Coleman. Pour cela, au jeu simple  $(N, \mathcal{W})$ , nous associons la fonction caractéristique  $v$  de  $\mathcal{W}$  :  $v$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et  $v(S) = 1 \iff S \in \mathcal{W}$ . Désignons enfin par  $s$ , le cardinal de toute partie  $S$  de  $N$ .

**DÉFINITION 2.4** *Soit  $(N, \mathcal{W})$  un jeu simple.*

1) *L'indice de Shapley-Shubik pour ce jeu est la fonction  $\mu(v)$  qui, à tout joueur  $i \in N$ , associe le nombre  $\mu_i(v)$  défini par :*

$$\mu_i(v) = \frac{\sum_{S \subset N} (s-1)!(n-s)[v(S) - v(S \setminus \{i\})]}{n!}$$

2) L'indice absolu de Banzhaf-Coleman pour ce jeu est la fonction  $\eta(v)$  qui, à tout joueur  $i \in N$ , associe le nombre  $\eta_i(v)$  défini par :

$$\eta_i(v) = \frac{\sum_{S \subset N} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]}{2^{n-1}}$$

À toute fonction numérique  $u$  définie sur  $N$ , on associe un préordre total sur  $N$  noté  $\geq_u$  et défini par :  $i \geq_u j \iff u(i) \geq u(j)$ . Nous associons ainsi aux indices de pouvoir de Shapley-Shubik et Banzhaf-Coleman les préordres totaux respectivement notés  $\geq_S$  et  $\geq_B$ .

Rappelons qu'une procédure d'agrégation des préférences individuelles est une application  $f$  qui, à tout profil de préférences individuelles  $R^N$ , associe la préférence collective  $f(R^N)$ . Dans le cadre d'un jeu de vote, l'opération qui consiste à construire la relation de dominance classique à partir des préférences des électeurs est un exemple de procédure d'agrégation.

Considérons une procédure d'agrégation quelconque  $f$ , et une distance quelconque  $d$  sur l'ensemble des relations binaires sur  $A$ . La distance  $d$  nous permettra, étant donné un profil de préférences individuelles  $R^N$ , de situer les préférences  $R^i$  de l'électeur  $i$  par rapport à la préférence collective associée à  $R^N$ .

Soit  $R^N$  un profil de préférences. Si  $i$  est un électeur, le nombre  $d(f(R^N), R^i)$  mesure la distance entre les préférences de  $i$  et la préférence collective  $f(R^N)$  associée à  $R^N$  par  $f$ . L'objectif de  $i$  est de rapprocher le plus possible la préférence collective de ses préférences personnelles. Cependant, plusieurs choses contribuent à la détermination du nombre  $d(f(R^N), R^i)$ . On peut citer par exemple :

– le « pouvoir réel » dont dispose  $i$  dans le jeu. En effet, si  $i$  est le dictateur (voir plus bas), ce nombre est toujours nul ;

– la configuration générale de l'ensemble des préférences individuelles. Par exemple, si dans  $R^N$  tous les électeurs ont la même préférence, le nombre  $d(f(R^N), R^i)$  est nul. Si le jeu a un dictateur  $i_0 \neq i$  et que les préférences de  $i$  coïncident fortuitement avec celles du dictateur, ce nombre est nul indépendamment du pouvoir réel de  $i$ .

Or ce qui nous intéresse, c'est de comparer deux joueurs  $i$  et  $j$  sur la base de leur efficacité relative à travers l'ensemble des profils d'ordres totaux. Pour une telle comparaison, il est nécessaire de placer  $i$  et  $j$  dans des *conditions similaires*. Cela consistera pour nous à prendre un profil de préférences  $R^N$  où les préférences de  $i$  sont données par  $R^i$  et celles de  $j$  par  $R^j$ , et à calculer  $d(f(R^N), R^j)$ . Puis, conservant les préférences des joueurs autres que  $i$  et  $j$  inchangées, à permuter les préférences de  $i$  et  $j$ . On obtient ainsi un nouveau profil de préférences noté  $R_{i,j}^N$ .

Plus formellement, si  $R^N$  est un profil de préférences et si  $i$  et  $j$  sont deux électeurs, on pose :

$$R^N = (R^1, \dots, R^{i-1}, R^i, R^{i+1}, \dots, R^{j-1}, R^j, R^{j+1}, \dots, R^n)$$

$$R_{i,j}^N = (R^1, \dots, R^{i-1}, R^j, R^{i+1}, \dots, R^{j-1}, R^i, R^{j+1}, \dots, R^n)$$

La quantité  $d(f(R^N), R^j)$  mesure la distance de la préférence  $R^j$  à la préférence collective  $f(R^N)$  quand  $R^N$  est le profil. Nous dirons plus rapidement que c'est la distance de  $j$  muni de  $R^j$  à la préférence collective. La quantité  $d(f(R_{ij}^N), R^j)$  est la distance de  $i$  muni de  $R^j$  à la préférence collective  $f(R_{ij}^N)$  quand  $R_{ij}^N$  est le profil.

Le profil  $R_{ij}^N$  conserve globalement  $R^N$ . La configuration des préférences individuelles a été modifiée, mais par simple permutation des préférences de  $i$  et  $j$ . Ainsi, les conditions qui sont celles de  $i$  dans  $R_{ij}^N$ , sont celles de  $j$  dans  $R^N$ . Cela met  $i$  et  $j$  dans des conditions similaires. En conséquence, nous considérons que toute variation du nombre  $d(f(R^N), R^j)$  quand il devient  $d(f(R_{ij}^N), R^j)$  est imputable à la « différence » des pouvoirs réels des joueurs  $i$  et  $j$ .

On suppose que chaque électeur fait tout ce qui est en son pouvoir pour minimiser sa distance à la préférence collective. Les deux nombres  $d(f(R^N), R^j)$  et  $d(f(R_{ij}^N), R^j)$  nous permettent de cerner l'efficacité relative de  $i$  et  $j$  pour le profil  $R^N$ . Lorsque  $R^N$  parcourt l'ensemble des profils d'ordres totaux, l'efficacité relative des deux joueurs est cernée dans le jeu. Elle dépend de la procédure d'agrégation  $f$ . Nous pouvons donner la définition suivante :

**DÉFINITION 2.5** Soient  $(N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple,  $f$  une procédure d'agrégation des préférences et  $i$  et  $j$  deux joueurs.

1) On dit que  $i$  est au moins aussi puissant que  $j$  dans le jeu (pour la procédure  $f$ ) et on note  $i \geq_P j$ , si pour tout profil d'ordres totaux  $R^N$ , on a :

$$d(f(R_{ij}^N), R^j) \leq d(f(R^N), R^j)$$

La relation  $\geq_P$  est appelée relation de puissance (relativement à  $f$ ).

2) On dit que  $i$  est strictement plus puissant que  $j$ , et on note  $i >_P j$  si  $i \geq_P j$  et non( $j \geq_P i$ ).

3) On dit que  $i$  et  $j$  sont de même puissance et on note  $i \sim_P j$  si  $i \geq_P j$  et  $j \geq_P i$ .

La signification intuitive de la relation de puissance découle des explications qui ont précédé sa définition. Il n'a pas été entrepris ici une étude systématique des propriétés de la relation de puissance. Néanmoins, au regard du Théorème 3.1 et des propriétés de la relation d'influence de Taylor, on peut affirmer : si le jeu simple est monotone et propre, et si la procédure d'agrégation des préférences  $f$  est telle que pour tout profil de préférences  $R^N$ ,  $f(R^N)$  est la relation de dominance classique du jeu, alors la relation de puissance est un préordre. Ce préordre est total si et seulement si le jeu est  $\pi$ -robuste. On a l'équivalence suivante :

**LEMME 2.6** Soient  $(N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple et  $f$  une procédure d'agrégation des préférences.

$$d(f(R_{ij}^N), R^j) \leq d(f(R^N), R^j) \text{ pour tout profil } R^N \tag{a}$$

équivalent à

$$d(f(R^N), R^i) \leq d(f(R_{ij}^N), R^i) \text{ pour tout profil } R^N \tag{b}$$

DÉMONSTRATION. Supposons (a) vrai, et écrivons-le pour le profil  $Q^N = R_{ij}^N$ . On a alors  $d(f(Q_{ij}^N), Q^j) \leq d(f(Q^N), Q^j)$ . Or,  $Q_{ij}^N = R^N$  et  $Q^j = R^j$ , d'où (b). La réciproque se démontre de la même manière. •

LEMME 2.7 Soient  $(N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple,  $f$  une procédure d'agrégation des préférences et  $i$  et  $j$  deux électeurs. Les électeurs  $i$  et  $j$  ont même puissance dans le jeu si et seulement si  $d(f(R_{ij}^N), R^j) = d(f(R^N), R^j) \forall R^N$  (3)

DÉMONSTRATION.  $i$  et  $j$  ont même puissance signifie :

$$d(f(R_{ij}^N), R^j) \leq d(f(R^N), R^j) \forall R^N \quad (1)$$

et

$$d(f(R_{ij}^N), R^i) \leq d(f(R^N), R^i) \forall R^N \quad (2)$$

Écrivons (2) pour le profil  $Q^N = R_{ij}^N$  :  $d(f(Q_{ij}^N), Q^i) \leq d(f(Q^N), Q^i)$ . Or  $Q_{ij}^N = R^N$  et  $Q^i = R^j$ , d'où  $d(f(R^N), R^j) \leq d(f(R_{ij}^N), R^j)$  qui, avec (1), donne (3).

Supposons maintenant (3) vrai. On en déduit (1). Or (3) équivaut à l'égalité  $d(f(R_{ij}^N), R^i) = d(f(R^N), R^i) \forall R^N$  qui implique (2), d'où l'équivalence de  $i$  et  $j$ . •

Les électeurs  $i$  et  $j$  sont incomparables par la relation de puissance s'il existe deux profils  $R^N$  et  $Q^N$  tels que

$$d(f(R_{ij}^N), R^j) < d(f(R^N), R^j) \text{ et } d(f(Q_{ij}^N), Q^j) > d(f(Q^N), Q^j)$$

Si  $f$  est une procédure d'agrégation des préférences individuelles des agents de  $N$  sur l'ensemble des candidats  $A$ , on dit que l'agent  $i_0$  est dictateur dans  $(N, A, f)$ , si pour tout profil  $R^N$ ,  $f(R^N) = R^{i_0}$ .

Les propriétés suivantes sont évidentes :

- 1) Si  $i_0$  est dictateur dans  $(N, A, f)$ , alors pour tout  $j \neq i_0$ ,  $i_0$  est strictement plus puissant que  $j$ .
- 2) Si  $i_0$  est dictateur dans  $(N, A, f)$ , alors pour tous  $i$  et  $j$  différents de  $i_0$ ,  $i$  et  $j$  sont de même puissance dans  $(N, A, f)$ .
- 3) Deux joueurs  $i$  et  $j$  sont dits interchangeable dans  $(N, A, f)$  si pour tout profil  $R^N$ , on a  $f(R^N) = f(R_{ij}^N)$ . Si  $i$  et  $j$  sont interchangeables, alors  $i$  et  $j$  sont de même puissance.

Les propriétés qui précèdent sont naturelles. Elles confirment en particulier l'idée intuitive selon laquelle si un jeu comporte un dictateur, ce dernier détient la totalité du pouvoir, tous les autres électeurs sont alors équivalents dans leur totale impuissance.

Dans la section suivante, nous comparons la relation de puissance (relativement à la relation de dominance classique du jeu) avec quelques notions classiques de pouvoir.

### 3 POUVOIR ET DOMINANCE CLASSIQUE

Considérons un jeu simple  $G = (N, A, \mathcal{W})$ . Pour ce jeu, l'indice de pouvoir de Shapley-Shubik induit dans  $N$  le préordre noté  $\geq_S$  qui compare les joueurs en fonction des pouvoirs que leur attribue cet indice. De même, nous avons  $\geq_B$  le préordre induit dans  $N$  par l'indice absolu de Banzhaf-Coleman, et  $\geq_T$  la relation d'influence de Taylor pour le jeu  $G$ . Nous supposons dans tout ce qui suit que la procédure de construction de la préférence collective à partir d'un profil de préférences individuelles est celle, notée  $D$ , qui conduit à la relation de dominance classique. Rappelons que la dominance classique d'un jeu simple est définie pour tout profil  $R^N$  par :  $x$  domine  $y$  pour  $R^N$  noté  $x D(R^N) y$  s'il existe une coalition gagnante  $S$  telle que  $x P^i y$  pour tout joueur  $i$  appartenant à  $S$ . On dit alors que  $y$  est dominé (par  $x$ ) dans  $(N, A, \mathcal{W}, R^N)$  via  $S$ .

Nous considérons dans l'ensemble des relations binaires dans  $A$  la distance  $d$  de la différence symétrique définie par :

$$d(R, R') = |\{(x, y) / [x R y \text{ et non}(x R' y)] \text{ ou } [x R' y \text{ et non}(x R y)]\}|$$

Ce choix particulier de  $d$  précise la relation de puissance (Définition 2.5). Nous voulons voir si les trois préordres de pouvoir retenus dans cette étude cernent bien l'aptitude à influencer le résultat du vote, laquelle aptitude est, pour nous, traduite par la relation de puissance.

Le premier résultat que nous obtenons est le suivant : si le jeu  $G$  est propre et monotone, si les préférences des votants sont des ordres totaux, (c'est-à-dire des relations binaires réflexives, transitives, antisymétriques et totales) et si  $i$  et  $j$  sont deux votants, alors  $i$  est au moins aussi influent que  $j$  (au sens de Taylor) si et seulement si  $i$  est au moins aussi puissant que  $j$ . Cela traduit l'équivalence des deux notions pour tout jeu simple monotone et propre. Ce résultat est d'autant plus intéressant que, contrairement à la relation de puissance, la relation d'influence de Taylor est, quant à elle, *a priori* définie indépendamment des candidats et du mode d'agrégation conduisant des préférences individuelles à la préférence collective.

Au vu de ce résultat, et sous les hypothèses retenues, on peut affirmer : la relation d'influence de Taylor traduit parfaitement l'aptitude d'un votant à influencer la formation de la dominance classique dans tout jeu simple propre et monotone.

Dans ce qui suit, si  $R^N$  est un profil de préférences et si  $i, j$  et  $k$  sont des votants, nous notons  $R_{ij}^k$  la préférence de  $k$  dans le profil  $R_{ij}^N$ , et  $P_{ij}^k$  la partie stricte de cette préférence.

Le résultat annoncé s'énonce ainsi qu'il suit :

**THÉORÈME 3.1** *Si le jeu simple  $G$  est propre et monotone et si les préférences des votants sont des ordres totaux, alors  $[i \geq_P j] \iff [i \geq_T j]$ .*

DEMONSTRATION.

a) Supposons que  $i \geq_T j$ , et soit  $R^N$  un profil d'ordres totaux. Soit  $(x, y)$  un couple de candidats distincts sur lequel  $R_{ij}^i$  et  $D(R_{ij}^N)$  sont en désaccord. Remarquons d'abord que si  $x P_{ij}^S y$  et  $x P^S y$  ont des valeurs de vérité distinctes, alors  $|\{i, j\} \cap S| = 1$ , puis

qu'il est évident que si  $\{i, j\} \cap S \in \{\emptyset, \{i, j\}\}$ , alors  $xP_{ij}^S y \iff xP^S y$ . Or  $R_{ij}^i$  et  $D(R_{ij}^N)$  sont en désaccord sur  $(x, y)$ , d'où deux cas à considérer.

Si  $xR_{ij}^i y$  et (1)  $\text{non}[xD(R_{ij}^N)y]$ , on a  $R_{ij}^i = R^j$ , donc  $xR^j y$ , c'est-à-dire (2)  $xP^j y$ . Supposons  $xD(R^N)y$ , c'est-à-dire qu'il existe une coalition gagnante  $S$  telle que  $xP^S y$ . Ceci avec (1) entraîne (3)  $xP^S y$  et  $\text{non}(xP_{ij}^S y)$ . D'après la remarque du début de cette démonstration,  $|\{i, j\} \cap S| = 1$ . Mais si  $\{i, j\} \cap S = \{i\}$ , alors vu que  $P_{ij}^i = P^j$ ,  $xP^S y$  et  $\text{non}(xP_{ij}^S y)$  impliquent  $\text{non}(xP^j y)$ , contredisant (2). Si  $\{i, j\} \cap S = \{j\}$ , vu que  $i \geq_T j$  et que  $S \in \mathcal{W}$ ,  $[S \setminus \{j\}] \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ . Or  $xP_{ij}^{[S \setminus \{j\}] \cup \{i\}} y$ , ce qui contredit (1). Donc  $\text{non}[xD(R^N)y]$ , et dans ce sous-cas,  $R^j$  et  $D(R^N)$  sont en désaccord sur  $(x, y)$ .

Si  $\text{non}[xR_{ij}^i y]$  et  $xD(R_{ij}^N)y$ , on a  $R_{ij}^i = R^j$ , donc  $\text{non}(xR^j y)$ , c'est-à-dire (4)  $\text{non}(xP^j y)$ . Supposons qu'on ait (5)  $\text{non}(xD(R^N)y)$ . Mais  $xD(R_{ij}^N)y$  donc il existe une coalition gagnante  $S$  telle que  $xP_{ij}^S y$  et  $\text{non}(xD(R^N)y)$  d'où (6)  $xP_{ij}^S y$  et  $\text{non}(xP^S y)$ . D'après la remarque du début,  $|\{i, j\} \cap S| = 1$ . Si  $\{i, j\} \cap S = \{i\}$ , alors vu que  $P_{ij}^i = P^j$ ,  $xP_{ij}^S y$  implique  $(xP^j y)$ , contredisant (4). Si  $\{i, j\} \cap S = \{j\}$ , vu que  $i \geq_T j$  et que  $S \in \mathcal{W}$ , alors (7)  $[S \setminus \{j\}] \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ . Or  $P^{[S \setminus \{j\}] \cup \{i\}} = P_{ij}^{[S \setminus \{j\}]}$ , donc (8)  $xP^{[S \setminus \{j\}]} y$ . De plus,  $P^i = P_{ij}^j$ , donc  $xP_{ij}^S y$  et  $j \in S$  entraîne (9)  $xP^i y$ . De (8) et (9), on déduit que  $xP^{[S \setminus \{j\}] \cup \{i\}} y$ . De (7), on a donc  $xD(R^N)y$ , ce qui contredit (5). Donc  $xD(R^N)y$ , d'où nous concluons que  $R^j$  et  $D(R^N)$  sont en désaccord sur  $(x, y)$ . Donc si  $R_{ij}^i$  et  $D(R_{ij}^N)$  sont en désaccord sur  $(x, y)$ , alors  $R^j$  et  $D(R^N)$  sont en désaccord sur  $(x, y)$ . On déduit que  $\forall R^N, d(R_{ij}^i, D(R_{ij}^N)) \leq d(R^j, D(R^N))$ .

b) Supposons maintenant que  $\forall R^N, d(R_{ij}^i, D(R_{ij}^N)) \leq d(R^j, D(R^N))$ .

Si  $\text{non}[i \geq_T j]$ , il existe  $S \subset N$  tel que  $\{i, j\} \cap S = \emptyset$ ,  $S \cup \{j\} \in \mathcal{W}$  et  $S \cup \{i\} \notin \mathcal{W}$ . Posons  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , et définissons le profil  $R^N$  par: si  $k \in S$ ,  $P^k : x_1 x_2 x_3 \dots x_k$ ,  $P^i : x_2 x_1 x_3 \dots x_k$ ,  $P^j : x_1 x_2 x_3 \dots x_k$ , et pour tout  $k \in N \setminus [S \cup \{i, j\}]$ ,  $P^k : x_2 x_1 x_3 \dots x_k$ . Alors le profil  $R_{ij}^N$  est donné par: si  $k \in S \cup \{i\}$ ,  $P_{ij}^k : x_1 x_2 x_3 \dots x_k$  et pour tout  $k \in N \setminus [S \cup \{i\}]$ ,  $P_{ij}^k : x_2 x_1 x_3 \dots x_k$ .

Si  $R^j$  et  $D(R^N)$  sont en désaccord sur  $(x, y)$ , alors  $(x, y) \in \{(x_2, x_1), (x_1, x_2)\}$ . Comme  $S \cup \{j\}$  est une coalition gagnante, on a  $x_1 D(R^N) x_2$ . Mais  $x_1 P^j x_2$ , donc  $R^j$  et  $D(R^N)$  sont en accord sur  $(x_1, x_2)$ . D'autre part, on a  $\text{non}(x_2 P^j x_1)$  et  $\text{non}(x_2 D(R^N) x_1)$  car  $(x_1 P^j x_2)$  et que le jeu (propre) vérifie  $(x_1 D(R^N) x_2)$ . Donc  $R^j$  et  $D(R^N)$  aussi en accord sur  $(x_2, x_1)$ . Donc,  $d(R^j, D(R^N)) = 0$ . De plus, si  $R_{ij}^i$  et  $D(R_{ij}^N)$  sont en désaccord sur  $(x, y)$ , alors  $(x, y) \in \{(x_2, x_1), (x_2, x_1)\}$ . Or on a  $x_1 P_{ij}^i x_2$ . Ainsi  $x_1 D(R_{ij}^N) x_2$  équivaut à l'existence d'une coalition gagnante  $L$  telle que  $x_1 P_{ij}^L x_2$ . Vu l'expression de  $R_{ij}^N$ , on déduit que  $L \subset S \cup \{i\}$ , ce qui est impossible puisque  $\mathcal{W}$  est monotone et que  $S \cup \{i\} \notin \mathcal{W}$ . Donc  $R_{ij}^i$  et  $D(R_{ij}^N)$  sont en désaccord sur  $(x_1, x_2)$  et on en déduit que  $d(R^j, D(R_{ij}^N)) \neq 0$ . Mais alors  $d(R_{ij}^i, D(R_{ij}^N)) \leq d(R^j, D(R^N))$  est contredit. Donc  $i \geq_T j$  et la proposition est démontrée. •

À l'aide de ce théorème, le résultat suivant peut être démontré, qui établit un lien plus direct entre la relation de puissance et les capacités relatives d'intervention des joueurs dans la formation de la relation de dominance classique.

**PROPOSITION 3.2** *Soient  $G = (N, A, \mathcal{W})$  un jeu simple monotone et propre et  $i$  et  $j$  deux joueurs. Il y a équivalence entre (i) et (ii) suivants :*

$$(i) i \geq_P j$$

$$(ii) \forall a, b \in A, \forall S \subset N \text{ tel que } S \cap \{i, j\} = \emptyset, \forall R^N \text{ profil d'ordres totaux,} \\ [aD(R^N)b \text{ via } S \cup \{j\}] \Rightarrow [aD(R^N_{ij})b \text{ via } S \cup \{i\}]$$

**DÉMONSTRATION.** À cause du Théorème 3.1, il revient au même de démontrer l'équivalence de (ii) avec  $i \geq_T j$ .

Si non( $i \geq_T j$ ), alors  $\exists T \subset N$  tel que  $T \cap \{i, j\} = \emptyset, T \cup \{j\} \in \mathcal{W}$  et  $T \cup \{i\} \notin \mathcal{W}$ . Construire alors un profil d'ordres totaux  $Q^N$  vérifiant :  $aQ^k b$  pour tout joueur  $k$  appartenant à  $T \cup \{j\}$  et  $bQ^k a$  pour tout joueur  $k$  n'appartenant pas à  $T \cup \{j\}$ . On a  $aD(R^N)b$  via  $T \cup \{j\}$ , et comme  $\{k \in N / aQ^k_{ij} b\} = T \cup \{i\} \notin \mathcal{W}$ , on a non $[aD(Q^N_{ij})b$  via  $T \cup \{i\}]$ , d'où non(ii).

Supposons maintenant non(ii). Alors, il existe  $a, b \in A$  et  $S \subset N$  tel que  $S \cap \{i, j\} = \emptyset$ , et il existe un profil d'ordres totaux  $R^N$  tels que  $aD(R^N)b$  via  $S \cup \{j\}$  (on a donc  $S \cup \{j\} \in \mathcal{W}$ ) et non $[aD(R^N_{ij})b$  via  $S \cup \{i\}]$ . Puisque  $aP^{S \cup \{j\}}b$ , on en déduit  $aP^{S \cup \{i\}}b$ . Si  $S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ , on a  $aD(R^N_{ij})b$  via  $S \cup \{i\}$  qui est contraire à l'hypothèse. Donc  $S \cup \{i\} \notin \mathcal{W}$ , d'où non( $i \geq_T j$ ), et le résultat. •

Nous voulons maintenant comparer les notions de pouvoir de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman avec la relation de puissance, autrement dit, les préordres  $\geq_S$  et  $\geq_B$  avec  $\geq_P$ . A-t-on le même résultat qu'avec  $\geq_T$  ? Pour cela, rappelons d'une part que  $\geq_T$  est un sous-préordre de (c'est-à-dire un préordre contenu dans)  $\geq_S$  et de  $\geq_B$  et d'autre part le résultat suivant démontré ailleurs [5], [8] ou [4], et que nous désignons par « Théorème d'équivalence ordinale ».

**THÉORÈME 3.3** *Le préordre  $\geq_T$  coïncide avec le préordre  $\geq_S$  (respectivement  $\geq_B$ ) si et seulement si le jeu simple est  $\pi$ -robuste.*

Nous en déduisons le résultat suivant :

**COROLLAIRE 3.4** *Si le jeu simple est propre et monotone, et si  $i$  et  $j$  sont deux joueurs,*

$$(1) \quad i) i \geq_P j \text{ implique } i \geq_S j.$$

$$ii) i \geq_P j \text{ implique } i \geq_B j.$$

$$(2) \quad i \geq_P j \text{ équivaut à } i \geq_S j \text{ (respectivement } i \geq_B j) \text{ si et seulement si le jeu est } \pi\text{-robuste.}$$

Les conclusions (1) doivent être portées au crédit de chacune des théories de pouvoir de Shapley-Shubik et Banzhaf-Coleman respectivement. En effet, sous les hypothèses retenues, chaque fois que nous disons que le joueur  $i$  est au moins aussi apte que le joueur  $j$  à influencer la formation de la dominance classique, chacune des deux théories déclare que  $i$  a au moins autant de pouvoir que  $j$ .

De plus, pour les jeux propres et monotones, et à cause de l'équivalence entre la relation d'influence de Taylor et la relation de puissance, chaque fois que deux joueurs sont comparables du point de vue de la puissance, les classements de ces joueurs par le préordre de puissance et les préordres de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman sont identiques. Ce résultat nous semble remarquable.

Pour les résultats (2), on peut noter que chaque fois que la relation de puissance est un préordre total, elle concide avec les préordres de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman. Dans ce cas, il devient facile de construire la relation de puissance du jeu : il suffit de classer les joueurs selon le préordre de Shapley-Shubik ou de Banzhaf-Coleman. Ce résultat nous semble d'autant plus remarquable que les philosophies à la base de la définition de ces préordres sont totalement différentes.

Par contre, les résultats (2) posent un problème. Dans la mesure où il existe des jeux simples propres et monotones qui ne sont pas  $\pi$ -robustes, ces résultats permettent d'affirmer qu'il existe des jeux simples dans lesquels les indices de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman attribuent plus de pouvoir à un joueur  $i$  qu'à un joueur  $j$  alors même que  $i$  n'est pas plus apte que  $j$  à influencer la formation de la relation de dominance classique. La question de savoir ce que signifie un tel pouvoir se pose dans ce cas.

Il est naturel d'examiner si des résultats analogues à ceux qui précèdent sont vérifiés quand on remplace l'optique du contrôle de la relation de dominance classique par celle du contrôle des notions de solution du jeu de vote.

Nous allons donc, dans ce qui suit, considérer que l'objectif de chaque électeur est d'influencer le résultat du vote représenté par un sous-ensemble  $\Sigma(R^N)$  de  $A$ , ce sous-ensemble étant une notion de solution du jeu, et par exemple le cœur du jeu ou l'ensemble de stabilité.

#### 4 POUVOIR ET SOLUTION D'UN JEU

Dans la présente section, nous supposons que le résultat du vote est représenté par une notion de solution. Nous considérons donc que l'objectif de tout joueur est « d'influencer le plus possible la formation de la solution du jeu ». Nous examinerons successivement le cœur du jeu et l'ensemble de stabilité.

Si  $\Sigma(R^N)$  représente la solution du jeu associée au profil des préférences  $R^N$  par une notion de solution  $\Sigma$ , lorsque le profil des préférences individuelles varie, il en résulte une variation de  $\Sigma(R^N)$ . Avec un choix judicieux de la variation du profil des préférences individuelles, les variations induites de  $\Sigma(R^N)$  permettent d'observer les manifestations de l'aptitude d'un joueur à influencer, au moins autant qu'un autre, la formation de la solution donnée. Notre question fondamentale reçoit alors la nouvelle formulation suivante : si une notion donnée de pouvoir (par exemple l'indice de Shapley-Shubik) attribue dans un jeu au moins autant de pouvoir à  $i$  qu'à  $j$ , cela signifie-t-il que  $i$  est au moins aussi apte que  $j$  à influencer la formation de la solution donnée ?

Il s'agit donc, dans un premier temps, de définir le « choix judicieux de la variation du profil des préférences individuelles », et dans un deuxième temps, de préciser ce que nous entendons par « manifestations plausibles de l'aptitude d'un joueur à influencer au

moins autant qu'un autre, la formation de la solution donnée ». Le premier de ces deux problèmes sera résolu comme dans la section précédente. La modification judicieuse du profil de préférences  $R^N$  est celle qui conduit au profil de préférences  $R_{ij}^N$  défini plus haut. Le choix des « manifestations plausibles » sera précisé progressivement dans ce qui suit.

#### 4.1 POUVOIR ET CŒUR CLASSIQUE

Rappelons la définition du cœur (classique) d'un jeu simple.

**DÉFINITION 4.1** Soient  $G = (N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple et  $R^N$  un profil de préférences individuelles. On appelle cœur (classique) du jeu pour le profil  $R^N$ , le sous-ensemble de  $A$  noté  $\mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)$  et défini par :  $\mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N) = \{x \in A / \nexists (S, y) \in \mathcal{W} \times A : y P^j x, \forall j \in S\}$ .

Le cœur (classique) du jeu simple  $G = (N, \mathcal{W}, A)$  pour le profil  $R^N$  est l'ensemble des candidats non dominés au sens de la dominance classique pour  $R^N$ . Il est souvent vide.

Établissons le lemme suivant qui nous sera utile pour certaines démonstrations.

**LEMME 4.2** Soient  $G = (N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple monotone et  $a$  et  $b$  deux candidats. Pour toute coalition  $S$ , on a :  $[S \in \mathcal{W}] \iff [\forall R^N, b P^S a \Rightarrow a \notin \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)]$ .

**DÉMONSTRATION.**  $[S \in \mathcal{W}] \Rightarrow [\forall R^N, b P^S a \Rightarrow a \notin \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)]$  est évident. Supposons  $[\forall R^N, b P^S a \Rightarrow a \notin \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)]$ . Soit  $R^N$  défini par :  $\forall x \in A, b P^S a P^S x$  et  $\forall x \in A, a P^{N \setminus S} b P^{N \setminus S} x$ . On a  $b P^S a$ , d'où on déduit que  $a \notin \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)$ . Il en résulte qu'il existe une coalition gagnante  $L$  et un candidat  $z$  tels que  $z P^L a$ . Mais, vu la définition de  $R^N$ , on déduit que  $z = b$  et  $L \subset S$  d'où  $S$  est gagnante car  $G$  est monotone. •

Le résultat suivant établit la première équivalence relative au préordre  $\geq_T$  et indique en même temps une première manifestation plausibile de l'aptitude du joueur  $i$  à influencer au moins autant que  $j$  la variation du cœur du jeu lorsque l'on passe du profil de préférences  $R^N$  à  $R_{ij}^N$ .

**THÉORÈME 4.3** Soient  $G = (N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple monotone et  $i$  et  $j$  deux joueurs. Il y a équivalence entre :

$$(i) i \geq_T j$$

et

$$(ii) \forall R^N, \forall a \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N), \forall S \subset N, [a \text{ dominé dans } (N, \mathcal{W}, A, R_{ij}^N) \text{ via } S] \Rightarrow i \in S.$$

**DÉMONSTRATION.** Si  $i \geq_T j$ , soient  $R^N, a \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)$  et  $S \subset N$ . Si  $a$  est dominé dans  $(N, \mathcal{W}, A, R_{ij}^N)$  via  $S$ , soit  $b$  tel que (1)  $b P_{ij}^S a$ . Puisqu'en plus on a  $a \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)$ , on a

(2) non( $bP^S a$ ). Mais (1) et (2) impliquent (3)  $bP^{S \setminus \{i,j\}} a$ ;  $|S \cap \{i, j\}| = 1$  et  $i$  et  $j$  sont en désaccord sur  $\{a, b\}$ .

Si  $i \notin S$ , alors  $j \in S$ . Puisque  $P_{ij}^j = P^i$ , (1) implique (4)  $bP^i a$ . De plus,  $T = [S \setminus \{i, j\}] \cup \{j\} = S \in \mathcal{W}$ . Puisque  $i \geq_T j$ , on déduit que  $L = [S \setminus \{i, j\}] \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ . Il en résulte, d'après (3) et (4) que  $bP^L a$ , contredisant le fait que  $a \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)$ . Donc  $i \in S$ .

Supposons (ii) vrai. Soit une coalition  $S$  telle que  $S \cap \{i, j\} = \emptyset$  et  $S \cup \{j\} \in \mathcal{W}$ . Pour montrer que  $S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ , nous utilisons le lemme précédent. Soient  $a$  et  $b$  deux candidats et  $R^N$  tels que  $bP^{S \cup \{i\}} a$ . On a alors (5)  $bP_{ij}^{S \cup \{j\}} a$ . Il nous faut montrer que  $a \notin \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)$ . Supposons le contraire:  $a \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)$  qui avec (ii) et (5) montrent que  $i \in S \cup \{j\}$ , ce qui est contradictoire. Donc  $a \notin \mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N)$  et le lemme permettent de conclure que  $S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ . Donc  $i \geq_T j$ . •

**PROPOSITION 4.4** Soient  $G = (N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple monotone et  $i$  et  $j$  deux joueurs. Il y a équivalence entre :

$$(i) i \geq_T j$$

et

$$(ii) \forall R^N, \forall a \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, R_{ij}^N), \forall S \subset N, [a \text{ dominé dans } (N, \mathcal{W}, A, R^N) \text{ via } S] \Rightarrow i \in S.$$

**DÉMONSTRATION.** Remarquons que l'application  $R^N \rightarrow R_{ij}^N$  est involutive. Nous pouvons donc ré-écrire le théorème précédent en remplaçant  $R^N$  par  $R_{ij}^N$ , d'où le résultat. •

**INTERPRÉTATION.** Le Théorème 4.1 et la Proposition 4.1 présentent chacun une condition nécessaire et suffisante pour  $i \geq_T j$ . Cette condition exprime comment le cœur classique varie dans le passage de  $R^N$  à  $R_{ij}^N$ .

D'après le Théorème 4.1, un élément  $a$  dans le cœur du jeu pour le profil  $R^N$  n'est expulsé du cœur pour le profil  $R_{ij}^N$  qu'avec l'accord de  $i$ . En effet,  $i$  appartient nécessairement à toute coalition gagnante  $S$  grâce à laquelle serait assurée la dominance de  $a$  pour le profil  $R_{ij}^N$ . Il existe alors un candidat  $b$  tel que  $a$  est dominé par  $b$  avec la participation de  $i$  pour  $R_{ij}^N$ . Dans  $R^N$ , on avait  $bP^j a$ , mais  $j$  n'y parvenait pas à assurer la dominance de  $a$  par  $b$ .

D'après la Proposition 4.1, un élément  $a$  dominé pour le profil  $R^N$  n'est admis au cœur pour le profil  $R_{ij}^N$  que si le précédent maintien hors du cœur exigeait la participation de  $i$ . Il existe alors un candidat  $b$  tel que  $a$  était dominé par  $b$  pour  $R^N$  avec la participation de  $i$ . Pour  $R_{ij}^N$ , on a bien  $bP_{ij}^j a$ , mais  $j$  n'y a pas la possibilité d'assurer la dominance de  $a$  par  $b$ . On voit que la relation d'influence  $\geq_T$  cerne bien l'aptitude relative des joueurs  $i$  et  $j$  à influencer la formation du cœur.

Il existe un cas où, pour deux joueurs donnés  $i$  et  $j$ , on ne peut observer aucune variation du cœur lorsque varient les préférences. C'est le cas où, pour tout  $R^N$ , on a  $\mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N) = \mathcal{C}(\mathcal{W}, R_{ij}^N)$ . Il inclut le cas de vacuité des deux cœurs. Il en est ainsi par exemple si le jeu est anonyme. Que peut-on alors dire des joueurs  $i$  et  $j$ ? La proposition

suivante montre que dans ce cas, les deux joueurs sont interchangeable pour la relation de dominance classique, c'est-à-dire  $D(R^N) = D(R_{ij}^N)$  pour tout  $R^N$ .

**PROPOSITION 4.5** *Soient  $G = (N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple monotone et  $i$  et  $j$  deux joueurs. Alors  $\mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N) = \mathcal{C}(\mathcal{W}, R_{ij}^N)$  pour tout profil d'ordres totaux  $R^N$ , si et seulement si  $D(R^N) = D(R_{ij}^N)$  pour tout profil d'ordres totaux  $R^N$ .*

**DÉMONSTRATION.** Supposons  $\mathcal{C}(\mathcal{W}, R^N) = \mathcal{C}(\mathcal{W}, R_{ij}^N)$  pour tout profil d'ordres totaux  $R^N$ . S'il existe  $R^N$  tel que  $D(R^N) \neq D(R_{ij}^N)$ , alors, sans perte de généralité, on peut supposer :  $\exists a, b \in A$  tels que  $aD(R^N)b$  et  $\text{non}[aD(R_{ij}^N)b]$ . On peut construire un profil d'ordres totaux  $Q^N$  vérifiant les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall k \in N, aR^k b \Rightarrow aQ^k b$  et  $bQ^k a \forall x \in A \setminus \{a, b\}$
- 2)  $\forall k \in N, bR^k a \Rightarrow bQ^k a$  et  $aQ^k x \forall x \in A \setminus \{a, b\}$

Notons, pour tout profil d'ordres totaux  $V^N$ ,  $N(V^N, ab) = \{k \in N / aV^k b\}$ . De  $aD(R^N)b$ , le jeu étant monotone, on déduit  $N(R^N, ab) \in \mathcal{W}$ . De  $\text{non}[aD(R_{ij}^N)b]$ , on déduit  $N(R_{ij}^N, ab) \notin \mathcal{W}$ . Or  $N(Q^N, ab) = N(R^N, ab)$ , d'où  $aD(Q^N)b$  et  $b \notin \mathcal{C}(\mathcal{W}, Q^N)$ . De même,  $N(Q_{ij}^N, ab) = N(R_{ij}^N, ab) \notin \mathcal{W}$ , donc  $\text{non}[aD(Q_{ij}^N)b]$ . Or, par construction de  $Q^N$ , aucun autre candidat ne peut dominer  $b$  pour le profil  $Q_{ij}^N$ , d'où  $b \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, Q_{ij}^N)$ . Mais alors  $\mathcal{C}(\mathcal{W}, Q^N) \neq \mathcal{C}(\mathcal{W}, Q_{ij}^N)$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Réciproquement, il est évident que pour tout profil  $R^N$ , l'égalité  $D(R^N) = D(R_{ij}^N)$  des relations de dominance implique l'égalité des cœurs, d'où le résultat. ●

#### 4.2 POUVOIR ET ENSEMBLE DE STABILITÉ

L'ensemble de stabilité d'un jeu simple  $G = (N, \mathcal{W}, A)$  pour tout profil  $R^N$  d'ordres totaux a été introduit par Rubinstein [9]. Rappelons sa définition.

**DÉFINITION 4.6** *Soit  $(N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple.*

1) *On appelle dominance de l'ensemble de stabilité, la procédure d'agrégation notée  $d^S$  qui, à tout profil d'ordres totaux  $R^N$ , associe la relation  $d^S(R^N)$  appelée relation de dominance de l'ensemble de stabilité pour le profil  $R^N$  et définie par : pour toute coalition gagnante  $S$ , tous candidats  $x$  et  $y$ , on dit que  $x$  domine  $y$  via  $S$  et on note  $[x d^S(R^N) y \text{ via } S]$ , si  $x P^S y$  et si de plus, pour tout candidat  $z$  et toute coalition gagnante  $L$ ,  $z P^L x$  implique  $z R^S y$ .*

*On dit que  $y$  est dominé s'il existe un candidat  $x$  et une coalition gagnante  $S$  tels que  $[x d^S(R^N) y \text{ via } S]$ .*

2) *On appelle ensemble de stabilité du jeu pour  $R^N$ , le sous-ensemble de  $A$  noté  $S(\mathcal{W}, R^N)$  des candidats non dominés au sens de la relation de dominance  $d^S(R^N)$ .*

Contrairement au cœur du jeu, l'ensemble de stabilité pour un profil d'ordres totaux n'est jamais vide. Un résultat récent de Martin [7] établit des conditions nécessaires et suffisantes de non vacuité de l'ensemble de stabilité des jeux à quota symétriques pour les profils de préordres totaux. Rappelons que dans le présent article, nous nous

limitons aux profils d'ordres totaux, de sorte que l'ensemble de stabilité n'est jamais vide.

Si  $R^N$  est un profil de préordres totaux,  $a$  et  $b$  deux candidats et  $S$  une partie quelconque de  $N$ , nous définissons la notation suivante :

$$b\Pi^S a \iff [\forall x \in A \setminus \{a, b\}, bP^S a P^S x]$$

Le lemme suivant nous sera utile dans certaines démonstrations.

**LEMME 4.7** Soient  $G = (N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple propre et monotone,  $a$  et  $b$  deux candidats. Pour toute coalition  $S$ , on a :

$$[S \in \mathcal{W}] \iff [\forall R^N, b\Pi^S a \Rightarrow a \notin \mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)]$$

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $S$  est une coalition gagnante et  $R^N$  un profil tels que  $b\Pi^S a$ . On a donc  $bP^S a$ . Si  $a \in \mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)$ , il existe un candidat  $z$  et une coalition gagnante  $L$  tels que  $zP^L b$  et  $\text{non}(zP^S a)$ . Puisque  $b\Pi^S a$ ,  $zP^L b$  implique  $L \cap S = \emptyset$ , ce qui contredit le fait que  $G$  est propre. Donc  $a \notin \mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)$ .

Supposons  $[\forall R^N, b\Pi^S a \Rightarrow a \notin \mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)]$ . Soit  $R^N$  tel que

$$[\forall x \in A \setminus \{a, b\}, bP^S a P^S x] \text{ et } [\forall x \in A \setminus \{a, b\}, aP^{N \setminus S} b P^{N \setminus S} x]$$

On a donc  $b\Pi^S a$ , donc  $a \notin \mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)$ . Soient alors un candidat  $z$  et une coalition gagnante  $L$  tels que  $z d^S(R^N) a$  via  $L$ . Vu la définition de  $R^N$ , on déduit que  $L \subset S$ , d'où  $S$  est gagnante car  $G$  est monotone. •

Dans la première partie de la démonstration de ce lemme, la remarque suivante est démontrée :

**REMARQUE 4.1** Si le jeu simple est propre et si le profil d'ordres totaux  $R^N$  est tel que  $b\Pi^S a$  avec  $S \in \mathcal{W}$ , alors  $[bd^S(R^N) a \text{ via } S]$ .

Dans ce qui suit, si deux joueurs donnés sont désignés respectivement par  $i$  et  $j$  et si  $S$  est une coalition, on lui associe la coalition  $T(S)$  définie par :  $T(S) = S$  si  $j \notin S$ , et  $T(S) = [S \setminus \{j\}] \cup \{i\}$  si  $j \in S$ .

**PROPOSITION 4.8** Soient  $G$  un jeu simple propre et monotone et  $i$  et  $j$  deux votants. Il y a équivalence entre (i) et (ii) suivants :

$$(i) i \geq_T j$$

$$(ii) \forall R^N, \forall a \in \mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N), \forall S \in \mathcal{W}, \forall b \in A, [bd^S(R^N_{ij}) a \text{ via } S] \text{ implique :}$$

1) Soit  $i \in S$

2) Soit  $T(S) \in \mathcal{W}, bP^{T(S)} a$  et  $\forall L \in \mathcal{W}, \forall z \in A, [zP^L b \text{ et } \text{non}(zP^{T(S)} a)] \Rightarrow i \in L$

**DÉMONSTRATION.** Supposons  $i \geq_T j$ , et soient  $R^N, a \in \mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N), S \in \mathcal{W}$ , et  $b \in A$  tels que  $[bd^S(R^N_{ij}) a \text{ via } S]$ . Alors  $bP^S_{ij} a$  et  $\forall L \in \mathcal{W}, zP^L_{ij} b \Rightarrow zP^S_{ij} a$ . Supposons que  $i \notin S$ .

a) Si  $j \notin S$  : alors  $i \notin S$  et  $j \notin S$  et  $T(S) = S$ , donc  $T(S) \in \mathcal{W}$ . De plus,  $P_{ij}^S = P^S$ , d'où  $bP^S a$ . Soient maintenant  $z \in A$  et  $L \in \mathcal{W}$  tels que  $zP^L b$  et  $\text{non}(zP_{ij}^S a)$  et  $i \notin L$ . Alors, de  $\text{non}(zP_{ij}^S a)$ , on déduit  $\text{non}(zP_{ij}^L b)$ . Mais  $\text{non}(zP_{ij}^L b)$  et  $zP^L b$  entraînent que  $|L \cap \{i, j\}| = 1$ , c'est-à-dire  $j \in L$ , puisque  $i \notin L$ . On déduit également que  $zP^j b$  et  $bP^i z$ . Soit maintenant  $K = [L \setminus \{i, j\}] \cup \{i\}$ . On a alors  $(zP_{ij}^K b)$ . Puisque  $i \geq_T j$ , on a  $K \in \mathcal{W}$ . Or,  $\text{non}(zP_{ij}^S a)$  ce qui contredit le fait que  $bd^S(R_{ij}^N)a$  via  $S$ .

b) Si  $j \in S$  :  $bP_{ij}^S a$  entraîne que  $bP^i a$  et  $bP^{S \setminus \{i, j\}} a$ . On a  $T(S) = [S \setminus \{i, j\}] \cup \{i\}$ .  $T(S)$  est une coalition gagnante car  $i \geq_T j$ .  $bP^i a$  et  $bP^{S \setminus \{i, j\}} a$  entraînent que  $bP^{T(S)} a$ . Soient maintenant  $z \in A$  et  $L \in \mathcal{W}$  tels que  $zP^L b$ ,  $\text{non}(zP^{T(S)} a)$  et  $i \notin L$ . Il est évident que pour deux candidats quelconques  $u$  et  $v$ ,  $uP^{T(S)} v$  si et seulement si  $uP_{ij}^S v$ . Donc on a également  $\text{non}(zP_{ij}^S a)$ . Puisque  $bd^S(R_{ij}^N)a$  via  $S$ , on déduit  $\text{non}(zP_{ij}^L b)$ . On a alors  $zP^L b$  et  $\text{non}(zP_{ij}^L b)$ , d'où  $|L \cap \{i, j\}| = 1$ , c'est-à-dire  $j \in L$ , puisque  $i \notin L$ . On déduit comme dans (a) que  $K = [L \setminus \{i, j\}] \cup \{i\}$  est une coalition gagnante et vérifie  $(zP_{ij}^K b)$ . Or  $\text{non}(zP_{ij}^S a)$  ce qui contredit le fait que  $bd^S(R_{ij}^N)a$  via  $S$ .

c) Réciproquement, supposons que (ii) est vrai, et soit une coalition  $S$  telle que  $S \cap \{i, j\} = \emptyset$  et  $S \cup \{j\} \in \mathcal{W}$ . Pour montrer que  $S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ , nous utilisons le lemme précédent. Soient  $a$  et  $b$  deux candidats et  $R^N$  tels que  $b\Pi^{S \cup \{i\}} a$ . On a  $\Pi^{S \cup \{i\}} = \Pi_{ij}^{S \cup \{j\}}$ , d'où  $b\Pi_{ij}^{S \cup \{j\}} a$ . Donc d'après la remarque précédente,  $bd^S(R_{ij}^N)a$  via  $S \cup \{j\}$ . Or, on n'a pas  $i \in S \cup \{j\}$ , donc d'après l'hypothèse,  $T(S \cup \{j\}) \in \mathcal{W}$ . Mais,  $T(S \cup \{j\}) = S \cup \{i\}$ , donc  $S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$  et  $i \geq_T j$ . •

On peut ré-écrire cette proposition en remplaçant  $R^N$  par  $R_{ij}^N$ . On obtient :

**COROLLAIRE 4.9** Soient  $G$  un jeu simple propre et monotone et  $i$  et  $j$  deux votants. Il y a équivalence entre (i) et (ii) suivants :

$$(i) i \geq_T j$$

$$(ii) \forall R^N, \forall a \in \mathcal{S}(\mathcal{W}, R_{ij}^N), \forall S \in \mathcal{W}, \forall b \in A, [bd^S(R^N)a \text{ via } S] \text{ implique :}$$

1) Soit  $i \in S$

2) Soit  $T(S) \in \mathcal{W}$ ,  $bP_{ij}^{T(S)} a$  et  $\forall L \in \mathcal{W}, \forall z \in A, [zP_{ij}^L b \text{ et } \text{non}(zP_{ij}^{T(S)} a)] \Rightarrow i \in L$

**INTERPRÉTATION.** L'interprétation sera conduite selon A), B) et C) suivants :

A) La condition nécessaire et suffisante pour  $i \geq_T j$  donnée par la Proposition 4.8 et le Corollaire 4.9 peut s'interpréter par : dans le passage de  $R^N$  à  $R_{ij}^N$ , l'exclusion et l'admission d'un candidat dans l'ensemble de stabilité obéissent aux impératifs suivants.

i)  $a$  n'est exclu de l'ensemble de stabilité que soit avec la participation de  $i$ , soit parce que la présence de  $a$  dans l'ensemble de stabilité était due à la capacité de  $i$  de dissuader la coalition gagnante  $T(S)$  de l'en écarter.

ii)  $a$  n'y est admis que soit parce qu'il ne pouvait pas en être exclu sans la participation de  $i$ , soit parce que cette admission est due à la capacité de  $i$  de dissuader la coalition gagnante  $T(S)$  de l'en écarter.

B) Pour mieux comprendre en quoi ces résultats expriment que  $i$  est au moins aussi apte que  $j$  à contrôler la formation de l'ensemble de stabilité, reportons-nous sur la Proposition 4.8 et examinons-y la conclusion de l'implication (ii), laquelle comporte deux points (1) et (2).

(1) déjà rencontré à propos du cœur classique signifie que  $a$  est expulsé de  $\mathcal{S}(\mathcal{W}, R_{ij}^N)$  avec la participation de  $i$ , opération que  $j$ , avec la même préférence, n'est pas parvenu à réaliser dans le cadre du profil  $R^N$ .

Si (1) est faux, (2) concerne le cas où  $a$  est expulsé de  $\mathcal{S}(\mathcal{W}, R_{ij}^N)$  sans la participation de  $i$ . Ce point signifie que  $T(S)$  est une coalition gagnante qui était déjà désireuse d'expulser  $a$  de  $\mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)$  et de proposer  $b$ . Seul  $i$  dissuadait  $T(S)$ , menaçant de se coaliser avec  $L$  pour une déviation à partir de  $b$  vers un candidat  $z$  que certains membres de  $T(S)$  trouvent plus mauvais que  $a$ . Donc la présence de  $a$  dans  $\mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)$  était imposée par  $i$ . La supériorité de  $i$  sur  $j$  provient du fait que  $j$ , qui a hérité de la même préférence, ne peut rien contre la présence de  $a$  dans  $\mathcal{S}(\mathcal{W}, R_{ij}^N)$ . L'intérêt de  $i$  dans une telle menace est illustrée dans l'exemple ci-après :

EXEMPLE Considérons le jeu simple monotone dans lequel on a  $N = \{i, j, k, l\}$ , et les coalitions gagnantes minimales  $\{k, l\}$ ,  $\{i, k\}$ , et  $\{i, l\}$ , et  $A = \{a, b, z\}$ . Définissons  $R^N$  par :  $i : azb$  ;  $j : abz$  ;  $k : baz$  et  $l : zba$ .

On vérifie que  $\mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N) = \{a, b\}$  et  $\mathcal{S}(\mathcal{W}, R_{ij}^N) = \{b\}$

1) Dans le passage de  $R^N$  à  $R_{ij}^N$ ,  $a$  est exclu de l'ensemble de stabilité.

2) On constate qu'avant ce passage,  $a$  était présent dans cet ensemble, présence due à  $i$  qui menace  $\{k, l\}$  de se coaliser avec  $l$  dans  $\{i, l\}$  pour induire  $z$  et dissuade ainsi la coalition  $\{k, l\}$  d'exercer son veto contre  $a$ .

3) Après le passage de  $R^N$  à  $R_{ij}^N$ ,  $i$  et  $l$  sont désormais en désaccord sur  $\{b, z\}$ , ce qui annule la menace ci-dessus. Bien que  $j$  et  $l$  soient en accord sur  $\{b, z\}$ , la coalition  $\{j, l\}$  qui est non gagnante ne peut dissuader  $\{k, l\}$ , d'où l'expulsion de  $a$  de l'ensemble de stabilité.

C) Examinons le cas où pour tout  $R^N$ , l'ensemble de stabilité est inchangé quand on passe de  $R^N$  à  $R_{ij}^N$ . Alors (ii) de la Proposition 4.8 est vérifié (c'est une implication dont le premier terme est faux). De même, (ii) reste vérifié si  $i$  et  $j$  sont permutés. Donc  $i$  et  $j$  sont équivalents pour le critère (ii). La Proposition 4.8 exprime donc que l'équivalence d'électeurs au sens de (ii) vaut leur équivalence au sens de la relation d'influence de Taylor.

Nous allons maintenant établir un résultat qui compare les avantages des candidats classés respectivement premiers par deux électeurs  $i$  et  $j$ .

Pour tout électeur  $i$  et tout profil d'ordres totaux  $R^N$ , nous désignons par  $M(i, R^N)$  le meilleur candidat de  $i$ , c'est-à-dire celui classé premier pour  $R^i$ . Plus formellement :

$$\text{si } b \in A, b = M(i, R^N) \Rightarrow \forall x \in A \setminus \{b\}, bP^i x.$$

THÉORÈME 4.10 Soient  $G = (N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple propre et monotone,  $i$  et  $j$  deux électeurs. Alors il y a équivalence entre :

DÉMONSTRATION. Supposons (i) vrai et soient  $R^N$  et  $S \in \mathcal{W}$  tels que  $M(j, R^N)d^S(R^N)a$  via  $S$ . Sans nuire à la généralité, on peut supposer que  $j \in S$ , car  $M(j, R^N)$  est le meilleur candidat de  $j$  et  $G$  est monotone.

a) Si  $i \in S$ , alors  $i \in S$  et  $j \in S$  d'où  $P^S = P_{ij}^S$ . Donc on a  $M(j, R^N)P_{ij}^S a$ , c'est-à-dire  $M(i, R_{ij}^N)P_{ij}^S a$ , car  $M(j, R^N) = M(i, R_{ij}^N)$ . Soient maintenant  $z \in A$  et  $L$  une coalition gagnante tels que  $zP_{ij}^L M(i, R_{ij}^N)$ . Il est évident que  $i \notin L$ . Si  $j \notin L$ , alors  $L \cap \{i, j\} = \emptyset$ , et de  $zP_{ij}^L M(j, R_{ij}^N)$ , on déduit  $zP^L M(j, R^N)$ . Puisque  $M(j, R^N)d^S(R^N)a$  via  $S$ , donc  $zR^S a$ , c'est-à-dire  $zR_{ij}^S a$ , car  $S \cap \{i, j\} = \emptyset$ . Si  $j \in L$ ,  $T = [L \setminus \{j\}] \cup \{i\}$  est une coalition gagnante car  $i \geq_T j$ . On a  $zP^T M(j, R^N)$ , ce qui, vu que  $M(j, R^N)d^S(R^N)a$  via  $S$ , implique  $zP^S a$ . Donc  $zP_{ij}^S a$  car  $P^S = P_{ij}^S$ .

b) Si  $i \notin S$ ,  $T = [S \setminus \{j\}] \cup \{i\}$  est une coalition gagnante car  $i \geq_T j$ . Il est évident que  $M(i, R_{ij}^N)P_{ij}^T a$ . Soient maintenant  $z \in A$  et  $L$  une coalition gagnante tels que  $zP_{ij}^L M(i, R_{ij}^N)$ . Il est évident que  $i \notin L$ .

1) Si  $j \notin L$ , alors  $i \notin L$  et  $j \notin L$  d'où  $zP^L M(j, R^N)$ , ce qui, vu que  $M(j, R^N)d^S(R^N)a$  via  $S$ , implique  $zP^S a$ . Or  $j \in S$ , donc  $zP^j a$ . On déduit que  $zP_{ij}^T a$ .

2) Si  $j \in L$ ,  $L^* = [L \setminus \{j\}] \cup \{i\}$  est une coalition gagnante car  $i \geq_T j$ , et  $L^*$  vérifie  $zP^{L^*} M(j, R^N)$ , ce qui, vu que  $M(j, R^N)d^S(R^N)a$  via  $S$ , implique  $zP^S a$ . Or  $j \in S$ , donc  $zP^j a$ . On déduit que  $zP_{ij}^T a$ .

Supposons maintenant que (ii) est vrai, et soit une coalition  $S$  telle que  $S \cap \{i, j\} = \emptyset$  et  $S \cup \{j\}$  est gagnante. Pour montrer que  $S \cup \{i\}$  est gagnante, nous utilisons le Lemme 4.2. Soient deux candidats  $a$  et  $b$  et un profil  $R^N$  tels que  $b\Pi^{S \cup \{i\}} a$ . On a  $\Pi^{S \cup \{i\}} = \Pi_{ij}^{S \cup \{j\}}$ , d'où  $b\Pi_{ij}^{S \cup \{j\}} a$ . Donc d'après la remarque faisant suite au Lemme 4.2,  $b d^S(R_{ij}^N)a$  via  $S \cup \{j\}$ . Mais  $b = M(j, R_{ij}^N)$ . Donc  $M(j, R_{ij}^N)d^S(R_{ij}^N)a$  via  $S \cup \{j\}$ . D'après notre hypothèse, nous déduisons que  $M(i, R^N)d^S(R^N)a$ , d'où  $a \notin \mathcal{S}(\mathcal{W}, R^N)$ . On conclut grâce au Lemme 4.2 que  $S \cup \{i\}$  est gagnante, donc  $i \geq_T j$ . •

INTERPRÉTATION. Supposons que  $i \geq_T j$ . Si  $M(j, R^N)d^S(R^N)a$ , on a là un avantage de  $j$  pour le profil  $R^N$ . On s'attend, si  $i$  est au moins aussi apte que  $j$  à contrôler la formation de l'ensemble de stabilité, à observer le même avantage pour  $i$  avec  $R_{ij}^N$ , car  $M(j, R^N)$  devient  $M(i, R_{ij}^N)$  et est maintenant supporté par  $i$ . Le théorème ci-dessus affirme qu'il en est bien ainsi et révèle en plus qu'on a là une condition nécessaire et suffisante de  $i \geq_T j$ . Il apparaît ainsi que  $\geq_T$  classe bien les électeurs en fonction de leur aptitude à influencer la formation de l'ensemble de stabilité.

Un résultat analogue pour la dominance classique s'établit plus aisément et s'énonce :

**THÉORÈME 4.11** Soient  $G = (N, \mathcal{W}, A)$  un jeu simple propre et monotone,  $i$  et  $j$  deux électeurs. Alors il y a équivalence entre :

$$(i) [i \geq_T j]$$

et

$$(ii) [\forall R^N, \forall a \in A, M(j, R^N)D(R^N)a \Rightarrow M(i, R_{ij}^N)D(R_{ij}^N)a]$$

Les résultats de cette section 4 nous permettent d'affirmer que dans les jeux monotones et propres, la relation d'influence de Taylor cerne bien l'aptitude d'un joueur à influencer la formation à la fois du cœur et de l'ensemble de stabilité.

REMARQUE 4.2 Tous les résultats de la section 4 ont été énoncés pour la relation d'influence de Taylor  $\geq_T$ , sans l'être explicitement pour les indices de Shapley-Shubik et Banzhaf-Coleman, c'est-à-dire les préordres  $\geq_S$  et  $\geq_B$ . Cependant, le Théorème 3.3 de l'équivalence ordinale assure que les mêmes résultats valent pour ces indices, sous réserve que le jeu simple soit monotone, propre et  $\pi$ -robuste.

## 5 CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons entrepris de répondre à la question suivante : l'indice de Shapley-Shubik, l'indice absolu de Banzhaf-Coleman et la relation d'influence de Taylor, considérés comme théories de pouvoir dans un jeu de vote, mesurent-elles l'aptitude d'un électeur à influencer le résultat du vote ?

Les premiers résultats obtenus sont surprenants, car ils ne nous semblent pas intuitivement attendus. Ils ont été énoncés, démontrés et interprétés. Ces résultats sont obtenus sur la base de la dominance classique, du cœur classique et de l'ensemble de stabilité. Dans ce cadre, ils disent que la relation d'influence de Taylor est une très bonne théorie de pouvoir pour les jeux monotones et propres, et qu'il en est de même des indices de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman quand il s'agit des jeux monotones, propres et  $\pi$ -robustes. Pour les jeux monotones et propres qui ne sont pas  $\pi$ -robustes, nous devons admettre que les indices de Shapley-Shubik et de Banzhaf-Coleman peuvent attribuer à un joueur  $i$  plus de pouvoir qu'à un joueur  $j$ , sans que l'aptitude de  $i$  à influencer mieux que  $j$  le résultat du vote n'apparaisse clairement, du moins dans le sens où nous l'entendons ici. La nature d'un tel pouvoir mériterait alors d'être précisée.

La présente étude sera étendue dans l'avenir à d'autres notions de solution. Nous saurons alors si les résultats obtenus ici se confirment ailleurs.

*Remerciements* : nous remercions bien sincèrement deux rapporteurs anonymes dont les observations nous ont permis de clarifier cette étude et d'en améliorer la rédaction.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BANZHAF, J. F., « Weighted voting doesn't work: A mathematical Analysis », *Rutgers Law Review*, 19, 1965, p. 317-343.
- [2] BRAMS, S. J., *Theory of moves*, Cambridge University Press, 1994.
- [3] DIFFO LAMBO L., *Comportements rationnels dans un jeu de vote*. Thèse de Doctorat d'Etat, Fac. Sc. Univ. Yaoundé I, 1999.
- [4] DIFFO LAMBO L., MOULEN J., « Ordinal equivalence of power notions in voting games », 1999, [à paraître].
- [5] DIFFO LAMBO L., MOULEN J., « Relation d'influence dans un jeu de vote », *Ann. Fac. Sc. Univ. Yaoundé I, Série Math-Info-Phys-Chim*, Vol. 32, no. 1, 1999, p. 43-63.
- [6] DUBEY, P., SHAPLEY, L. S., « Mathematical properties of the Banzhaf power index », *Mathematics of Operations Research*, Vol. 4, no. 2, 1979, p. 99-131.
- [7] MARTIN M., « A Note on the non-emptiness of the stability set », *Soc. Choice Welfare*, 12, p. 43-58.
- [8] MOULEN, J., *Comparaison de notions de pouvoir dans un jeu de vote*, Documents du CREUSET, Univ. de Saint-Etienne, juillet 1997.
- [9] RUBINSTEIN, A., « Stability of decision systems under majority rule », *Jour. of Econ. Theory*, 23, 1980, p. 150-159.
- [10] SHAPLEY, L. S., SHUBIK, M., « A model for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System », *Amer. Poli. Science Review*, 48, 1954, p. 787-792.
- [11] TAYLOR, A. T., *Mathematics and Politics*. Springer-Verlag, 1995.
- [12] TAYLOR, A. T., ZWICKER, W., « Weighted Voting, Multicameral Representation and Power », *Games and Eco. Behavior*, 5, 1993, p. 170-181.
- [13] TAYLOR, A. T., ZWICKER, W., « A characterization of weighted voting », *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 115, no. 4, August 1992.