Une application de l'algèbre linéaire : le calcul des probabilités

An application of linear algebra: calculus of probability

Marc Barbut

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/msh/2825>

DOI : 10.4000/msh.2825

ISSN : 1950-6821

Éditeur

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée

Date de publication : 1 mars 2000

ISSN : 0987-6936

Référence électronique

Marc Barbut, « Une application de l'algèbre linéaire : le calcul des probabilités », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 150 | Été 2000, mis en ligne le 10 février 2006, consulté le 23 juillet 2020.

URL : <http://journals.openedition.org/msh/2825> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/msh.2825>

UNE APPLICATION DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE : LE CALCUL DES PROBABILITÉS¹

Marc BARBUT²

RÉSUMÉ – *On présente ici une voie pour l'initiation au Calcul des Probabilités : celle de la modélisation linéaire de problèmes de décisions dont les conséquences dépendent du hasard. La notion de base est alors celle d'espérance d'une variable aléatoire ; celle de probabilité d'un événement en dérive.*

MOTS-CLÉS – Pari, Variable aléatoire, Espérance, Probabilité, Statistique, Subjectif, Objectif.

SUMMARY – An application of linear algebra: Calculus of Probability

We describe an approach to teaching Probability Theory for beginners : the use of linear modeling in problems of decisions with random results. The basic notion is that of the expected value of random variables ; the probability of an event is derived therefrom.

KEYWORDS – Gamble, Random variable, Expected value, Probability, Statistics, Subjective, Objective.

INTRODUCTION

La seule ambition de cette note est d'ordre pédagogique : montrer, pour les enseignants, une voie d'initiation au Calcul des Probabilités plus naturelle et plus facile, à mes yeux, pour les débutants, que la voie, classique depuis des décennies, consistant à baser la théorie sur la notion de mesure et les axiomes de Kolmogorov.

La difficulté principale dans les débuts en Calcul des Probabilités tient en effet, me semble-t-il, au caractère *abstrait, non intuitif* de la notion même de probabilité.

Pour l'introduction à la géométrie élémentaire par exemple, l'enseignement peut s'appuyer (et s'appuie effectivement) sur l'expérience vécue en permanence par chacun des élèves ; ceux-ci vivent, se meuvent dans l'espace, et parfois se cognent à certains de ses corps ; ils ont une connaissance pratique et quotidienne de ce que sont un plan, une droite, une sphère, un cube, etc.

¹ Ce texte (à quelques détails de rédaction près) est publié par ailleurs dans « La recherche de la vérité », ouvrage collectif sous la direction de M. Serfati, Paris, les Éditions du Kangourou, 1999, p. 97-116.

² Centre d'analyse et de mathématiques sociales (CAMS) de l'École des hautes études en sciences sociales (EHESS), 54 boulevard Raspail 75270 Paris Cedex 06.

Et chacun d'entre nous sait pourtant, que l'initiation à la géométrie est loin d'être aisée.

Mais pour le Calcul des Probabilités, censé s'appliquer à des événements *au hasard*, combien d'entre nous et *a fortiori* de nos élèves, peuvent-ils s'appuyer sur leur expérience, et avoir quelque intuition de l'aléatoire ? Sauf pour les joueurs et les parieurs invétérés et les professionnels de quelques métiers tels que l'actuariat, les assurances ou la statistique elle-même, la notion de hasard et d'évènement au hasard sont totalement abstraites.

Et il faudrait d'emblée, commencer dans l'enseignement par *mesurer* ces objets (les événements aléatoires) aussi peu familiers en général, aussi abstraits pour l'enseignant que pour l'enseigné ? Il n'est pas surprenant que la pédagogie du Calcul des Probabilités se heurte à de considérables difficultés et parfois à des échecs.

S'il est par contre une pratique familière à tout un chacun, c'est bien celle d'acheter et de vendre des biens et marchandises et d'en avoir manipulé la *valeur*, au sens économique de ce terme. Et quoique la notion d'évènement aléatoire soit abstraite le commerce (dans les deux sens du mot) de (et avec des) marchandises *au hasard* (on les appellera ci-dessous des *paris*) est assez usuel : dans quelle famille, en effet, n'achète-t-on pas des billets de diverses loteries ou des contrats d'assurance payés au moyen de leurs primes ?

Ce qui est proposé ici, c'est donc de s'appuyer sur une théorie axiomatique de la valeur de ces biens aléatoires (c'est-à-dire une axiomatique de l'espérance mathématique des variables aléatoires). Et les *axiomes de Kolmogorov* du Calcul des Probabilités deviennent des théorèmes (immédiats) dans cette théorie.

Cette façon d'introduire au Calcul des Probabilités, à partir de la notion d'espérance d'une variable aléatoire a d'ailleurs l'avantage de correspondre à ce qui s'est passé historiquement (cf. [1], [2], [3] ou [4] notamment) : jamais Blaise Pascal, l'inventeur de ce Calcul qu'il appelle *géométrie du hasard* (*Aleae Geometria*), n'a utilisé le terme *probabilité* dans son sens technique actuel ; il n'utilise justement que le mot *valeur* (*espérance*) ; *probabilité* viendra plus tard dans l'histoire de la pensée mathématique. Dans le présent numéro de *Math. Sci. Hum.*, l'article [2] d'A.-S. Godfroy-Genin est particulièrement éclairant à cet égard. Il doit bien y avoir quelque raison à cet ordre d'apparition.

En outre, l'ordre d'exposition adopté ici : Calcul des Espérances, puis Calcul des Probabilités, a le mérite de bien situer ces théories dans le domaine des applications des mathématiques dont elles relèvent. À savoir, les *mathématiques de la décision* ; en l'occurrence, il s'agit des décisions prises face à l'incertitude quant aux conséquences que le choix effectué peut avoir.

Enfin, et c'est pour moi l'avantage décisif, ce mode d'initiation met le Calcul des Probabilités, qui n'est qu'un cas particulier du Calcul des Espérances, dans le cadre général de l'*algèbre* (et de l'*analyse*) *linéaire*, présent partout dans les mathématiques et dans leurs applications, dont il est l'instrument de base.

Laissons pour plus tard l'infernal triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ d'un ensemble Ω , d'une tribu borélienne $\mathcal{A}$ de parties de Ω , et d'une mesure $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{A}$ qui rebute tant d'élèves, que cette première rencontre rend trop souvent imperméables au Calcul des Probabilités, à ses charmes et à son efficacité. Et place aux formes linéaires positives, et à l'intégrale !

Dernier point à noter : on s'en tiendra, lors de l'introduction au Calcul des Probabilités, au *cas fini* (donc *a fortiori* discret) ; inutile de mêler, pour le débutant, les difficultés *conceptuelles* qui seules importent ici aux difficultés techniques liées à l'intervention de supports infinis pour certaines distributions théoriques de probabilité³.

1. LE VECTORIEL DES PARIS

La notion première est celle de *pari*.

1.1. Un *pari*, c'est la donnée d'un ensemble A d'éventualités, dont une et une seule se produira, mais on ne sait laquelle ; et, pour chaque éventualité $i \in A$, d'un nombre x_i : le gain (ou la perte), l'évaluation numérique des conséquences pour le parieur, de l'éventualité i , si celle-ci se produit.

Par exemple, un pari à pile ou face. $A = \{1, 2\}$, $x_1 = 3$, $x_2 = -5$: le parieur gagne 3 francs si la pièce tombe sur pile, perd 5 francs si c'est sur face.

Attention, à ce point de l'exposé, et jusqu'à ce que cette notion soit introduite (§. 3 ci-dessous), nous ne savons pas ce qu'est la probabilité de pile, ni celle de face. Tout ce que nous savons c'est que l'une ou l'autre de ces deux éventualités peut se produire et qu'une seule se produira effectivement. Et que nous n'avons aucun moyen d'influer sur ce qui arrivera : le hasard est aveugle ; comme chacun sait, il n'a « ni conscience, ni mémoire ». Certains l'attribueront à la providence, d'autres au diable ; les statisticiens parlent de la « nature » et de ses états, par opposition à l'homme qui, lui, peut réagir à nos propres actions.

Chaque pari x apparaît ainsi comme une suite de nombres, autant que d'éléments de A si A est fini, ce que nous supposons ici :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Si l'on joue aux dés avec deux dés, $n = 36$; si l'on joue au tiercé, et qu'il y ait dix chevaux partants, $n = 10 \times 9 \times 8 = 720$, etc...

Un pari sur l'ensemble d'éventualités A est donc en définitive une *fonction* de A dans un ensemble de nombres ; bien qu'en pratique ceux-ci soient toujours des entiers ou des décimaux on prendra le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels ou celui $\mathbb{R}$ des réels :

$$x : A \rightarrow \mathbb{R}$$

Mais il n'y a pas que dans les jeux de hasard que l'on rencontre des paris : souscrire un contrat d'assurance par exemple, peut être assimilé à tenir un pari dans lequel A est l'ensemble des risques couverts, le nombre x_i la conséquence financière

³ J'ai déjà présenté la thèse soutenue ici sur la pédagogie du Calcul des Probabilités en 1966 dans un article intitulé « De Pascal à Savage. Un chapitre de l'algèbre linéaire : le calcul des probabilités (cas fini) », *Mathématiques et Sciences humaines*, 15, 1966, p. 15-25. Texte republié la même année dans *Mathematica et Paedagogia*, 31, 1966, p. 7-20 et dans le Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. *Clamans in deserto* : car s'il est un domaine où l'enseignement des mathématiques a été victime, depuis des décennies, du phénomène de la « reproduction », c'est bien celui du Calcul des Probabilités.

du sinistre i : somme remboursée par l'assureur moins la perte afférente à ce sinistre et moins la *prime* versée pour souscrire à ce contrat.

Plus généralement on est dans une situation de pari chaque fois que l'on doit prendre une décision dont les conséquences, évaluées par des nombres, dépendent d'éventualités dues au *hasard* et sur lesquelles nous sommes par conséquent sans aucun pouvoir quant à celle qui se produira.

REMARQUE. Les nombres x_i par lesquels sont évaluées les conséquences du pari, ne sont pas nécessairement les valeurs nominales (en francs, ou en euros, ou dans toute autre unité monétaire) de la perte ou du gain encouru ; ce sont plus généralement les *utilités* numériques (au sens que les économistes donnent à ce terme) de ces conséquences pour le parieur.

1.2. Le principal des problèmes qui se posent à propos des paris est un problème de comparaison et de choix. Si l'on m'offre de tenir un pari tel que le pari à pile ou face donné plus haut en exemple, j'ai le choix entre tenir ou ne pas jouer. Ne pas jouer c'est encore un pari, le pari nul : quoi qu'il arrive, le résultat en est nul. Et il me faut comparer les deux pour arriver à une décision rationnelle. Or, cette comparaison n'est pas facile : si c'est l'éventualité 1 qui se produit, c'est tenir le pari qui est l'acte le plus avantageux (je gagne 3 francs) ; mais si c'est l'éventualité 2, c'est de ne rien faire (j'évite une perte de 5 francs). Or, je suis dans l'incertitude complète quant à ce qui va arriver, et c'est néanmoins *maintenant* qu'il me faut choisir.

De même, si l'on m'offre, pour un même ensemble A d'éventualités de souscrire à l'un ou l'autre de deux contrats d'assurance, donnés par les suites :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

il arrivera en général que pour certaines éventualités $\mathbf{x}$ soit plus avantageux que $\mathbf{y}$ ($x_i > y_i$), et que pour d'autres ce soit le cas contraire ($x_i < y_i$).

Celui qui *calcule*, comme on dit, sa décision, pourra, dans un tel cas, examiner en quoi diffèrent les deux contrats ; nous avons supposé que les conséquences sont évaluées par des nombres x_i : nous supposons en outre que l'on peut d'une part additionner ces nombres entre eux (ou les soustraire), et les soumettre à des changements d'unité (des homothéties) ; comme indiqué plus haut, on les considère toujours comme appartenant au corps $\mathbb{R}$ des réels ou à celui $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Examiner la différence entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ prend alors le sens précis de calculer la suite :

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$

On peut également lorsqu'on calcule sa décision, envisager de souscrire à la fois aux deux contrats, ce qui correspond à l'opération :

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

L'ensemble de tous les paris possibles sur un même ensemble A d'éventualités est ainsi muni d'une addition, avec les propriétés connues de l'addition vectorielle ; en particulier, le pari nul, c'est-à-dire le vecteur nul :

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

y joue, un rôle important, puisque c'est à lui que l'on devra en définitive comparer, lors d'une décision, tout autre pari.

Les homothéties de rapport λ positif ont également un sens dans ce type de calcul ; le pari :

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

homothétique de $\mathbf{x}$ dans le rapport λ est tout simplement celui qui se déduit de $\mathbf{x}$ par changement d'unité de rapport λ . Par exemple, si les conséquences x_i des éventualités i sont exprimées en francs français, et qu'on veuille les exprimer en euros, alors :

$$\lambda = 0,152449$$

En résumé, l'ensemble des paris possibles sur un même ensemble A d'éventualités est le *vectoriel*, de dimension égale au nombre d'éléments de A , ayant pour corps de scalaires le corps des réels (ou des rationnels).

L'addition $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ de deux vecteurs a pour signification : tenir à la fois les deux paris représentés par les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ respectivement. L'homothétie : $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ de rapport $\lambda > 0$ correspond à un changement d'unité sur les utilités.

Ce vectoriel est muni de sa structure d'ordre partiel :

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Leftrightarrow \forall i \in A, x_i \geq y_i$$

L'inégalité $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ signifie ainsi qu'en toute éventualité le pari représenté par le vecteur $\mathbf{x}$ est au moins aussi avantageux que celui qui est représenté par $\mathbf{y}$.

2. UNE FORME LINÉAIRE POSITIVE : L'ESPÉRANCE ET SES AXIOMES

2.1. Le problème fondamental avons-nous dit, c'est celui de la comparaison et du choix entre paris, ou entre paris et valeurs certaines. C'est plus précisément celui de la valeur, du prix, qu'il convient d'attacher à un pari, éventuellement à son utilité (toujours au sens des économistes) : les paris sont en effet des *biens* qui se vendent et s'achètent couramment. Lorsque j'achète un billet de loterie, lorsque je souscris à un contrat d'assurance et en paye la *prime*, c'est bien un pari que j'achète.

Reprenons l'exemple très simple du pari $\mathbf{x} = (3, -5)$ à deux éventualités. Si l'on me demande de payer deux francs le droit de parier, il est probable que je refuserai ; si l'on me donne un franc si je tiens le pari, peut-être accepterai-je : ce qui signifie que pour moi la valeur de ce pari se situe entre -1 et 2.

Postulons que l'on puisse effectivement fixer la valeur, le *juste prix* d'un pari : c'est le coût en deçà duquel j'estime avantageux d'acheter le pari, et au-delà duquel je

juge cet achat désavantageux. Appelons *espérance* d'un pari x , notée $E(x)$, son juste prix, le seuil dont l'*existence est ainsi postulée*.

Cette interprétation de l'espérance d'un pari comme sa valeur (ou son utilité) n'est pas nouvelle ; c'est par exemple celle de J. von Neumann dans [5] ; nous verrons plus loin qu'elle est également présente chez B. Pascal. Et c'est d'ailleurs une borne de la valeur d'un pari, et donc une borne de l'espérance, qu'exprime le dicton : « Un tiens vaut mieux que deux tu l'auras ».

2.2. Bien entendu, il faut pouvoir *calculer l'espérance* de n'importe quel pari, tout au moins, pour l'instant, de tous ceux qui admettent le même ensemble A d'éventualités, de sorte que la comparaison entre deux paris x et y se réduise à la comparaison, toujours possible, entre les deux nombres $E(x)$ et $E(y)$ que l'on aura calculés.

L'espérance doit donc être un opérateur appliquant le vectoriel des paris dans le corps représentant l'échelle des utilités numériques. Si celui-ci est le corps $\mathbb{R}$ des réels, et si nous notons $\mathbb{R}^n$ le vectoriel de dimension n des paris sur un ensemble donné A de n éventualités, l'espérance E est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:

$$E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

2.3. Parmi les opérateurs, les plus commodes algébriquement sont en l'occurrence les opérateurs *linéaires*. Mais que E doive être une forme linéaire positive, cela va se déduire de trois axiomes évidents dans l'interprétation de l'espérance d'un pari comme sa valeur, son juste prix.

On a souvent répété que « le calcul des probabilités, c'est le bon sens mis en calcul ».

Que dit le bon sens ? Que E doit satisfaire aux trois conditions axiomatiques suivantes :

$$1) \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \min_i x_i \leq E(x) \leq \max_i x_i.$$

En effet, la valeur du pari x ne saurait excéder le plus grand gain possible, ni être inférieure au plus petit. Elle doit être *intermédiaire*. C'est ce qu'exprime l'axiome 1).

$$2) \forall \lambda > 0, \forall x, E(\lambda x) = \lambda E(x)$$

En effet, la valeur du pari x doit s'exprimer dans la même unité monétaire que les gains ou pertes qui peuvent résulter des éventualités possibles. Si ces résultats sont en francs, la valeur s'exprime en francs ; si l'on passe des francs aux dollars, la nouvelle valeur s'exprime en dollars, etc. 2) est un axiome d'*homogénéité*.

$$3) \forall x, \forall y, E(x + y) = E(x) + E(y)$$

En effet, si j'achète deux biens, le prix à payer est la somme des prix de chacun d'entre eux ; il en est donc ainsi pour ces biens particuliers que sont les paris. Or on a vu supra que l'addition vectorielle $(x + y)$ de deux paris x et y s'interprète comme *tenir les deux*.

Et de fait, si j'achète deux billets de loterie (ou deux contrats d'assurances), le prix à payer est bien la somme de leurs deux prix. L'axiome **3)** d'*additivité* résulte donc lui aussi du pur *bon sens*.

REMARQUE. En pratique, l'axiome **3)** d'additivité peut être violé, lorsque le vendeur consent des « ristournes » à l'acheteur pour des achats « en gros ». Admettons cet axiome en première approximation. Ici comme dans d'autres applications des mathématiques, choisir un *modèle linéaire* n'est, en effet, qu'une approximation commode, valable localement, mais pas globalement en général. Dans le cas des espérances, il faut que les valeurs x_i en jeu soient *du même ordre de grandeur*. C'est lorsque certains x_i sont très grands par rapport à d'autres que le calcul de l'espérance pourrait conduire à des décisions paradoxales (tels les paradoxes dits de Saint-Pétersbourg au XVIII^e siècle).

Les trois axiomes (règles de bon sens) qu'on vient d'énoncer ont quelques conséquences immédiates qui sont d'ailleurs autant d'expressions du *bon sens*. Par exemple :

1) $\Rightarrow$ (4) : Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ avec $\forall i, x_i = x$, alors $E(x) = x$.

Ce qui se dit : en cas de *certitude* quant au résultat du pari (si en toute éventualité, ce résultat est le même), la valeur de celui-ci est la valeur qu'on est certain d'obtenir. En particulier, $E(\mathbf{0}) = 0$. Si le résultat est certainement nul, la valeur du pari l'est également.

De même :

1) $\Rightarrow$ (5) : $\forall i, x_i \geq 0 \Rightarrow E(x) \geq 0$.

L'opérateur E est donc *positif*. Ce qui, compte tenu de **3)**, implique sa monotonie :

$$x \geq y \ (\forall i, x_i \geq y_i) \Rightarrow E(x) \geq E(y).$$

Ce qui signifie que si le pari x est, quoi qu'il arrive, au moins aussi avantageux que le pari y , son prix ne saurait être inférieur à celui de y . Encore une question de *bon sens*.

Enfin, on démontre aisément que **2)** et **3)** impliquent **2')**.

2') $\forall \lambda < 0, \forall x, E(\lambda x) = \lambda E(x)$.

Ainsi, la règle **2)** d'homogénéité est affranchie de la condition de positivité pour les scalaires.

Conclusion de ce paragraphe : l'espérance est *une forme linéaire positive* sur le vectoriel des paris.

3. PROBABILITÉS, VARIABLES ALÉATOIRES ET « AXIOMES » DE KOLMOGOROV

3.1. Comme toute forme linéaire positive sur le vectoriel $\mathbb{R}^n$, l'espérance $E(\mathbf{x})$ se calcule donc selon le produit scalaire :

$$6) \quad E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \mathbf{p} \bullet \mathbf{x} \quad (\text{avec : } \forall i, p_i \geq 0)$$

On omettra ici la démonstration, élémentaire et classique, de 6).

Elle prouve l'existence d'un vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, celui des coefficients de la forme linéaire 6), qui est donné une fois pour toutes.

Il résulte en outre de la propriété 4) *supra*, que :

$$7) \quad 1 = \sum_{i=1}^n p_i \quad (\text{donc : } \forall i, 0 \leq p_i \leq 1)$$

Voici donc le bon sens (les axiomes 1, 2) et 3)) *mis en calcul* : la formule 6), qui, compte tenu de 7) est celle d'une *moyenne pondérée* des x_i .

Reste à *interpréter* les coefficients, les poids p_i .

Si $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ sont les n vecteurs de la *base canonique* du vectoriel $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\forall i, E(\mathbf{e}_i) = p_i$$

p_i est donc la *valeur du pari dans lequel je gagne une unité monétaire si l'éventualité i se produit, et où le résultat est nul sinon*. C'est, si je voulais tenir ce pari, ce que son achat me coûterait au *juste prix*.

Il est clair que le prix que je considérerai comme *juste* (ou *équitable*) pour le pari $\mathbf{e}_i$ sera d'autant plus élevé que mon degré de croyance en ce que l'éventualité i se produira sera lui-même élevé.

Si je pense que cette éventualité a *beaucoup de chances* de se produire, qu'elle est très vraisemblable, j'accepterai un prix élevé, proche de 1 ; si par contre, je n'en *donne pas un clou*, la valeur de $\mathbf{e}_i$ sera faible, voisine de 0. Le poids p_i s'interprète ainsi comme une fonction monotone croissante du *degré de probabilité* (au sens non technique de ce terme) que le parieur accorde à l'éventualité i .

Nous appellerons donc, *par définition* du mot *probabilité* (dans son sens technique maintenant), *probabilité de l'éventualité i* , l'espérance $E(\mathbf{e}_i) = p_i$ du pari $\mathbf{e}_i$. Le vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n)$ des poids est une *distribution de probabilité* sur l'ensemble d'éventualités A .

Quant au couple $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ constitué par le *pari $\mathbf{x}$* et la distribution de probabilité $\mathbf{p}$, c'est dans le langage technique moderne une *variable aléatoire*.

REMARQUE. Ainsi définie, la probabilité d'une éventualité traduit l'opinion du parieur sur la vraisemblance de cette éventualité. Elle est donc éminemment *subjective* ; nous verrons plus loin (§.5 *infra*) comment de subjectives, les probabilités peuvent devenir *objectives*.

3.2. Il y a les *éventualités*, qui sont les *éléments* de l'ensemble A ; il y a les *événements*, qui sont les *parties* de A . Si l'éventualité i qui se produit appartient à une partie

donnée B de A , on dit que l'évènement B s'est réalisé. Par exemple, dans le tirage de deux dés à six faces, on peut considérer l'évènement *les deux dés montrent la même face*, ou l'évènement *la somme des points est paire*, etc. ; ici, la partie correspondante de l'ensemble A des 36 éventualités est facile à déterminer. C'est parfois moins simple.

Il y a notamment l'évènement *impossible*, qui est la partie vide $\emptyset$ de A ; et l'évènement *certain* qui est A tout entier.

La *probabilité* $\Pr(B)$ d'une partie quelconque B de A , c'est *par définition l'espérance du pari*, noté $x(B)$, dans lequel je gagne une unité monétaire si l'évènement B se produit, et rien sinon.

$$\text{8) } \Pr(B) \stackrel{\text{def.}}{=} E(x(B))$$

La variable aléatoire (le vecteur) $x(B)$ a pour composantes : $x_i(B) = 1$ si $i \in B$, $x_i(B) = 0$ si $i \notin B$.

On l'appelle parfois *fonction indicatrice* de la partie B de A .

Il résulte immédiatement de la propriété **4**) des espérances et de l'axiome **1**) que :

$$\text{9) } \forall B \subset A, \quad 0 \leq \Pr(B) \leq 1, \quad \Pr(\emptyset) = 0, \quad \Pr(A) = 1.$$

D'autre part, on vérifie sans peine que si B et C sont deux parties quelconques de A , on a :

$$\text{10) } x(B \cup C) + x(B \cap C) = x(B) + x(C).$$

D'où, d'après l'axiome **3**) d'additivité des espérances :

$$E(x(B \cup C)) + E(x(B \cap C)) = E(x(B)) + E(x(C))$$

c'est-à-dire :

$$\text{11) } \forall B \subset A, \forall C \subset A, \quad \Pr(B \cup C) + \Pr(B \cap C) = \Pr(B) + \Pr(C).$$

Notamment, si les évènements B et C sont *incompatibles*, c'est-à-dire si l'évènement $B \cap C$ est impossible, les parties B et C sont *disjointes*, et l'on a pour ce cas particulier de **11**) :

$$\text{12) } B \cap C = \emptyset \Rightarrow \Pr(B \cup C) = \Pr(B) + \Pr(C).$$

Ainsi, une distribution de probabilité définit bien une *mesure*, au sens technique du terme, sur A .

REMARQUE. L'*axiome*, si peu intuitif, d'additivité des probabilités, dans l'axiomatique classique de Kolmogorov, est ici une conséquence immédiate de l'axiome **3**) d'additivité des espérances qui, lui, est tout à fait naturel en termes de valeurs de paris ; il n'exprime en effet, répétons-le, que cette évidence que pour l'achat de deux marchandises (et modulo la remarque sur les ordres de grandeurs faite p. 86 §. 2.3 ci-dessus), le prix à payer est la somme des prix de chacune d'entre elles. Autrement dit, que l'on ne peut avoir à la fois « *le beurre et l'argent du beurre* ».

D'ailleurs, la formule **6**) de calcul des espérances donne dans le cas particulier de la variable aléatoire $x(B)$:

$$13) \Pr(B) = E(x(B)) = \sum_{i \in B} p_i.$$

C'est l'expression permettant de calculer les probabilités des $(2^n - 1)$ évènements possibles (non vides) à partir des seules n probabilités élémentaires p_i .

4. ESPÉRANCES ET PROBABILITÉS CONDITIONNELLES : PRINCIPE DE PASCAL

4.1. Jusqu'ici nous n'avons considéré des paris et des variables aléatoires que sur un même ensemble d'éventualités A .

Pour la pratique des décisions à prendre face à l'incertain, ceci est évidemment insuffisant. En effet, l'ensemble des éventualités possibles varie au cours du temps, en raison d'informations nouvelles recueillies, ou d'évènements qui se produisent ; en bref, de l'histoire qui se déroule.

Il faut donc ajouter une dimension *temporelle* (certains diraient : une *dynamique*) à la théorie des paris et de leurs espérances.

Plaçons-nous dans le cas d'un jeu de hasard qui se déroule en plusieurs coups ; à un certain moment, l'ensemble des éventualités est A , et mon pari est x , une fonction de A dans $\mathbb{R}$.

Si l'on joue un coup, l'ensemble A d'éventualités est partitionné en classes $A_1, A_2, \dots, A_6$, selon le résultat de ce coup, de sorte qu'au coup suivant l'ensemble d'éventualités sera réduit soit à A_1 , soit à A_2 , ..., soit à A_6 .

Par exemple, si l'on lance trois fois de suite un dé à six faces, A est, avant que l'on commence, l'ensemble des 216 triplets (u, v, w) de nombres entiers de 1 à 6. À l'issue du premier coup, on aura pour nouvel ensemble d'éventualités une et une seule des six classes $A_1, A_2, \dots, A_6$: A_1 est l'ensemble des 36 triplets commençant par 1, A_2 celui des triplets commençant par 2, etc...

À l'issue d'un coup, l'ensemble d'éventualités se trouve donc réduit de A à l'une des classes A_j , de la partition correspondante de A ; quant au pari x (à la fonction x de A dans $\mathbb{R}$), il se trouve réduit à sa restriction x_{A_j} à A_j . Si l'on préfère le langage vectoriel, x_{A_j} est la projection de x sur le sous-espace engendré par A_j .

L'espérance de x_{A_j} est une forme linéaire positive de l'espace des fonctions de A_j dans $\mathbb{R}$. C'est ce qu'on appelle l'*espérance conditionnelle* de x , si A_j , considéré comme évènement de A , *se produit*. Notons-la $E_{A_j}(x_{A_j})$, où E_{A_j} est l'opérateur espérance pour l'ensemble A_j d'éventualités ; notons de même E_A l'espérance lorsque A tout entier est l'ensemble d'éventualités.

C'est ici qu'intervient ce que nous appellerons *le principe de Pascal* et qui est une règle d'*enchaînement* dans le temps des espérances : $E_{A_j}(x_{A_j})$ est la valeur du pari x_{A_j} ; ce qui résulte du premier coup que nous jouons, avec A comme ensemble d'éventualités, ce sont les paris $x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_6}$, chacun ayant pour valeur (c'est le mot

même employé par Pascal) son espérance. Par conséquent, nous pouvons écrire, en appliquant la formule générale **6)** supra du calcul de l'espérance :

$$\mathbf{14)} \quad E_A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^r P_A(A_j) E_{A_j}(\mathbf{x}_{A_j})$$

où $P_A(A_j) = E_A(\mathbf{x}(A_j))$ est la probabilité de l'évènement A_j conditionnellement à A comme ensemble d'éventualités.

Le plus souvent, on omet dans l'écriture de **14)** le conditionnement par l'ensemble initial d'éventualités, ce qui donne :

$$\mathbf{14')} \quad E(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^r P(A_j) E_{A_j}(\mathbf{x}_{A_j}).$$

4.2. J'appelle *principe de Pascal*, la règle **14)** d'*enchaînement des espérances*. Voici pourquoi.

Lisons en effet la lettre du 29 juillet 1654 de Blaise Pascal à Pierre Fermat (Cf. [6]) au sujet du *problème des partis* (ici, *parti* signifie *partage*). Mais d'abord, quel est ce problème ?

Deux joueurs jouent à pile ou face (à l'époque, on dit *pile ou croix*) en *trois parties et chacun a mis 32 pistoles au jeu*. Celui qui a parié sur pile empoche les 64 pistoles dès que pile sera apparu trois fois au cours d'une suite de coups, et inversement pour celui qui a parié sur face. On voit que cinq coups (cinq *parties*, dans le langage de Pascal) au plus suffisent à décider, et le jeu peut se schématiser par le réseau ci-après (Figure 1), où l'on a indiqué pour chaque situation le *score* de chacun des joueurs, et aux sommets terminaux ce qu'empoche celui qui a parié sur face.

Figure 1

« Voici à peu près [dit Pascal] comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties... ». Soulignons le mot *valeur*, qui indique bien ce dont il s'agit pour Pascal : calculer l'espérance d'un pari dans le sens que nous lui avons donné ici, le juste prix de ce pari.

« Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ... ». Ils sont, dans le déroulement du jeu, arrivés à la situation marquée par le sommet (1,2) du graphique, en supposant que le premier est le parieur de face. « Ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles ».

Nos joueurs sont dans la situation (1,2) qui peut les amener aux situations finales (3,2), (2,3), (1,3). Pour eux, et dans nos notations, l'ensemble d'éventualités finales, à partir de ce coup, est :

$$A = \{(3,2), (2,3), (1,3)\}.$$

S'ils le jouent, A est partitionné en :

$$A_1 = \{(3,2), (2,3)\} \quad A_2 = \{(1,3)\}$$

selon que le hasard les conduit à la situation (2,2) ou à la situation (1,3).

L'espérance (la valeur) si A_2 est réalisé du parieur de face est la somme certaine 64 ; si c'est A_1 qui est réalisé, son espérance est de 32 car, dira plus loin Pascal, *le hasard est égal*.

Mais remarquons le petit membre de phrase : « ... s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent... ». S'ils parviennent à la situation (2,2), nos joueurs pourront soit continuer à jouer, et remettre la décision du partage au hasard, soit ne pas jouer : la somme, que chacun devra retirer en ce dernier cas, est précisément leur espérance (estimée ici à 32 pistoles). Cette espérance est bien ici la valeur *certaine* qui équivaldrait à tenir le pari, le prix du pari.

Et la suite est encore plus nette : « Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32 ». « Il lui appartient 32 ». Son espérance, conditionnellement à A_1 , est bien pour Pascal, la valeur qu'il convient de donner à cette situation A_1 ; en A_1 en effet, le coup dans lequel le hasard désignerait le gagnant n'est pas encore joué. Donc, s'ils ne veulent point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres ». Il aura donc 48 pistoles et son adversaire 16.

Ici, Pascal dit pratiquement tout en quelques lignes. D'abord l'addition de deux paris sur le même ensemble $\{A_1, A_2\}$ d'éventualités : le pari (32, 32) et le pari (0, 64) ; et l'addition correspondante des espérances : l'espérance du pari global est la somme des deux espérances.

Et le résultat final s'exprime bien par :

$$E_A = p(A_1) E_{A_1} + p(A_2) E_{A_2}$$

$$\text{ici : } p(A_1) = p(A_2) = \frac{1}{2}, \quad E_{A_1}(x) = 32, \quad E_{A_2}(x) = 64 = 32 + 32$$

$$\text{d'où : } E_A(x) = \frac{1}{2}32 + \frac{1}{2}(32 + 32) = 32\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}32 = 32 + 16 = 48.$$

Ayant calculé l'espérance (il dit le *parti*, c'est-à-dire le partage en (1,2)), Pascal le calcule ensuite de proche en proche, en (0,2), puis en (0,1) (sur la *diagonale*, le partage est évidemment égal) et par symétrie l'espérance du joueur de face en chaque position du jeu (Figure 2). À chaque étape, on applique la règle d'enchaînement **14**) des espérances. (Sur l'histoire du problème des partis, de l'origine et de la naissance du Calcul des Probabilités, voir notamment les articles d'E. Coumet [1], d'A.-S. Godfroy-Génin [2] et de N. Meusnier [4], qui fournissent, en outre, une bibliographie très complète).

Figure 2

REMARQUE **14**) est une *règle de récurrence*, mais dont on remarque qu'elle s'applique à l'inverse du sens habituel : ici, on part des situations *finales* , et on *remonte* à chaque étape des *positions subséquentes* (à une position donnée) à la position qui les précède immédiatement. L'invention de cette récurrence «a retro» est une autre manifestation du génie de Pascal.

On pourra également noter que c'est à l'occasion du *problème des partis* que B. Pascal rédigea son traité du Triangle Arithmétique.

4.3. De ce que nous avons appelé ici le principe (ou la règle) de B. Pascal, on déduit enfin le dernier axiome, dans la présentation classique (Kolmogorov) du Calcul des Probabilités, celui des probabilités composées.

La règle de Pascal s'écrit en effet :

$$\mathbf{14)} \quad E_A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^r P_A(A_j) E_{A_j}(\mathbf{x}_{A_j})$$

pour toute partition de l'ensemble A d'éventualités en r classes A_j .

Prenons pour $\mathbf{x}$ du premier membre la fonction indicatrice $\mathbf{x}(B)$ d'une partie quelconque B de A . La restriction $\mathbf{x}_{A_j}(B)$ de $\mathbf{x}(B)$ à A_j vaut 1 pour les éléments de $B \cap A_j$ et 0 ailleurs. D'où :

$$\mathbf{15)} \quad P_{A_j}(B) \stackrel{\text{def}}{=} E_{A_j}(\mathbf{x}_{A_j}(B)) = E_{A_j}(\mathbf{x}_{A_j}(B \cap A_j)) \stackrel{\text{def}}{=} P_{A_j}(A_j \cap B)$$

$P_{A_j}(B)$ est, *par définition*, la *probabilité conditionnelle* de B si A_j est réalisé (on la note parfois $P(B/A_j)$ ou encore $P(B \text{ si } A_j)$).

La règle **14)** de Pascal se réécrit alors pour les probabilités conditionnelles :

$$\mathbf{16)} \quad P_A(B) = \sum_{j=1}^r P_A(A_j) P_{A_j}(B)$$

Particularisons encore : supposons A partitionné en deux classes, X et sa complémentaire $\bar{X}$ dans A ; soit Y une partie quelconque de A (un *évènement* quelconque), et posons, dans **16)** :

$$B = X \cap Y$$

Il vient :

$$P_A(X \cap Y) = P_A(X) P_X(X \cap Y) + P_A(\bar{X}) P_{\bar{X}}(X \cap Y)$$

D'après la définition **15)**, on a :

$$P_{\bar{X}}(X \cap Y) = P_{\bar{X}}((X \cap Y) \cap \bar{X}) = P_{\bar{X}}(\emptyset) = 0$$

et :

$$P_X(X \cap Y) = P_X(Y)$$

Il vient finalement :

$$\mathbf{17)} \quad P_A(X \cap Y) = P_A(X) P_X(Y).$$

Soit, en omettant de noter l'ensemble initial A d'éventualités, la *formule* axiomatique classique des probabilités composées (dernier des axiomes de Kolmogorov) :

$$\mathbf{17')} \quad P(X \cap Y) = P(X) P_X(Y).$$

C'est la relation **17)** qui est spécifique des mesures de probabilité parmi toutes les mesures sur un ensemble A .

Si $P_A(X) > 0$, cette relation peut encore s'écrire :

$$P_X(Y) = \frac{P_A(X \cap Y)}{P_A(X)}$$

Sous cette forme apparaît sa signification essentielle : la distribution de probabilité P_A , c'est, pour l'ensemble A d'éventualités, une façon de traduire l'opinion du parieur sur la vraisemblance des événements (parties) de A ; l'égalité ci-dessus indique comment il doit *modifier son opinion* lorsque de A , l'ensemble d'éventualités se réduit à un sous-ensemble X de probabilité non-nulle.

REMARQUE. Le troisième axiome de Kolmogorov, celui de l'additivité des probabilités d'événements disjoints, étant lui aussi un cas particulier de la règle pascalienne d'enchaînement des espérances, une autre voie de présentation aurait été de partir d'emblée de paris dont les résultats sont eux-mêmes des paris, chacun évalué par son espérance, et toutes les espérances étant conditionnelles.

C'est à cela que nous invite Pascal et que développe un auteur tel que J. von Neumann (Cf. [6]) pour les besoins de la théorie des jeux de stratégie, ou L.J. Savage dans [9] ; mais je pense que pour les débutants il est préférable d'opérer progressivement, comme on l'a fait ici.

5. DES PROBABILITÉS «SUBJECTIVES» AUX PROBABILITÉS «OBJECTIVES» : JACQUES BERNOULLI ET LA STATISTIQUE INFÉRENTIELLE

5.1. Reprenons : L'espérance $E(x)$ de tout pari (variable aléatoire) x sur un ensemble A de n éventualité est, en vertu des axiomes **1), 2), 3)** de *bon sens*, une application linéaire positive $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Elle se *calcule* par la formule :

$$\textbf{6) } \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad E(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p \bullet x$$

$$\text{avec : } \forall i, 1 \geq p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Le vecteur p est appelé *distribution de probabilité* sur A , et pour toute partie $B \subset A$ (événement de A), sa *probabilité* dans la distribution p est par définition :

$$P(B) = E(x(B)) = \sum_{i \in B} p_i.$$

Quant aux règles de *calcul* sur les probabilités, ce sont celles **9), 11), 12), 17)** que nous avons déduites des axiomes de l'espérance et de la règle d'enchaînement de B. Pascal.

Pour mettre en œuvre ce calcul, et l'appliquer à des situations réelles de jeux de hasard ou de décisions face à l'incertain, encore faut-il avoir un moyen d'*estimer* les coefficients p_i de **6)**. Il y a en effet une infinité de distributions de probabilités p sur A . Laquelle choisir ?

L'*interprétation* des p_i comme traduction numérique, sur une échelle allant de 0 à 1, de l'opinion du parieur ou du décideur quant au degré de vraisemblance de chaque éventualité i nous met sur la voie.

Dans le cas des jeux de société où interviennent des *coups* au hasard, les choses sont relativement claires, à condition toutefois que le joueur sache que les dés ne sont pas pipés, ni les cartes biseautées ; et que dire cependant de la façon de lancer le dé ou de la manière de battre les cartes ? Pour les décisions que doivent prendre un assureur ou un assuré, un chef d'entreprise ou un stratège, voire un statisticien, tout est *a priori* beaucoup moins clair.

Chacun s'efforcera de baser son estimation des probabilités en jeu sur ce qu'il sait des conditions et des contraintes de la situation sur laquelle il doit porter un jugement, ou sur son expérience de situations analogues, etc.

Il reste que chacun *aura sa propre estimation* des probabilités p_i , et que Pierre aura en général une estimation différente de celle de Paul : les probabilités sont essentiellement *subjectives*. Comment passer de cette subjectivité à des estimations *objectives* ?

5.2. Une analogie simple le fera comprendre.

Prenez quelques personnes assises dans une même pièce, par exemple vos élèves dans leur salle de classe. Et demandez-leur d'estimer, à vue de nez, le volume de cette pièce. Ces estimations, subjectives, varieront de l'un à l'autre : tel dira 100 m^3 , tel autre 150, ou encore 190. Comment les met-on d'accord ?

D'abord, en leur rappelant que la géométrie euclidienne élémentaire constitue une *théorie* mathématique éprouvée de l'espace, des corps qui lui appartiennent, et des relations entre ceux-ci ; et qu'elle fournit, à partir de quelques axiomes (là aussi de bon sens) l'assurance de l'existence d'une *mesure* pour les longueurs, les aires et les volumes, et les formules permettant de les *calculer*. Sur ces points, tout le monde sera d'accord ; en particulier, pour notre exemple, sur la *formule* de calcul du volume d'un parallélépipède à partir des longueurs de ses arêtes.

Reste à fournir l'instrument de mesure (ou, plus précisément, de *mesurage*), un mètre ruban de couturière par exemple, qui permettra une estimation, *objective* celle-là, des dimensions de la salle, et partant de son volume.

Objective, en ce sens que tout le monde aura la même, mais néanmoins *approximative*. Ce sur quoi tout le monde sera d'accord, c'est sur la *fourchette*, qui dépend du degré de précision de l'instrument de mesurage utilisé, dans laquelle il convient de situer la *vraie valeur* de ce volume.

5.3. Pour les probabilités, la *théorie* mathématique est celle que nous avons esquissée ci-dessus de ce que Pascal nommait *géométrie du hasard* : axiomes des espérances, ayant pour conséquence l'existence d'une *mesure* de probabilité et des règles à appliquer pour *calculer* sur celle-ci.

Si tout le monde est d'accord sur ce point, il reste la dernière étape : fournir l'instrument de mesurage.

C'est là qu'intervient la *statistique inférentielle*, qui est le complément nécessaire du Calcul des Probabilités, et repose sur celui-ci.

Le fondateur : Jacques Bernoulli, né en 1654, la même année que le Calcul des Probabilités, une année à marquer d'une pierre blanche dans l'histoire des mathématiques.

Dès 1689, semble-t-il, J. Bernoulli démontre, en appliquant les règles du Calcul des Probabilités, le théorème connu aujourd'hui (cette appellation date du XIX^e siècle) sous le nom de *loi des grands nombres*. Théorème qui est à la base de toutes les méthodes d'estimation des valeurs numériques approchées de probabilités dont la valeur exacte est inconnue. (Sur J. Bernoulli, les probabilités et la statistique, voir [3] et [4] de la bibliographie).

Que dit, en effet, le théorème de Jacques Bernoulli ? Soit p la probabilité, inconnue, qu'a, par exemple, une pièce de monnaie donnée de tomber sur son côté *face*, et soit X_n le nombre, aléatoire, de fois que *face* apparaît dans une série de n jets de cette pièce. Posons :

$$18) \Pi_n(\varepsilon, p) = P_r \left(\left| \frac{X_n}{n} - p \right| > \varepsilon \right)$$

Π_n est la probabilité pour que la fréquence $\frac{X_n}{n}$ observée au cours de cette expérimentation s'écarte de p de plus de ε . Alors on a (théorème de J. Bernoulli) :

$$19) \forall \varepsilon > 0, \forall p(0 < p < 1), \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(\varepsilon, p) = 0.$$

Ce qui signifie que si le nombre n d'observations est assez grand, il sera très peu probable (Π_n sera petit) que la fréquence observée sorte d'une *fourchette* donnée par l'intervalle $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, si petit que soit ε .

Des théorèmes ultérieurs montreront d'ailleurs que pour une valeur α fixée comme seuil à la probabilité Π_n (on veut $\Pi_n \leq \alpha$), la *précision* ε de l'approximation de p par la fréquence observée est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, moyennant quelques conditions assez générales qu'il n'y a pas lieu d'indiquer ici, car l'objet de cet article n'est pas de traiter de la statistique mathématique. Il s'agit seulement de bien situer son rôle dans l'utilisation du Calcul des Probabilités.

5.4. Remarquons toutefois que l'approximation s'exprime ici de façon beaucoup plus subtile que pour les mesurages ordinaires : il y faut non seulement un encadrement à ε près pour la *vraie valeur*, mais en plus une probabilité $(1 - \Pi_n)$ d'appartenance à cet encadrement. On voudra que le premier soit petit, et la seconde proche de 1 ; Π_n ne devra pas dépasser un seuil α qui, dans la pratique, sera presque toujours choisi de l'ordre de 1 à 5 %. C'est la donnée de ε et de α qui déterminent le nombre n d'observations nécessaires (la taille de l'échantillon) ; plus généralement, deux de ces nombres ε , α et n déterminent le troisième.

Peut-être est-ce cette subtilité dans leur mesurage qui est l'une des principales causes d'incompréhension des probabilités, et de la fausse opposition entre probabilités *subjectives* et probabilités *objectives* ?

Où l'objectivité se trouve-t-elle en effet dans l'estimation de la probabilité d'un évènement tel que celui pris ici en exemple (l'évènement : la pièce de monnaie tombe sur *face*) ?

D'abord dans la fréquence $\frac{X_n}{n}$ constatée qui est la même pour tous ceux qui observent le même tirage.

Ensuite, dans la fixation de deux des trois nombres ε , α et n , sur lesquels, pour une situation donnée, tous les observateurs *objectifs* de celle-ci devront préalablement s'accorder.

Enfin, et essentiellement, dans les règles même selon lesquelles on doit calculer sur des probabilités, c'est-à-dire sur les axiomes de ce calcul. Donc, *in fine*, et selon la méthode d'initiation que je préconise, les axiomes (§. 2.2.) du calcul linéaire des espérances.

Est-on d'accord ou non sur ces règles ?

Pour la compréhension de la géométrie du hasard, toute la question est là.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

- [1] COUMET, E., « La théorie du hasard est-elle née par hasard ? », *Annales (E.S.C.)*, 25-3 (1970), p. 574-598.
- [2] GODFROY-GÉNIN, A.-S., « Pascal : la géométrie du hasard », *Mathématiques et Sciences humaines*, n° 150, p. 7-39.
- [2] GUILBAUD, G.Th., « Les problèmes de partage », *Éléments de la théorie mathématique des jeux*, Paris, Dunod, 1968, p. 1-38.
- [3] MEUSNIER, N., « La passe de l'espérance. L'émergence d'une mathématique du probable au XVII^e siècle », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, n° 131 1995, p. 5-28. Seconde version : « L'émergence d'une mathématique du probable au XVII^e siècle », *Revue d'histoire des mathématiques*, 2, 1996, p. 119-147.
- [4] MEUSNIER, N., *Jacques Bernoulli et l'ars conjectandi*, documents pour l'étude de l'Émergence d'une Mathématisation de la Stochastique, Rouen, I.R.E.M., 1987.
- [5] NEUMANN (von), J., MORGENSTERN, O., "The Notion of Utility", *Theory of games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944, 3^e ed. 1953, chap. 3, p. 15-30.
- [6] PASCAL, B., « Lettres à Fermat des 29 juillet et 24 août 1654 (la règle des partis) », *Œuvres complètes*, Bibliothèque de la Pléiade, Paris, N.R.F., 1960, p. 75-90 ; cf. également toutes les autres éditions des *Œuvres Complètes* de Blaise Pascal.
- [7] ROSENSTIEHL, P., « Jeux de pur hasard », *Jeux et sports*, R. Caillois éd., Encyclopédie de la Pléiade, Paris, N.R.F., 1967, p. 826-836.
- [8] SAVAGE, L. J., *The Foundations of Statistics*, New York, Wiley, 1954.