Conditions suffisantes de monotonie des procédures de rangement itératives

Sufficient conditions of monotonicity for a ranking procedure

Xavier Juret

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/msh/2880>

DOI : 10.4000/msh.2880

ISSN : 1950-6821

Éditeur

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée

Date de publication : 1 mars 2003

ISSN : 0987-6936

Référence électronique

Xavier Juret, « Conditions suffisantes de monotonie des procédures de rangement itératives », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 161 | Printemps 2003, mis en ligne le 10 février 2006, consulté le 23 juillet 2020. URL : <http://journals.openedition.org/msh/2880> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/msh.2880>

CONDITIONS SUFFISANTES DE MONOTONIE DES PROCÉDURES DE RANGEMENT ITÉRATIVES

Xavier JURET¹

RÉSUMÉ – Dans cet article, nous présentons des conditions suffisantes de monotonie d'une procédure de rangement obtenue par itération d'une procédure de choix. En se plaçant dans le cadre de l'agrégation des préférences individuelles, nous introduisons la notion de monotonie et présentons des résultats utilisant les propriétés de rationalisation et de stabilité des procédures de choix. Après avoir montré que ces résultats ne couvraient pas l'ensemble des procédures itératives de rangement monotones, nous introduisons de nouveaux résultats basés cette fois sur la notion de respect d'un score monotone. Ces résultats sont ensuite mis en application dans la dernière section pour prouver la monotonie de différentes procédures de rangement.

MOTS-CLÉS – Aide à la décision, Décision de groupe, Monotonie, Procédures itératives, Rangement multicritère

SUMMARY – Sufficient Conditions of Monotonicity for a Ranking Procedure
In this paper, we present some sufficient conditions of monotonicity for an iterative ranking procedure. In the framework of the aggregation of individual preferences, after recalling the notion of monotonicity, we present some results using rationality and stability conditions of choice procedures. After showing that not all monotonic iteratives ranking procedures are concerned by the previous results, we introduce new results using the notion of respect of a monotonic scoring function. Then, these results are applied to establish the monotonicity of several iteratives ranking procedures.

KEYWORDS – Decision making, Group decision, Iteratives procedures, Monotonicity, Multicriteria ranking

1 INTRODUCTION

La complexité de nombreux problèmes de décision fait que beaucoup de procédures de rangement sont obtenues par un processus impliquant différentes étapes. Mais de tels processus comportent souvent de nombreuses failles car, en général, à chaque étape, seule une partie des informations est exploitée et des problèmes dus à ces visions partielles peuvent apparaître. Dans cet esprit, l'un des principaux problèmes qui peut survenir est la violation de l'axiome de monotonie. L'idée générale derrière cette notion est que la position d'un candidat en fin de processus ne doit pas se dégrader lorsque les données initiales le concernant sont améliorées. Ce principe semble être une propriété naturelle et presque indispensable pour toute procédure de choix ou de rangement, mais on s'aperçoit que de nombreuses procédures de rangement ne respectent pas cette condition lorsqu'elles

---

¹LIP6 - Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Case 169, 4 place Jussieu 75252 Paris cedex 05, Xavier.Juret@lip6.fr

sont issues de l'itération de procédures de choix. Il semble alors intéressant de connaître quelles sont les procédures de choix qui, lorsqu'elles sont itérées, amèneront un rangement monotone. Certains travaux ont permis de dégager des conditions sur ces procédures de choix assurant la non-monotonie de la procédure de rangement. Ainsi Smith [15] a montré que certaines fonctions de choix basées sur un score engendrent par itérations une procédure de rangement non-monotone (c'est le cas en particulier de la procédure de Borda [1]). Perny [9] a montré des problèmes du même type concernant d'autres procédures de rangement par choix itérés comme celles utilisées dans la méthode Electre III [12]. Bouyssou donne dans le cadre des comparaisons par paires des conditions suffisantes d'une part et nécessaires d'autre part de monotonie d'une procédure de rangement itérative [3]. Durand [4] a également montré qu'une procédure de rangement issue de l'itération d'une procédure de choix respectant une condition forte de monotonie sera paradoxalement non-monotone. Enfin, nous avons montrés des résultats similaires mais utilisant cette fois des hypothèses moins fortes de monotonie et en étudiant d'autres formes de monotonie [5]. Si ces différents travaux semblent indiquer que peu de procédures de choix assurent un rangement monotone, il y a peu de travaux concernant la recherche de conditions suffisantes de monotonie d'un rangement issu de l'itération de procédures de choix. C'est donc dans ce cadre que se s'inscrit cet article. Dans un premier temps, nous rappelons des résultats de conditions suffisantes issues d'une part de la rationalisation des procédures de choix et d'autre part de conditions de stabilité. Nous soulignons alors quelques limites de ces résultats qui nous amèneront, dans un second temps, à introduire la notion de score monotone et à présenter de nouvelles conditions suffisantes de monotonie (qui s'avèrent être même parfois nécessaires et suffisantes) issues du respect itératif de ces scores monotones. Enfin, nous appliquons ces dernières conditions à la démonstration de la monotonie de quelques procédures de rangement bien connues. Pour faciliter la lecture de ce papier, les démonstrations des résultats sont reportées en fin de document. On se place ici dans le cadre de l'agrégation des préférences individuelles mais les résultats se transposent aisément au cadre de la décision multicritère [10].

2 MONOTONIE ET RANGEMENTS ITÉRÉS : DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Notion de profil. On se place ici dans le cadre de l'agrégation des préférences individuelles. On définit alors un *profil* comme un ensemble d'expressions de préférences d'individus. Ainsi, pour un ensemble d'individus $N = \{1, \dots, p\}$, un profil est de la forme $\pi = (\succsim_1, \dots, \succsim_p)$. L'ensemble des $\succsim_i$ est un ensemble de préordres totaux représentant les préférences des individus sur un ensemble de candidats $X = \{a, b, \dots\}$. On rappelle qu'un préordre total est une relation binaire réflexive, transitive et complète. et qu'il peut se décomposer en un ensemble de classes d'équivalence. Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, la proposition $a \succsim_j b$ signifie alors que le candidat a est préféré ou équivalent au candidat b pour l'individu j . Cette relation de préférence large se décompose en deux relations $\succ_j$ et $\sim_j$. La proposition $a \succ_j b$ signifie alors que a est strictement préféré à b et $a \sim_j b$, relation appelée généralement indifférence, signifie que ces candidats sont considérés comme équivalents pour cet individu. Pour tout préordre total $\succsim$ défini sur X , $\sim$ est une relation d'équivalence et permet ainsi de décomposer X en classes d'équivalence. On notera $P(X)$ l'ensemble des préordres totaux définis sur X et $\Pi(X)$ l'ensemble des profils sur X . On notera également $\Omega(X) = \{(A, \pi) : A \subseteq X \setminus \emptyset, \pi \in \Pi(A)\}$ et

$\Delta(X) = \{P(A) : A \subseteq X \setminus \emptyset\}$. Par exemple, un profil peut se présenter sous la forme suivante :

$$\pi = \begin{cases} c \succ_1 a \succ_1 b \succ_1 d \\ b \succ_2 (c \sim_2 d) \succ_2 a \\ c \succ_3 a \succ_3 b \succ_3 d \end{cases}$$

Ici on a un ensemble de trois individus qui expriment chacun leurs préférences sous la forme d'un préordre total sur l'ensemble des quatre candidats $\{a, b, c, d\}$. Ainsi l'individu 2 préfère dans ce cas le candidat b aux candidats c et d qui sont eux-même préférés au candidat a . Pour simplifier les notations, lorsqu'il n'est pas nécessaire de distinguer les individus entre eux, une seule notation ($\succ$) est utilisée pour désigner la préférence des individus (comme présenté ci-dessous).

$$\pi = \begin{cases} c \succ a \succ b \succ d \\ b \succ (c \sim d) \succ a \\ c \succ a \succ b \succ d \end{cases}$$

On pourra alors également noter ce profil sous la forme :

$$\pi = (2 : \{c \succ a \succ b \succ d\} ; 1 : \{b \succ (c \sim d) \succ a\})$$

Procédures de choix et de rangement. Dans le contexte de l'agrégation de préférences individuelles, suivant l'ensemble des données considérées et la problématique posée (choix ou rangement), il existe différents types de procédures de décision. On définit ainsi des procédures qui ont pour but de choisir, parmi les candidats proposés, le ou les meilleures d'entre-eux suivant un profil de préférences donné. Ainsi, une *procédure de choix* (C) se définit par une application :

$$\begin{aligned} C : \Omega(X) &\rightarrow 2^X \setminus \emptyset \\ (A, \pi) &\mapsto C(A, \pi) \subseteq A \end{aligned}$$

On utilise également des *fonctions de choix* (F) qui sélectionnent cette fois un ou plusieurs candidats et décrivent les choix d'un individu indépendamment d'un profil.

$$\begin{aligned} F : 2^X \setminus \emptyset &\rightarrow 2^X \setminus \emptyset \\ A &\mapsto F(A) \subseteq A \end{aligned}$$

En notant $\pi|_A$ la restriction d'un profil π à un ensemble A , on remarque que pour une procédure de choix C et pour un profil $\pi \in \Pi(X)$, C_π définie par : $\forall A \neq \emptyset \subseteq X, C_\pi(A) = C(A, \pi|_A)$ est une fonction de choix. On réutilisera par la suite la notation C_π pour désigner la fonction de choix induite par la procédure de choix C sur le profil π comme indiqué ci-dessus. Enfin pour la problématique du rangement, on utilise des *procédures de rangement* (R) définies sur X qui ont pour but de ranger les candidats sous la forme d'un préordre total.

$$\begin{aligned} R : \Omega(X) &\rightarrow \Delta(X) \\ (A, \pi) &\mapsto R(\pi) \in P(A) \end{aligned}$$

Mécanisme de rangement par choix itérés. Il est classique d'utiliser des mécanismes itératifs pour la prise de décision. On peut citer l'exemple du processus français d'élection du président de la république (scrutin uninominal à deux tours) ou par exemple les méthodes Electre III et IV [12]. Les mécanismes de choix itérés sont couramment utilisés car ils facilitent le suivi du processus qui mène à la décision et ils correspondent à un mode de raisonnement proche de raisonnements humains courants (élimination une à une des possibilités de choix, rangement progressif du premier au dernier, etc...). Dans le cadre de cet article, nous utilisons uniquement le mécanisme de rangement par itérations successives d'une procédure de choix que nous définissons formellement comme suit, à la suite de [11].

DÉFINITION 1. Pour $A \subseteq X$ et $\pi \in \Pi(A)$, la procédure de rangement par choix itérés RIT_C est définie par l'algorithme suivant :

Procédure $RIT_C(A, \pi)$

```

1   $k \leftarrow 1$ 
2   $A_1 \leftarrow A$ 
3  répéter
4       $C_k \leftarrow C(A_k, \pi|_{A_k})$ 
5       $A_{k+1} \leftarrow A_k \setminus C_k$ 
6       $k \leftarrow k + 1$ 
7  jusqu'à  $A_k = A_{k-1}$ 
8   $\forall a, b \in A, a RIT_C(A, \pi) b \iff (\exists i, j \in 1, \dots, n : i \leq j, a \in C_i, b \in C_j)$ 

```

On dit ici que l'itération est *locale* car à chaque itération on restreint les préférences à l'ensemble des candidats qui n'ont pas encore été choisis. Ainsi, si un candidat a été choisi lors de la première itération, il n'interviendra plus dans les choix faits lors des itérations suivantes. Le rangement est donc obtenu en sélectionnant le groupe des meilleurs candidats qui formera la première classe du rangement. La seconde classe sera obtenue en réitérant la procédure de choix sur l'ensemble des candidats non encore sélectionnés. On continue ainsi ce processus jusqu'à ce que tous les candidats soient rangés.

Monotonie et supermonotonie. Ces propriétés concernent la permanence d'un choix consécutivement à l'amélioration d'un candidat dans un profil. On s'intéresse ici à la notion d'amélioration élémentaire qui se définit comme suit :

DÉFINITION 2. $\pi' = (\succsim'_1, \dots, \succsim'_p)$ améliore de façon élémentaire b par rapport au profil $\pi = (\succsim_1, \dots, \succsim_p)$ si et seulement si :

$$\exists a \in X, \exists i \in N \text{ tels que : } \begin{cases} \forall j \neq i, \succsim_j = \succsim'_j \\ \forall \{y, z\} \neq \{a, b\} \in A^2, y \succsim_i z \iff y \succsim'_i z \\ (a \succ_i b \text{ et } b \succsim'_i a) \text{ ou } (a \sim_i b \text{ et } b \succ'_i a) \end{cases}$$

De manière plus explicite, a et b étant placés consécutivement et dans cet ordre dans la préférence d'un individu du profil de départ, dans le nouveau profil ces positions sont inversées de manière à favoriser b . Ce changement doit être le seul effectué afin que l'amélioration soit élémentaire et n'intervienne ainsi pas sur les positions des autres

candidats. Dans l'exemple suivant, et plus généralement par la suite, on note $\pi' >_{b/a} \pi$ (ou plus simplement $\pi' >_b \pi$ lorsque le candidat défavorisé n'a pas d'importance) :

$$\pi = \left\{ \begin{array}{l} c \succ_1 a \succ_1 b \succ_1 d \\ b \succ_2 (c \sim_2 d) \succ_2 a \end{array} \right. \text{ et } \pi' = \left\{ \begin{array}{l} c \succ_1 b \succ_1 a \succ_1 d \\ b \succ_2 (c \sim_2 d) \succ_2 a \end{array} \right.$$

On remarque que par la transformation inverse, π améliore a aux dépens de b par rapport au profil π' . A l'aide de cette définition d'amélioration d'un profil, la monotonie se définit de la manière suivante :

DÉFINITION 3. *Une procédure de choix C est monotone si et seulement si :*

$$\forall A \neq \emptyset \subseteq X, \forall a \in A, \forall \pi, \pi' \in \Pi(A) \text{ tels que } \pi' >_a \pi, a \in C(A, \pi) \Rightarrow a \in C(A, \pi')$$

L'idée générale est que lorsqu'un candidat est choisi par une procédure de choix avec un jeu de données alors il doit être de nouveau choisi avec un jeu de données qui lui est plus favorable. Ceci est bien une propriété souhaitable car on s'attend naturellement à ce qu'une amélioration dans les données se traduise par une amélioration (ou du moins à une non-dégradation) dans le résultat final. On remarque que cette définition inclut aussi la notion duale qui indique que lorsqu'un candidat est dégradé dans les données, si elle n'était pas sélectionnée avec les données initiales, elle ne le sera pas non plus avec les nouvelles données. En effet, toute procédure monotone vérifiera cette propriété duale (pour s'en convaincre, il suffit de transformer toute dégradation élémentaire en sa transformation inverse qui amène à une amélioration élémentaire). Par la suite nous nous limiterons aux améliorations dans un profil, tout en gardant à l'esprit que tous les résultats peuvent également s'exprimer avec l'idée de dégradation d'un candidat dans un profil. La notion de monotonie s'étend également aux procédures de rangement.

DÉFINITION 4. *Une procédure de rangement R est monotone si et seulement si :*

$$\forall A \subseteq X, \forall a \in A, \forall \pi, \pi' \in \Pi(A) \text{ tels que } \pi' >_a \pi, \text{ avec } \succsim = R(A, \pi) \text{ et } \succsim' = R(A, \pi'),$$

$$\forall b \in A, \left\{ \begin{array}{l} a \sim b \Rightarrow a \succsim' b \\ a \succ b \Rightarrow a \succ' b \end{array} \right.$$

Nous utilisons ici une définition de monotonie que nous retrouvons dans un article de Vincke où celui-ci s'intéresse à la monotonie de nombreuses procédures de rangement [16]. L'idée générale est la même que pour la monotonie des procédures de choix. L'amélioration dans les données d'un candidat ne doit pas avoir pour conséquence une baisse du classement de celui-ci vis-à-vis de tous les autres. C'est évidemment une propriété souhaitable pour une procédure de rangement car ne pas respecter cet axiome irait à l'encontre de ce que l'on peut attendre d'une procédure de rangement équitable. Il vient alors naturellement la définition de monotonie par choix itérés (ou supermonotonie).

DÉFINITION 5. *Une procédure de choix C est supermonotone si et seulement si RIT_C est monotone.*

Cette propriété introduite par Perny [10] permet de définir directement sur les procédures de choix le fait que le rangement obtenu par choix itérés de celles-ci (RIT_C) est monotone. On peut noter un lien facile entre monotonie et supermonotonie :

PROPOSITION 1. *C supermonotone $\Rightarrow C$ monotone*

3 SUPERMONOTONIE, RATIONALISATION ET STABILITÉ DU CHOIX

Nous rappelons quelques résultats que nous avons obtenus² concernant les conditions suffisantes de respect de la supermonotonie [6]. Pour ces premiers résultats, on utilise la notion de rationalisation d'une fonction de choix qui signifie que les sélections effectuées par cette fonction peuvent s'expliquer par la donnée unique d'une relation binaire.

DÉFINITION 6. *Une fonction de choix F est rationalisable par la relation binaire sur X $\succsim$ si et seulement si : $\forall A \neq \emptyset \subseteq X, (x \in F(A) \Leftrightarrow \forall y \in A \setminus \{x\}, x \succsim y)$*

On peut étendre la définition de rationalisation aux procédures de choix.

DÉFINITION 7. *Une procédure de choix C est rationalisable si et seulement si : $\forall \pi \in \Pi(X), C_\pi$ est rationalisable.*

Nous avons établi dans [6] un lien entre cette notion de rationalisation et celle de supermonotonie.

THÉORÈME 1. *Soit C une procédure de choix monotone et rationalisable alors C est supermonotone.*

Ce résultat donne une première condition simple qui suffit au respect de la supermonotonie et il permet de mieux comprendre ce phénomène. La condition de rationalisation décrite ci-dessus a un lien fort avec d'autres conditions dites conditions de stabilité. Des résultats reliant ces différentes notions ont été notamment obtenus par Sen [14], Moulin [7] et Bordes [2]. Ces conditions de stabilité sont des conditions qui permettent de décrire le caractère invariant des choix lorsque l'on change l'ensemble de candidats considéré par une fonction de choix. Ainsi les deux propriétés suivantes permettent de caractériser la rationalisation.

DÉFINITION 8. *Une fonction de choix F respecte la propriété de Chernoff (dite aussi α ou héritage) si et seulement si : $\forall A \neq \emptyset \subseteq A' \subseteq X \Rightarrow F(A') \cap A \subseteq F(A)$*

Cet axiome indique que si l'on restreint l'ensemble des candidats, ceux qui étaient précédemment choisis restent dans l'ensemble de choix.

DÉFINITION 9. *Une fonction de choix F respecte la propriété d'expansion (dite aussi γ ou concordance) si et seulement si : $\forall A, A' \neq \emptyset \subseteq X, F(A) \cap F(A') \subseteq F(A \cup A')$*

Cet axiome concerne cette fois l'expansion d'un ensemble de candidats. Il nécessite cette fois qu'un candidat choisi à la fois dans deux populations de candidats le soit toujours lorsque l'on réunit ces deux populations. De même que pour la rationalisation, ces conditions de stabilité s'étendent aux procédures de choix.

DÉFINITION 10. *Une procédure de choix C respecte α (respectivement γ) si et seulement si : $\forall \pi \in \Pi(X), C_\pi$ respecte α (respectivement γ).*

---

²On trouvera une démonstration des principaux résultats à l'adresse suivante : "<http://www-poleia.lip6.fr/~juret>".

À l'aide des notions présentées ci-dessus, il est possible de réexprimer le théorème précédent de supermonotonie. En effet, Sen a montré, pour les fonctions de choix, que ces deux axiomes réunis sont équivalents à l'axiome de rationalisation [14]. Ce résultat s'étend naturellement aux procédures de choix et nous permet d'obtenir en corollaire du théorème précédent un résultat reliant la supermonotonie aux deux axiomes de stabilité.

COROLLAIRE 1. *Soit C une procédure de choix monotone et respectant les axiomes α et γ alors C est supermonotone.*

Les conditions α et γ , quoique représentant des conditions de stabilité relativement naturelles, sont des conditions fortes. Ce théorème ne concerne donc qu'une famille très restreinte de procédures de choix et il serait souhaitable d'affaiblir ces conditions suffisantes de supermonotonie. On montre cependant que si l'on retire l'une des deux conditions α ou γ aux conditions précédentes, le résultat n'est plus valable.

PROPOSITION 2.

- *Il existe des procédures de choix monotones, respectant α et n'étant pas supermonotones.*
- *Il existe des procédures de choix monotones, respectant γ et n'étant pas supermonotones.*

Cette proposition ne suggère donc pas de voie simple pour obtenir une condition plus faible. Pourtant, il existe des procédures de choix dont la supermonotonie apparente ne s'explique pas à l'aide du théorème 2. C'est notamment le cas de la procédure de Schwartz [13] définie comme suit :

DÉFINITION 11. *Pour $(A, \pi) \in \Omega(X)$, la procédure de choix de Schwartz est définie par $S(A, \pi) = \{x \in A / \forall y \in A, \neg(y \succ_{A, \pi}^S x)\}$, $\succ_{A, \pi}^S$ étant la relation définie sur A comme la partie asymétrique de la fermeture transitive sur A de la relation majoritaire stricte appliquée au profil π . On notera $\succ_{A, \pi}^M$ la relation majoritaire stricte et on rappelle que $a \succ_{A, \pi}^M b \Leftrightarrow |\{i, a \succ_i b\}| > |\{i, b \succ_i a\}|$.*

On remarque facilement que $\succ_{A, \pi}^S$ est un préordre sur A et ainsi l'ensemble des éléments maximaux est non-vide. La procédure de Schwartz est donc bien une procédure de choix. Un exemple d'application de la procédure de Schwartz est présenté ci-dessous :

Il n'existe pas d'exemples connus de phénomènes de non-monotonie de la procédure de rangement obtenue par itération de la procédure de Schwartz. En fait nous démontrerons à la section 5 que cette procédure est supermonotone en dépit d'un résultat de Nurmi qui montre que la procédure de Schwartz ne vérifie pas la condition α . [8]. Ainsi la supermonotonie de la procédure de Schwartz ne peut pas être démontrée à l'aide des

résultats rappelés ci-dessus. Ce constat montre la nécessité de chercher d'autres résultats concernant des conditions suffisantes de supermonotonie d'une procédure de choix et nous amène à la principale contribution de cet article dans laquelle nous introduisons de nouvelles conditions qui ne sont plus liées cette fois à l'idée de rationalisation ou de stabilité mais à celle de respect itératif d'un score monotone.

4 RESPECT ITÉRATIF D'UN SCORE MONOTONE

Notion de respect itératif de score monotone. Afin de pouvoir donner la définition d'une fonction score, on notera $\Lambda(X) = \{(a, \pi) : \exists A \subseteq X \setminus \emptyset \text{ tel que } a \in A \text{ et } \pi \in \Pi(A)\}$.

DÉFINITION 12. *On définit alors un score s par une fonction :*

$$\begin{aligned} s : \Lambda(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, \pi) &\mapsto s(a, \pi) \end{aligned}$$

On définit par extension le rangement associé à une fonction score s qu'on notera R_s . On peut étendre la définition de monotonie qui concerne les procédures de choix aux fonctions scores.

DÉFINITION 13. *Un score s est monotone si et seulement si : $\forall A \subseteq X \setminus \emptyset, \forall a, b \in A, \forall \pi, \pi' \in \Pi(A)$ tels que $\pi' >_a \pi$,*

$$\begin{cases} s(a, \pi) > s(b, \pi) \Rightarrow s(a, \pi') > s(b, \pi') \\ s(a, \pi) = s(b, \pi) \Rightarrow s(a, \pi') \geq s(b, \pi') \end{cases}$$

Cette définition est relativement naturelle et indique simplement que les comparaisons de scores seront respectées lors de l'amélioration d'un candidat dans un profil. Cette première définition est très proche de l'idée de monotonie mais peut s'avérer difficile à vérifier. Il apparaît alors intéressant d'introduire une notion plus restrictive de la monotonie d'un score mais qui peut parfois être plus facile à vérifier et qui conserve un sens tout aussi "parlant".

DÉFINITION 14. *Un score s est à différence-monotone si et seulement si : $\forall A \subseteq X \setminus \emptyset, \forall a, b \in A, \forall \pi, \pi' \in \Pi(A)$ tels que $\pi' >_a \pi$,*

$$(s(a, \pi') - s(b, \pi')) \geq s(a, \pi) - s(b, \pi)$$

Cette définition signifie simplement que les écarts de scores qui existent entre les candidats évoluent de manière cohérente suite à l'amélioration d'un candidat dans un profil (pour le candidat amélioré, les écarts par rapport aux candidats de score plus faible augmentent et ceux vis-à-vis des candidats de meilleur score se réduisent). On peut également utiliser une notion plus forte de monotonie.

DÉFINITION 15. *Un score s est fortement-monotone si et seulement si : $\forall A \subseteq X \setminus \emptyset, \forall a \in A, \forall \pi, \pi' \in \Pi(A)$ tels que $\pi' >_a \pi$,*

$$\begin{cases} s(a, \pi') \geq s(a, \pi) \\ \forall b \neq a, s(b, \pi') \leq s(b, \pi). \end{cases}$$

Cette notion de monotonie implique que lors de l'amélioration d'un candidat dans un profil, seule le candidat amélioré peut voir son score progresser et celui-ci ne peut diminuer. Cette définition a l'intérêt d'être simple et donc facile à vérifier sur une fonction de score quelconque. Pour résumer, on note les liens suivants entre ces différentes propriétés :

PROPOSITION 3. *Score fortement-monotone $\Rightarrow$ Score à différence-monotone $\Rightarrow$ Score monotone*

Afin de relier ces notions de monotonie des fonctions scores et celle de supermonotonie, on introduit une propriété liant d'une part le processus d'itération d'une procédure de choix et d'autre part une fonction score.

DÉFINITION 16. *Une procédure de choix C suit itérativement une fonction score s si et seulement si la procédure de rangement itérée associée RIT_C est identique à la procédure de rangement R_s associée à s , i.e si et seulement si :*

$$\forall (A, \pi) \in \Omega(X), RIT_C(A, \pi) = R_s(A, \pi)$$

Il est important de noter que le score est calculé avec le profil de départ et ne doit pas être recalculé lors de chacune des étapes de l'itération de la procédure de choix. La notion de rangement associé à un score est donc défini indépendamment de tout mode itératif.

Supermonotonie et scores monotones. À l'aide des définitions introduites ci-dessus, on montre des liens existants entre la supermonotonie d'une procédure de choix et la monotonie d'une fonction score. Le premier résultat utilise la définition de score monotone et a un intérêt tout particulier car il se présente sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante de supermonotonie d'une procédure de choix.

THÉORÈME 2. *Une procédure de choix est supermonotone si et seulement si elle suit itérativement un score monotone.*

Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante de supermonotonie des procédures de choix. Cependant on notera que l'intérêt réel de ce théorème est principalement la condition suffisante de supermonotonie. En effet, il est évident, par définition, qu'une procédure de choix suit itérativement le score défini pour un candidat donné par le nombre de candidats que celui-ci bat dans le rangement itéré final. Lorsque celle-ci est supermonotone, cette fonction score sera alors évidemment monotone grâce à la similarité des définitions de monotonie des fonctions scores et des procédures de choix. La nouvelle condition suffisante de supermonotonie, quand à elle, présente un intérêt certain car il suffit d'exhiber une fonction score, parfois très simple (voir les exemples du paragraphe suivant), et de montrer d'une part que celle-ci est monotone et que la procédure de choix suit itérativement cette fonction score. Même s'il faut désormais vérifier deux propriétés au lieu de la seule supermonotonie, on notera une simplification du problème envisagé car la notion de score monotone est indépendante d'un quelconque mode itératif alors que la notion de suivi itératif d'un score est indépendante de la notion de monotonie et donc d'amélioration d'un candidat dans un profil. Ce résultat nous présente donc une manière plus simple d'envisager la notion de supermonotonie en séparant les deux notions principales que recouvre l'idée de supermonotonie. En corollaire de la proposition 3, ce résultat s'étend à la notion de score à différence-monotone mais n'entraîne plus alors une condition nécessaire et suffisante mais uniquement une condition suffisante.

COROLLAIRE 2. *Si une procédure de choix suit itérativement un score à différence monotone alors elle est supermonotone.*

Cette idée de score à différence monotone est parfois plus naturelle que la notion de score monotone et ce résultat donne donc une nouvelle possibilité pour vérifier la supermonotonie d'une procédure de choix. Enfin, en autre corollaire de la propriété 3, les deux résultats précédents s'étendent à la notion de score fortement-monotone.

COROLLAIRE 3. *Si une procédure de choix suit itérativement un score fortement-monotone alors elle est supermonotone.*

Ce résultat, quoique plus "faible" que les deux précédents, donne une nouvelle manière d'établir la supermonotonie d'une procédure de choix qui possède l'avantage d'être en général plus aisée à vérifier.

Ainsi, ces trois résultats ouvrent de nouvelles possibilités pour démontrer la supermonotonie d'une procédure de choix. La section suivante illustre ces possibilités.

5 APPLICATIONS

Les résultats précédents permettent de démontrer la supermonotonie de différentes procédures de choix.

Le cas de la procédure de Schwartz. Pour $(A, \pi) \in \Omega(X)$, $\succ_{A, \pi}^S$ est un ordre partiel et ne contient donc pas de circuit. On peut alors définir la fonction $lg(a, \pi)$ pour $a \in A$ comme la longueur du plus long chemin dans le graphe $(A, \succ_{A, \pi}^S)$ allant d'un candidat non-dominé vers a . On dit qu'un candidat z est non-dominé si il n'existe pas de $b \in A$ tel que $b \succ_{\pi}^S z$. On utilise alors l'opposé de la fonction lg pour définir le score : $sz(a, \pi) = -lg(a, \pi)$. La démonstration de la supermonotonie se fait alors suivant les deux étapes décrites au paragraphe précédent.

LEMME 1. *La procédure de choix de Schwartz suit itérativement le score sz .*

Ce premier volet ne met en oeuvre que la notion d'itération d'une procédure de choix, la notion d'amélioration et de monotonie n'apparaît alors que dans le second volet de la démonstration.

LEMME 2. *Le score sz est monotone.*

À partir des deux lemmes précédents et du théorème 2, on peut conclure sur la supermonotonie de la procédure de Schwartz.

COROLLAIRE 4. *La procédure de choix de Schwartz est supermonotone.*

Les autres résultats présentés précédemment s'appliquent aussi à d'autres procédures de choix, par exemple à la procédure maximin.

Le cas de la procédure maximin Afin de définir la procédure maximin, on définit la notion de puissance d'un candidat dans un préordre.

DÉFINITION 17. Pour un préordre $\succsim$ défini sur $A \subseteq X \setminus \emptyset$, la puissance d'un candidat $x \in A$ est :

$$W(x, \succsim) = |\{z \in A/x \succ z\}|$$

Dans le cadre d'un préordre total, la puissance d'un candidat est donc le nombre de candidats qu'il précède strictement dans ce préordre. On définit ensuite la notion de puissance minimum dans un profil de préférences.

DÉFINITION 18. Pour $(A, \pi) \in \Omega(X)$ ($\pi = (\succsim_1, \dots, \succsim_p)$), la puissance minimum d'un candidat $x \in A$ est :

$$W_{min}(x, \pi) = \min_{i \in [1, \dots, p]} \{W(x, \succsim_i)\}$$

À partir de cette notion de puissance minimum, la procédure maximin se définit alors naturellement.

DÉFINITION 19. Pour $(A, \pi) \in \Omega(X)$, la procédure maximin est définie par :

$$Maximin(A, \pi) = \{x \in A / \forall y \in A, W_{min}(x, \pi) \geq W_{min}(y, \pi)\}$$

La procédure de choix maximin consiste donc à choisir parmi les candidats, pour un profil donné, ceux dont la puissance minimum est la plus grande. On vérifie très aisément que cette procédure est monotone. Pour établir la supermonotonie de maximin, nous nous appuyons sur le lien entre l'itération de la procédure maximin et le rang minimum.

LEMME 3. La procédure de choix maximin suit itérativement le score W_{min} .

On montre ensuite la monotonie de la fonction score W_{min} sous la forme de la forte-monotonie.

LEMME 4. Le score W_{min} est fortement-monotone.

À partir des deux lemmes précédents et du théorème 3, on conclut sur la supermonotonie de la procédure maximin.

COROLLAIRE 5. La procédure de choix maximin est supermonotone.

Ce résultat est moins anodin qu'il n'y paraît. En effet, il n'est pas courant qu'une procédure basée sur un score suive itérativement ce score. Par exemple, ce n'est pas le cas pour la procédure, pourtant très proche, maximax présentée ci-dessous. Notons de plus que ce résultat ne pouvait pas se déduire des résultats de la section précédente. En effet on a :

PROPOSITION 4. La procédure de choix maximin ne vérifie pas la condition α .

Le cas de la procédure maximax. Pour cet exemple de procédure, on limitera le cadre d'étude aux préférences représentées par des ordres totaux (relation binaire asymétrique, transitive et complète). Afin de définir la procédure maximax, on définit alors la notion de puissance maximum dans un profil de préférences.

DÉFINITION 20. Pour $(A, \pi) \in \Omega(X)(\text{restreintauxordrestotiaux})$ ($\pi = (\succsim_1, \dots, \succsim_p)$), la puissance maximum d'un candidat $x \in A$ est :

$$W_{\max}(x, \pi) = \max_{i \in [1, \dots, p]} \{W(x, \succsim_i)\}$$

À partir de cette notion de puissance maximum, la procédure maximax se définit alors naturellement.

DÉFINITION 21. Pour $(A, \pi) \in \Omega(X)(\text{restreintauxordrestotiaux})$, la procédure maximax est définie par :

$$\text{Maximax}(A, \pi) = \{x \in A / \forall y \in A, W_{\max}(x, \pi) \geq W_{\max}(y, \pi)\}$$

La procédure de choix maximax consiste donc à choisir parmi les candidats, pour un profil donné, ceux dont la puissance maximum est la plus grande. On vérifie très aisément que cette procédure est monotone. On peut également montrer la monotonie de la fonction score $W_{\max}$.

LEMME 5. Le score $W_{\max}$ est fortement-monotone.

Cependant, contrairement à la procédure maximin qui suit itérativement la puissance minimum, il n'existe pas de lien évident entre l'itération de la procédure maximax et la puissance maximum.

LEMME 6. La procédure de choix maximax ne suit pas itérativement le score $W_{\max}$.

Malgré cela, on peut obtenir le résultat qui suit concernant la procédure maximax.

PROPOSITION 5. La procédure de choix maximax est supermonotone.

Il est intéressant de constater qu'ici, il s'agit d'une procédure supermonotone mais pour laquelle il ne se dégage pas de fonction score monotone évidente qui nous permettrait de conclure à la supermonotonie. De même, les résultats de la section précédente ne pouvaient pas s'appliquer pour prouver cette propriété. En effet, on a :

PROPOSITION 6. La procédure de choix maximax ne vérifie par la condition γ .

On peut donc constater l'intérêt du théorème 2 et de ses corollaires. Ils peuvent en effet simplifier la démonstration des résultats dans certains cas (Schwartz, maximin) car le problème de vérification de la supermonotonie est alors séparé en deux en exhibant une fonction score particulière puis en démontrant deux propriétés souvent plus simples. Il est alors aisé de conclure à la supermonotonie par l'intermédiaire de l'un des trois résultats la liant au suivi itératif d'un score monotone. Cela révèle en fait le caractère "faussetment-itératif" de ces procédures de rangement. En effet, même si ces procédures sont obtenues par itérations d'une procédure de choix, on constate que le processus itératif est superflu car le rangement complet est obtenu dès la première étape par l'intermédiaire d'une fonction score qui est elle non-itérative. Ce n'est cependant pas le cas de toutes les procédures supermonotones comme nous le suggère la procédure maximax qui, pour sa part, semble réellement itérative. En effet seul le score induit par les rangs dans l'ordre obtenu par rangement itéré apparaît de façon évidente comme fonction score en correspondance avec l'itération de la procédure de choix.

6 CONCLUSION

Nous avons mis en place la notion de scores monotones afin de pouvoir formuler de nouvelles conditions suffisantes de supermonotonie d'une procédure de choix. Celles-ci permettent de s'assurer de la supermonotonie d'un certain nombre de procédures alors qu'un premier jeu de conditions basées sur des axiomes de rationalisation et de stabilité ne permettaient pas de conclure. Si ces nouvelles conditions permettent une meilleure connaissance des procédures supermonotones, elles permettent également de mieux comprendre le phénomène de supermonotonie en le décomposant en deux notions distinctes et parfois indépendantes : le principe d'amélioration dans un profil et celui d'itération d'une procédure de choix. Cependant, nous avons également mis en évidence une procédure supermonotone pour laquelle cette décomposition n'apparaît pas de manière évidente ce qui rend le théorème 2 inopérant. Il semble donc qu'il faille encore trouver de nouvelles conditions plus générales de supermonotonie. Enfin, notons que cette étude axiomatique ne concerne que les procédures de rangement par choix itérés, mais qu'il est possible d'effectuer un travail similaire sur d'autres processus itératifs comme le choix par raffinement progressif ou le rangement par éliminations successives.

Remerciements. Je tiens à remercier très sincèrement Patrice Perny pour son aide précieuse dans les recherches effectuées et dans la relecture de cet article. Un remerciement particulier également à Denis Bouysou pour ses commentaires avisés sur cet article ainsi qu'aux rapporteurs pour leur lecture attentive et leurs remarques pertinentes.

DÉMONSTRATIONS

Preuve de la proposition 1. On suppose que C est une procédure de choix non monotone. Soit alors $A \subseteq X \setminus \emptyset$, $a \in A$ et π et $\pi' \in \Pi(A)$ tels que $\pi' >_a \pi$ et $a \in C(A, \pi)$ et $a \notin C(A, \pi')$. Soit donc $b \in A$ tel que $b \in C(A, \pi')$. On a alors $a RIT_C(A, \pi) b$ et $\text{non}(a RIT_C(A, \pi') b)$. Donc RIT_C n'est pas monotone et C n'est pas supermonotone. $\square$

Preuve de la proposition 2. Soit le profil défini sur un ensemble de candidats $\{a, b, c\}$ et pour n individus : $\pi' = (n : \{c \succ b \succ a\})$ (ici les n individus ont la même préférence). Soient deux procédures de choix C_1 et C_2 définies sur $\{a, b, c\}$ et qui vérifient :

C_1	$\forall \pi \neq \pi'$	π'	C_2	$\forall \pi \neq \pi'$	π'
$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$	$\{a\}$
$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a\}$	$\{a\}$
Classement	$(a \sim b) \succ c$	$(a \sim b \sim c)$	Classement	$a \succ b \succ c$	$(a \sim c) \succ b$

Les lignes de ce tableau représentent les choix effectués par les deux procédures sur les restrictions des profils aux ensembles de la première colonne. Ces procédures renvoient toujours le même choix pour tous les profils sauf pour le profil π' et pour ses restrictions à des sous-ensembles de candidats. La dernière ligne donne le rangement obtenu après itérations. Ces procédures de choix vérifient les propriétés suivantes (O signifie que la propriété est vérifiée et N que la propriété n'est pas vérifiée) :

	Monotonie	Supermonotonie	α	γ
C_1	O	N	O	N
C_2	O	N	N	O

En effet :

- Ces deux procédures sont monotones car la seule différence entre les choix concernant π' et ceux pour les autres profils est l'ajout de c dans le choix sur $\{a, b, c\}$. Mais c étant placé en première position dans toutes les préférences de π' , il n'est pas possible d'obtenir un profil π améliorant cette alternative par rapport au profil π' (ce qui est le seul cas possible de non-monotonie dans ce cadre).
- Ces deux procédures ne sont pas supermonotones car pour $\pi = ((n-1) : \{c \succ b \succ a\}; 1 : \{c \succ a \succ b\})$, on a $\pi' \succ_{b/a} \pi$ et dans les deux cas b voit son classement relatif se dégrader par rapport à c durant l'itération avec π' .
- On vérifie facilement en envisageant tous les cas que C_1 et C_2 vérifient respectivement les propriétés α et γ .
- C_1 ne vérifie pas γ car $C_1(\{b, c\} \cap \{a, c\}, \pi) \not\subseteq C_1(\{a, b, c\}, \pi)$
- C_2 ne vérifie pas α car $C_2(\{a, b, c\}, \pi') \cap \{a, c\} \not\subseteq C_2(\{a, c\}, \pi')$

□

Preuve de la proposition 3. La démonstration découle directement de la lecture des définitions. □

Preuve du théorème 2. Soit C une procédure de choix qui suit itérativement un score s monotone sur X et soient $\{a, b\}$ deux candidats distincts de X . Soient deux profils π et π' tels que $\pi' \succ_b \pi$ et soient $\succsim$ et $\succsim'$ les rangements induits respectivement par itération sur ces deux profils. Soit a un candidat différent de b . C suit itérativement le score monotone s donc :

$$\begin{cases} b \succsim c \Leftrightarrow s(b, \pi) \geq s(c, \pi) \Rightarrow s(b, \pi') \geq s(c, \pi') \Rightarrow b \succsim' c \\ b \succ c \Rightarrow s(b, \pi) > s(c, \pi) \Rightarrow s(b, \pi') > s(c, \pi') \Rightarrow b \succ' c \end{cases}$$

Finalement C est supermonotone.

La réciproque est évidente. En effet, par définition, une procédure de choix suit itérativement le score défini par les puissances des candidats dans son rangement itéré. Lorsque celle-ci est supermonotone, cette fonction score sera alors évidemment monotone grâce à la similarité des définitions de monotonie des fonctions scores et des procédures de choix. □

Preuve du lemme 1. Soit $(A, \pi) \in \Omega$. On note $\succsim_S(A, \pi)$ le rangement sur A obtenu par itération de la procédure de Schwartz sur π . Soient A_n les candidats de A restants lors de la n^{ieme} itération de la procédure de Schwartz sur π , π_n le profil issu de π restreint à A_n et $\mathcal{C}_n$ la n^{ieme} classe d'équivalence de $\succsim_S(A, \pi)$. On a alors $\mathcal{C}_n = S(A_n, \pi_n)$ et $A_{n+1} = A_n \setminus \mathcal{C}_n$. Afin de démontrer ce lemme, nous utiliserons les deux propositions suivantes :

prop [*] : Si $x \succ_{A, \pi}^S z$ alors $x \succ_S(A, \pi) z$.

En effet, supposons $z \succ_S(A, \pi) x$. Soit i, j tels que $x \in \mathcal{C}_i$ et $z \in \mathcal{C}_j$. Alors $i > j$. Si $x \succ_{A_j, \pi_j}^S z$ alors par construction de $\succ_{A_j, \pi_j}^S$, si z est non-dominée alors x ne l'est également pas. Donc $x \in \mathcal{C}_j$. Ainsi $non(x \succ_{A_j, \pi_j}^S z)$. Donc il existe une étape $k < j$

durant laquelle un des chemins de x vers z dans $(A, \succ_{A,\pi}^S)$ a disparu et donc $\exists y \in \mathcal{C}_k$ dans ce chemin tel que $x \succ_{A_k, \pi_k}^S y$ et $y \succ_{A_k, \pi_k}^S z$. $y \in \mathcal{C}_k$ et $x \succ_{A_k, \pi_k}^S y$ donc $x \in \mathcal{C}_k$: Contradiction. Donc $i \leq j$.

On démontre alors par induction la propriété suivante :

$$H(n) : \forall x \in A, \forall m \in \{1, \dots, n\}, [(lg(x, \pi) = m - 1) \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}_m]''$$

- $H(1)$ est vrai car $\mathcal{C}_1 = S(A, \pi)$ est le résultat de la première sélection opérée par la procédure de Schwartz : l'ensemble des candidats non-dominés de $\succ_{A,\pi}^S$. Ceux-ci ont tous une longueur lg égale à 0 car, étant non-dominés, il n'existe pas de chemin aboutissant à l'un d'eux. Réciproquement, tous les candidats qui vérifient $lg(x, \pi) = 0$ sont non-dominés et donc dans $\mathcal{C}_1$.
- On suppose $H(n)$ vraie.
  - Soit x tel que $lg(x, \pi) = n$. Comme $H(n)$ est vraie, x n'est pas dans l'une des n premières classes de $\succ_S(A, \pi)$. Si $x \notin \mathcal{C}_{n+1}$, alors $\exists z \in \mathcal{C}_{n+1}$ tel que $z \succ_{A_n, \pi_n}^S x$. Donc $z \succ_{A_n, \pi_n}^S x$. On a alors également $z \succ_{A, \pi}^S x$ (car lorsque la fermeture transitive existe dans A_n , elle existe également dans A , la relation majoritaire sur A_n étant uniquement la restriction de la relation majoritaire sur A). $z \succ_S(A, \pi)x$ donc par la contraposée de la proposition [*], $non(x \succ_{A, \pi}^S z)$. Donc $z \succ_{A, \pi}^S x$. Or $lg(x, \pi) = n$ donc $lg(z, \pi) < n$ (car sinon il existe un chemin de longueur au moins $n + 1$ dans $\succ_{A, \pi}^S$ d'un candidat non-dominé vers x en passant par z). Comme $H(n)$ est vraie, z est donc dans l'une des n premières classes de $\succ_S(A, \pi)$, ce qui contredit $z \in \mathcal{C}_{n+1}$. Donc $x \in \mathcal{C}_{n+1}$.
  - Soit $x \in \mathcal{C}_{n+1}$. $H(n)$ étant vraie, $lg(x, \pi) \geq n$. Si $lg(x, \pi) > n$ alors $\exists z$ tel que $lg(z, \pi) = n$ et tel que $z \succ_{A, \pi}^S x$. D'après la proposition [*], on a alors $z \in \mathcal{C}_{n+1}$. $x \in \mathcal{C}_{n+1}$ donc $non(z \succ_{A_{n+1}, \pi_{n+1}}^S x)$. Or $z \succ_{A, \pi}^S x$ donc $z \succ_{A_{n+1}, \pi_{n+1}}^S x$. En effet, sinon un élément y du chemin de z vers x dans A (donc qui vérifie $z \succ_{A, \pi}^S y$) a été choisi lors des n premières itérations, ce qui, d'après la proposition [*], rentre en contradiction avec $z \in \mathcal{C}_{n+1}$. $z \succ_{A_{n+1}, \pi_{n+1}}^S x$ et $non(z \succ_{A_{n+1}, \pi_{n+1}}^S x)$ donc $x \succ_{A_{n+1}, \pi_{n+1}}^S z$ et ainsi $x \succ_{A, \pi}^S z$. Contradiction ! Donc $lg(x, \pi) = n$.

Ainsi $H(n + 1)$ est vraie (pour $m < n + 1$, la vérification est automatique par $H(n)$).

Finalement, $\succ_{S(A, \pi)} = \leq_{lg(A, \pi)}$, $\leq_{lg(A, \pi)}$ étant l'ordre croissant de $lg(A, \pi)$. Or $sz(A, \pi) = -lg(A, \pi)$ donc $\succ_{S(A, \pi)} = \geq_{sz(A, \pi)}$ et la procédure de Schwartz suit itérativement le score sz . $\square$

Preuve du lemme 2. Soient deux profils π et π' tels que $\pi' >_b \pi$. On remarque au préalable que l'on passe de π à π' par une transformation élémentaire. Elle ne modifie donc pas les positions relatives des candidats différents de b . Par conséquent, la relation majoritaire ne peut uniquement être modifiée que pour favoriser le candidat b . Les seuls changements éventuels entre $(A, \succ_{A, \pi}^M)$ et $(A, \succ_{A, \pi'}^M)$ ne peuvent donc être que l'apparition d'arcs issus de b ou la disparition d'arcs allant vers b . Montrons qu'il ne peut pas apparaître dans $(A, \succ_{A, \pi'}^S)$ un chemin d'un candidat non-dominé vers b qui n'était pas dans $(A, \succ_{A, \pi}^S)$. En effet, si un tel chemin existe, alors il existe d tel que $d \succ_{A, \pi'}^S b$ et $non(d \succ_{A, \pi}^S b)$. $d \succ_{A, \pi'}^S b$ donc il existe un chemin dans $(A, \succ_{A, \pi'}^M)$ de d vers b (car les arcs de $(A, \succ_{A, \pi'}^S)$ sont issus de la fermeture transitive des arcs de $(A, \succ_{A, \pi'}^M)$). Or ce chemin existe également dans $(A, \succ_{A, \pi}^M)$. Donc $d \succ_{A, \pi}^S b$. Mais $non(d \succ_{A, \pi}^S b)$ donc il existe un chemin dans $(A, \succ_{A, \pi}^M)$ de b vers d . Or ce chemin existe également dans $(A, \succ_{A, \pi'}^M)$ donc $b \succ_{A, \pi'}^S d$.

Contradiction. On déduit de ce résultat que $lg(b, \pi') \leq lg(b, \pi)$. Soit $c \neq b$, on suppose que $sz(b, \pi) > sz(c, \pi)$ et donc $lg(b, \pi) < lg(c, \pi)$ (respectivement $sz(b, \pi) \geq sz(c, \pi)$ et donc $lg(b, \pi) \leq lg(c, \pi)$). Il existe alors deux cas :

- Supposons que $b \succ_{A, \pi}^S c$. On a alors $b \succ_{A, \pi'}^S c$. En effet, il existe un chemin dans $(A, \succ_{A, \pi}^M)$ de b vers c et celui-ci sera alors également présent dans $(A, \succ_{A, \pi'}^M)$. De plus, il n'existe pas de chemin dans $(A, \succ_{A, \pi'}^M)$ de c vers b , car un tel chemin existerait aussi dans $(A, \succ_{A, \pi}^M)$ et on aurait $c \succ_{A, \pi}^S b$ qui contredit l'hypothèse. Ainsi $b \succ_{A, \pi'}^S c$ et donc $lg(b, \pi') < lg(c, \pi')$ car dans $(A, \succ_{A, \pi'}^S)$ il existe un chemin allant vers c qui est l'union du plus long chemin allant vers b et d'un chemin de b vers c .
  - Supposons maintenant que $\text{non}(b \succ_{A, \pi}^S c)$. Montrons alors que $lg(c, \pi') \geq lg(c, \pi)$. Supposons alors qu'il existe un chemin $\mathcal{C}$ aboutissant en c dans $(A, \succ_{A, \pi}^S)$ qui ne soit pas dans $(A, \succ_{A, \pi'}^S)$. Alors il existe e tel que $e \succ_{A, \pi}^S c$ et $\text{non}(e \succ_{A, \pi'}^S c)$ ($\succ_{A, \pi'}^S$ étant obtenu par fermeture transitive). Comme $\text{non}(b \succ_{A, \pi}^S c)$ alors b ne figure dans aucun chemin aboutissant en c dans $(A, \succ_{A, \pi}^S)$ donc $\mathcal{C} \in (A \setminus \{b\}, \succ_{A, \pi}^S)$. On a $e \succ_{A, \pi}^S c$ donc il existe un chemin dans $(A \setminus \{b\}, \succ_{A, \pi}^M)$ de e vers c . Or $\mathcal{C}$ existe également dans $(A, \succ_{A, \pi'}^M)$ donc $e \succ_{A, \pi'}^S c$. De plus, comme on a $\text{non}(e \succ_{A, \pi'}^S c)$, il existe un chemin $\mathcal{C}_\in$ dans $(A, \succ_{A, \pi'}^M)$ de c vers e . Si b est dans ce chemin alors $b \succ_{A, \pi'}^M e$ et ainsi $b \succ_{A, \pi}^M e$. De plus $e \succ_{A, \pi}^S c$ donc $b \succ_{A, \pi}^S c$ (sinon il existe dans $(A, \succ_{A, \pi}^M)$ un chemin de c vers b et donc un chemin de c vers e). Ceci montre ainsi que b n'est pas dans $\mathcal{C}_\in$ et donc $\mathcal{C}_\in$ existe également dans $(A, \succ_{A, \pi}^M)$. Donc $c \succ_{A, \pi}^S e$. Contradiction !
- Ainsi tous les chemins aboutissant en c dans $(A, \succ_{A, \pi}^S)$ sont également dans $(A, \succ_{A, \pi'}^S)$. Donc $lg(c, \pi') \geq lg(c, \pi)$. Comme on a aussi $lg(b, \pi') \leq lg(b, \pi)$ et $lg(b, \pi) < lg(c, \pi)$ (respectivement $lg(b, \pi) \leq lg(c, \pi)$), on obtient $lg(b, \pi') < lg(c, \pi')$ (respectivement $lg(b, \pi') \leq lg(c, \pi')$).

On a donc $sz(b, \pi') > sz(c, \pi')$ (respectivement $sz(b, \pi') \geq sz(c, \pi')$) ce qui montre que sz est monotone. $\square$

Preuve du lemme 3. Pour un profil $\pi = (\succ_1, \dots, \succ_m)$ défini sur un ensemble de candidats A , A_n les candidats restants lors de la n^{ieme} itération de maximin et π_n le profil π restreint à A_n . On a alors $A_{n+1} = A_n \setminus \text{maximin}(A_n, \pi_n)$. On démontre alors par induction la propriété suivante :

$$H(n) : \text{"}\forall x \in A_n, \forall i \in \{1, \dots, n\}, W_{\min}(x, \pi_i) = W_{\min}(x, \pi_n)\text{"}$$

On remarque au préalable que $\forall x \in A_{n+1}, W_{\min}(x, \pi_n) \leq W_{\min}(x, \pi_{n+1})$ car avec les restrictions de l'ensemble des candidats, les puissances de ceux-ci ne peuvent que diminuer (voir définition).

- $H(1)$ est vraie de manière évidente.
- On suppose $H(m)$ vraie pour $m \leq n$. Soit $x \in A_{n+1}$. Si $W_{\min}(x, \pi_{n+1}) < W_{\min}(x, \pi_n)$, alors soit $q = W_{\min}(x, \pi_n) - W_{\min}(x, \pi_{n+1})$. Soit $\succ_i$ tel que $W(x, \succ_i|_{A_{n+1}}) = W_{\min}(x, \pi_{n+1})$ et $p = W(x, \succ_i|_{A_n}) - W(x, \succ_i|_{A_{n+1}})$. On a alors $p \geq q$. Soit alors B_p l'ensemble de p candidats qui ont été choisis lors de la n^{ieme} étape et tel que $\forall y \in B_p, x \succ_i y$ (cet ensemble existe car pour baisser la puissance d'un candidat x sur un préordre total donné, il faut que des candidats moins bien classés que x sur ce préordre aient été enlevés). $\exists z \in B_p$ tel que z appartienne à la dernière classe de $\succ_i$, i.e. tel que $\forall y \in B_p, \text{non}(z \succ_i y)$; donc $W(z, \succ_i|_{A_n}) \leq [W(x, \succ_i|_{A_n}) - p] = W(x, \succ_i|_{A_{n+1}}) = W_{\min}(x, \pi_{n+1}) < W_{\min}(x, \pi_n)$. Or $W_{\min}(z, \pi_n) \leq W(z, \succ_i|_{A_n})$ donc $W_{\min}(z, \pi_n) < W_{\min}(x, \pi_n)$. Or

$x \in A_{n+1}$, $z \in B_p$ et est donc choisi lors de la n^{ime} étape. Ceci est en contradiction avec la définition de la procédure maximin. Donc $W_{min}(x, \pi_{n+1}) = W_{min}(x, \pi_n)$.

Comme $H(m)$ est vraie pour $m \leq n$, $H(n+1)$ est vraie.

Ainsi les scores W_{min} ne varient pas au cours du processus d'itération. A chaque itération, la procédure maximin choisit donc les candidats dans le profil restreint de score minimum mais ces scores sont les mêmes que le score que l'on calcule à la première itération. Le rangement itéré correspond donc à l'ordre décroissant produit par W_{min} . Finalement, la procédure maximin suit itérativement le score W_{min} . $\square$

Preuve de la proposition 4. Soit le profil suivant :

$$\pi = \begin{cases} a \succ b \succ c \succ d \\ d \succ c \succ b \succ a \end{cases}$$

et soit $\min_\pi$ la fonction de choix induite par maximin sur π .

$$\begin{cases} \min_\pi(\{a, b, c, d\}) = \{b, c\} \\ \min_\pi(\{a, b, c\}) = \{b\} \end{cases}$$

Donc $\min_\pi(\{a, b, c, d\}) \cap \{a, b, c\} \not\subseteq \min_\pi(\{a, b, c\})$ et maximin ne vérifie pas α . $\square$

Preuve du lemme 4. Soient deux profils π et π' tels que $\pi' \succ_b \pi$. Le candidat b étant le seul à progresser dans l'un des préordres représentant la préférence d'un individu, c'est aussi le seul candidat qui puisse avoir une puissance minimum qui progresse. De plus, sur toutes les préférences, si b est préféré à un candidat alors b reste au moins préféré à celui-ci dans π' . La puissance minimum de b ne peut donc pas diminuer et finalement W_{min} est fortement monotone. $\square$

Preuve du lemme 5. Le raisonnement est le même que pour la puissance minimum et donc W_{max} est fortement monotone. $\square$

Preuve du lemme 6. Soit le profil suivant :

$$\pi = \begin{cases} a \succ b \succ d \succ c \\ b \succ c \succ a \succ d \end{cases}$$

Les scores W_{max} de a, b, c et d sont alors respectivement de 3, 3, 2 et 1. La première itération de la procédure maximax donne pour choix $\{a, b\}$. La deuxième itération sur le profil restreint aux candidats restants (c et d) classe ces deux candidats à égalité. Le rangement obtenu par itération est $(a \sim b) \succ (c \sim d)$ or celui obtenu par ordre décroissant de W_{max} est $(a \sim b) \succ c \succ d$. La procédure maximax ne suit donc pas le score W_{max} . $\square$

Preuve de la proposition 5. Nous démontrons ce résultat par l'absurde, pour cela, on suppose qu'il existe un phénomène de non-monotonie pour le rangement itératif de maximax. Soit A un ensemble de candidats et $\pi, \pi' \in \Pi(A)$ (restreint aux ordres totaux) tels que $\pi' \succ_{b/a} \pi$ (on note i l'individu sur lequel l'amélioration s'est portée, ainsi $a \succ_i b$ et $b \succ_i a$). Soient $\succsim_M(X, \pi)$ et $\succsim_M(X, \pi')$ les rangements obtenus sur X après itération de la procédure maximax sur les profils π et respectivement π' . Soient X_n les candidats de X restants lors de la n^{ieme} itération de maximax sur π , π_n le profil issu de π restreint à A_n et C_n la n^{ieme} classe d'équivalence de $\succsim_M(A, \pi)$ (Pour π' , on notera respectivement A'_n, π'_n et C'_n). Il existe deux cas possible de violation de la monotonie du rangement.

- 1 $\exists c \in A \setminus \{b\}$ tel que $b \succ_{M(A,\pi)} c$ et $c \succsim_{M(A,\pi')} b$. L'amélioration étant élémentaire, tant que les choix effectués sur π et π' ne diffèrent pas, les puissances à une étape donnée seront identiques sur les deux processus d'itération pour tous les candidats sauf éventuellement pour les candidats a et b . Les itérations sur les deux profils débutent donc de la même manière et ne peuvent différer qu'à partir de la première étape n telle que $\mathcal{C}_n \cap \{a, b\} \neq \emptyset$.
- 1.a On suppose $b \succsim_{M(A,\pi)} a$, alors $b \in \mathcal{C}_n$ et $c \notin \mathcal{C}_n$. D'après le lemme 5, on a alors $b \in \mathcal{C}'_n$ et $c \notin \mathcal{C}'_n$ donc $b \succ_{M(A,\pi')} c$. Contradiction.
- 1.b On suppose $a \succ_{M(A,\pi)} b$ et $a \in \mathcal{C}_n$. $\mathcal{C}_n \neq \mathcal{C}'_n$ car comme $\pi|_{A_n - \{a\}} = \pi'|_{A_n - \{a\}}$, les deux processus itératifs ne diffèreraient finalement jamais. De plus, π_n et π'_n ne diffèrent que pour l'individu i qui a inversé les positions de a et b . Donc pour que les processus diffèrent, il fallait que a soit placé en tête par l'individu i dans le profil π_n . b est donc placé en tête par l'individu i dans le profil π'_n et donc $b \in \mathcal{C}'_n$. $b \succ_{M(A,\pi)} c$ donc $c \notin \mathcal{C}_n$. Donc c n'était en tête pour aucun individu dans le profil π_n et ne l'est donc pas plus pour le profil π'_n . Donc $c \notin \mathcal{C}'_n$ et ainsi $b \succ_{M(A,\pi')} c$. Contradiction !
- 2 $\exists c \in A \setminus \{b\}$ tel que $b \succsim_{M(A,\pi)} c$ et $c \succ_{M(A,\pi')} b$. En reprennant les raisonnements 1.a et 1.b, on sait alors que les itérations ne diffèrent qu'à une étape n tel que $a \in \mathcal{C}_n$ et $b \in \mathcal{C}'_n$. Or $b \succsim_{M(A,\pi)} c$ et les processus d'itération ne divergent pas avant l'étape n donc c ne peut être choisie avant l'étape n . Donc $b \succsim_{M(A,\pi')} c$. Contradiction !
- Finalement aucun des cas 1 et 2 n'est possible et maximax est supermonotone. $\square$

Preuve de la proposition 6. Soit le profil suivant :

$$\pi = \begin{cases} b \succ c \succ a \\ a \succ c \succ b \end{cases}$$

et soit $\max_\pi$ la fonction de choix induite par maximax sur π .

$$\begin{cases} \max_\pi(\{a, b, c\}) = \{a, b\} \\ \max_\pi(\{b, c\}) = \{b, c\} \\ \max_\pi(\{a, c\}) = \{a, c\} \end{cases}$$

Donc $\max_\pi(\{a, c\}) \cap \max_\pi(\{b, c\}) \not\subseteq \max_\pi(\{a, b, c\})$ et ainsi maximax ne vérifie pas γ . $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.C. de BORDA. *Mémoire sur les Elections au scrutin*. Histoire de l'Académie Royale des sciences, Paris, 1781.
- [2] BORDES G. "Consistency, rationality and collective choice". *Review of Economic Studies* 41, 1976, p. 122–132.
- [3] BOUYSSOU D. "Monotonie des méthodes de rangement par choix répétés". *Document de travail, Université Libre de Bruxelles*, 1995. Disponible à : "http://www.lamsade.dauphine.fr/~bouyssou".
- [4] DURAND S. "A note on monotonicity in iterated choice functions". *Social Choice and Welfare* 18, 2001, p. 129–134.

- [5] JURET X. and PERNY P. "Monotonie des procédures de choix séquentielles". In *53ème conférence du groupe de travail européen en Aide Multicritère à la Décision, Athènes, Grèce*, 2001. Voir également "[http ://www-poleia.lip6.fr/~juret](http://www-poleia.lip6.fr/~juret)".
- [6] JURET X. "On monotonicity conditions for iterative ranking procedures". In *The European Operational Research Conference, Rotterdam, Pays-Bas*, 2001. Voir également "[http ://www-poleia.lip6.fr/~juret](http://www-poleia.lip6.fr/~juret)".
- [7] MOULIN H. "Choice functions over a finite set : a summary". *Social Choice Welfare* 2, 1985, p. 147–160.
- [8] NURMI H. *Comparing Voting Systems*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- [9] PERNY P. *Modélisation, agrégation et exploitation de préférences floues dans une problématique de rangement*. PhD thesis, Université Paris-Dauphine, 1992.
- [10] PERNY P. "Modélisation des préférences, agrégation multicritère et systèmes d'aide à la décision". *Habilitation à diriger les recherches*, 2000.
- [11] FODOR J., ORLOVSKI S., PERNY P., and ROUBENS M. "The use of fuzzy preference models in multicriteria choice, ranking and sorting". In *Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics*, p. 69–101. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [12] ROY B. "Electre iii : un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples". *Cahier du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle* 20, 1978, p. 3–24.
- [13] SCHWARTZ T. "Rationality and the myth of the maximum". *Nos* 6, 1972, p. 97–117.
- [14] SEN A. "A possibility theorem on majority decision". *Econometrica* 34, 1966, p. 491–499.
- [15] SMITH J.H. "Agregation of preferences with variable electoral". *Econometrica* 41, 1973, p. 1027–1041.
- [16] VINCKE P. "Exploitation of a crisp relation in a ranking problem". *Theory and Decision* 32, 1992, p. 221–240.