Les tests de normalité de Lhoste

Lhoste's tests

Nacira Hadjadji Seddik-Ameur

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/msh/2886>

DOI : 10.4000/msh.2886

ISSN : 1950-6821

Éditeur

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée

Date de publication : 1 mars 2003

ISSN : 0987-6936

Référence électronique

Nacira Hadjadji Seddik-Ameur, « Les tests de normalité de Lhoste », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 162 | Été 2003, mis en ligne le 10 février 2006, consulté le 23 juillet 2020. URL : <http://journals.openedition.org/msh/2886> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/msh.2886>

LES TESTS DE NORMALITÉ DE LHOSTE

Nacira HADJADJI SEDDIK-AMEUR ¹

RÉSUMÉ – *Nous présentons le test graphique de normalité de Lhoste et ses généralisations vectorielles. Nous rappelons sommairement la carrière très riche d'Ernest Lhoste (1880-1948), artilleur, statisticien, administrateur, directeur de l'AFNOR.*

MOTS-CLÉS – Lhoste, Artillerie, Loi normale multidimensionnelle, Tests graphiques.

SUMMARY – Lhoste's Tests

We present the Lhoste's graphical test for normality and its multivariate extensions. We begin by recalling the Lhoste's career from Artillery to Standardization.

KEYWORDS – Lhoste, Artillery, Multidimensional Gaussian Distributions, Graphical Tests.

1. INTRODUCTION

« Parmi les applications du calcul des probabilités, les applications au tir sont peut-être celles qui ont donné lieu au plus grand nombre de travaux. Depuis de nombreuses années, les artilleurs écrivent sur ce sujet et l'ont incorporé dans leur enseignement de l'École de Fontainebleau. Ainsi commence le fascicule du grand *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, consacré au tir [Haag 1926]. Début surprenant pour un lecteur contemporain, qui ne l'était cependant pas en France dans les années 1920 (e. g. [Bachelier 1914, chapitre 24]). La «*probabilité du tir*» est, en effet, un domaine d'applications explicites du calcul des probabilités, qui s'est développé dès la première moitié du 19^e siècle dans le cadre de la théorie laplacienne [Poisson 1830] et qui a donné lieu à une littérature extrêmement abondante et ininterrompue, en France au moins, de 1840 à 1940. Pour donner une idée de ce genre littéraire, nous avons indiqué en bibliographie quelques-uns seulement des travaux consacrés à la «*probabilité du tir*», c'est-à-dire ce qui touche à la détermination des lois des différents éléments de la trajectoire d'un projectile : portée, direction, vitesse initiale, qui vont, seuls, nous occuper ici. Il existe un très grand nombre d'autres travaux d'artilleurs consacrés au «*réglage du tir*», ces «*algorithmes stochastiques*» qui permettent d'atteindre un objectif lointain et généralement invisible, dans les meilleurs délais. Nous ne les citons pas, il y faudrait un autre article. Nous nous sommes d'autre part limités à la seule littérature de langue

¹ Université Badji-Mokhtar, Département de Mathématiques, BP 12, 23000 Annaba (Algérie).

française, la plus abondante probablement, mais on trouve dans les revues d'artillerie italiennes, allemandes, autrichiennes, russes, notamment, un grand nombre de travaux intéressants sur ces sujets.

Cette tradition militaire française transmise par les Écoles d'application de Metz et de Fontainebleau et considérablement développée pendant la Première Guerre mondiale a subi une éclipse presque totale dans la seconde moitié du 20^e siècle. On commence seulement à en redécouvrir les scléroses, routinières et réglementaires à l'excès, mais aussi les richesses et les incontestables priorités. C'est ainsi que l'œuvre statistique originale d'Ernest Lhoste a tout récemment attiré l'attention, et ce n'est pas un hasard mais une conséquence du renouveau d'intérêt porté aux procédures bayésiennes rationnelles, [Broemeling 2003].

Il nous a semblé intéressant de profiter de cette occasion, pour rappeler une contribution (non bayésienne) de Lhoste qui, elle aussi, a totalement disparu de la littérature statistique contemporaine. Il s'agit du test graphique de normalité de Lhoste, dont la simplicité et l'efficacité ont retenu l'attention de Jules Haag qui l'expose et l'applique dans l'ouvrage cité plus haut, mais qui, depuis, paraît avoir été oublié. Il se trouve que ce test se généralise très simplement à la dimension supérieure et qu'il fournit un moyen particulièrement commode de «Vérification» de la loi de Gauss dans le cas de données bidimensionnelles ou multidimensionnelles. On sait qu'il n'existe que peu de tests utilisables (ou utilisés) de multinormalité, l'abondance des paramètres à estimer réduisant leur efficacité mathématique et pratique, (voir le § 6 pour des références). Les tests de Lhoste suppriment cet inconvénient et mériteraient certainement qu'on s'y intéressât de nouveau. Ce travail a été développé par l'auteur dans une thèse soutenue en 1995 à l'Université Paris 5, mais n'a jamais été publié.

Dans une première partie, nous rappelons la carrière d'Ernest Lhoste et ses travaux sur la vérification rationnelle de la loi de Gauss (§ 2 et 3). Nous présentons ensuite les généralisations vectorielles et nous appliquons nos résultats à des données biométriques, les mensurations d'enfants de trois mois d'un centre de Protection Maternelle et Infantile (PMI) d'Annaba (Algérie), qui permettent de montrer que les tests de Lhoste s'appliquent aussi bien à des données liées entre elles et non pas seulement aux données indépendantes de l'artillerie classique.

2 . ERNEST LHOSTE : ARTILLERIE COLONIALE, RÉGIONALISATION, NORMALISATION

Qui est Ernest Lhoste? Nous ne le savons pas de façon précise, aucune biographie érudite n'ayant été consacrée à ce personnage multiple. Il est né en 1880. Il est reçu à l'École polytechnique avec la promotion 1901, puis à l'École d'artillerie de Fontainebleau. Il sort dans l'Artillerie coloniale alors rattachée au Ministère de la Guerre mais qui dépend directement des Gouverneurs généraux et du Ministère des Colonies créé en 1894 (après avoir dépendu de la Marine puis du Commerce). Après un bref séjour à Brest, Lhoste est affecté en Indochine, la «Perle de l'Empire», «Pacifiée», où l'Artillerie n'a plus qu'un

rôle de réserve. Sans fonction précise, Lhoste manifeste pour la première fois sa remarquable intelligence pratique et son étonnante capacité d'adaptation et de reconversion. Il s'intéresse de près à l'administration coloniale et soutient en 1907 une thèse de droit consacrée à la réforme douanière dans les colonies, sujet complexe alors d'actualité (e. g. [Ferry]). Nous ignorons l'origine exacte de cet intérêt de Lhoste pour la réglementation du commerce colonial. On peut simplement noter que son ministre de tutelle est alors Étienne Clémentel (1864-1936), un parlementaire radical-socialiste, député puis sénateur du Puy-de-Dôme, plusieurs fois ministre sous la III^e République, et qu'on retrouve Clémentel à chaque changement d'orientation de Lhoste. Clémentel lors d'une de ses visites ministérielles aurait-il remarqué l'intelligence et le pragmatisme du jeune Lhoste, aurait-il alors décidé de l'associer à sa grande œuvre réformatrice ? Existait-il des liens d'une autre nature entre les deux hommes ? S'agit-il d'une pure coïncidence ? En l'absence de documents d'archives nous laisserons cette question en suspens. Ajoutons que Lhoste aurait pu également être remarqué par Raphael Milliès-Lacroix, sénateur des Landes né en 1850, ministre des Colonies d'octobre 1906 à juillet 1909 qui a entrepris de réformer les tarifications douanières dans les Colonies, lesquelles dépendent encore de la loi du 11 janvier 1892 et sont critiquées sévèrement par les Chambres de Commerce métropolitaines mais aussi coloniales. Milliès-Lacroix s'intéressait beaucoup, comme son collègue Clémentel, aux problèmes financiers. Il s'est notamment penché sur les questions de comptabilité pour lesquelles l'Artillerie et les Armes savantes ont en France une avance certaine, on verra à ce sujet [Germain 1999] qui montre sur un autre exemple que l'Artillerie française s'est de longue date efforcée à la rationalisation économique (dans le même ordre d'idée, on verra [Bayart 2003], [Lemerancier]). Le jeune lieutenant Lhoste n'est donc pas un cas singulier, il est à l'image des officiers polytechniciens de son corps qui mettent au service de l'économie militaire (et civile le cas échéant), et sous tous ses aspects, leur intelligence et leur habileté à manier les chiffres et les opérations qui les enchaînent.

Après un premier séjour en Cochinchine, le lieutenant Lhoste est un moment en poste à Rochefort puis rejoint le Tonkin où il est nommé capitaine en 1913.

En 1914, le capitaine Lhoste commande une batterie, mais il paraît avoir été assez vite détaché dans les services techniques du Ministère de la Guerre, et tout d'abord au centre d'organisation de l'Artillerie Lourde à Tracteurs. Les Allemands possèdent au début de la guerre une meilleure artillerie lourde que les Français. Il est procédé dans le courant de l'année 1915 à une complète réorganisation de l'Artillerie Lourde française et notamment de ses moyens de déplacement. Des tracteurs mécaniques tous terrains sont commandés en grand nombre aux usines Renault qui les produiront en série dès le début de l'année 1917, en appliquant les nouveaux procédés de standardisation et de taylorisation, alors introduits pour la première fois en France. Lhoste peut y avoir appris les principes de normalisation rationnelle des fabrications, dont il sera quelques années plus tard l'un des meilleurs spécialistes français et le maître d'œuvre à l'Association Française de Normalisation, connue sous l'acronyme AFNOR. Nous ignorons son rôle exact dans l'organisation de l'Artillerie tractée mécaniquement. Notons simplement que cette dernière est généralement considérée comme globalement réussie, et conduisit

naturellement à la conception et la mise en fabrication des chars de combat à l'initiative du général Estienne que nous retrouverons bientôt.

Le capitaine Lhoste est affecté ensuite au Service Technique de l'Artillerie, place Saint Thomas d'Aquin, où il termine la guerre. Lhoste quitte la rationalisation commerciale et industrielle pour aborder la science des bouches à feu, l'une des plus anciennes et des plus développées qui soient. Il ne s'agit plus de gestion, d'administration, d'organisation mais de questions théoriques fondamentales et traditionnelles de balistique intérieure et extérieure — comment corriger les tables de tir, régler les tirs, répartir les pièces pour optimiser leur efficacité, etc. — Le capitaine Lhoste se trouve au contact des grands balisticiens militaires des artilleries françaises terrestres et navales et des universitaires purs mobilisés au service de la Défense Nationale, qui travaillent à la « Direction des inventions », 23 bis rue de l'Université, juste derrière la place Saint Thomas d'Aquin. Lhoste peut avoir rencontré Lebesgue et Montel et peut être même Borel qui dirige l'ensemble des services techniques de l'Artillerie. Nous ne savons pas le détail de ses travaux, mais c'est dans ce nouveau cadre qu'il fait la preuve de sa remarquable originalité mathématique. Il paraît s'être spécialisé en balistique extérieure, et notamment dans l'étude de la variabilité de la densité de l'air qui affecte sensiblement les trajectoires des projectiles. Il entreprend une série d'études de statistique mathématique, portant sur l'estimation bayésienne des paramètres d'une loi normale sans information *a priori*. Il n'est pas impossible que Lhoste ait été influencé sur ce sujet par la statistique militaire française, bayésienne depuis toujours, et particulièrement par les écrits du général Estienne, que l'on pourrait qualifier de subjectivistes rationnels [Estienne 1907]. Quoiqu'il en soit, les travaux de Lhoste repris et publiés seulement en 1923 sont maintenant considérés comme tout à fait novateurs. On verra à ce sujet l'article très complet à paraître de L. et A. Broemeling. La date tardive de publication est habituelle pour tous les travaux entrepris pendant la guerre. Par exemple la belle méthode d'intégration par arcs de l'équation de la balistique, connue sous le sigle G. H. M. (Garnier-Haag-Marcus), n'a été publiée par leurs auteurs que dans les années vingt longtemps après avoir servi à construire les tables de tir de Gâvre (où se trouve le siège des recherches de l'artillerie navale, près de Lorient). C'est probablement dans cette même période que Lhoste a l'idée de son procédé « rationnel » de vérification de la loi de Gauss, publié plus tardivement encore, mais rien ne l'indique absolument.

Au sortir de la guerre, le capitaine Lhoste est attaché à l'École polytechnique en qualité d'« Inspecteur des études », poste traditionnellement dévolu à un capitaine d'artillerie, dont les fonctions, assez légères semble-t-il, consistent à assister le général commandant l'École, sans intervention particulière dans le cours des études polytechniciennes, contrôlée exclusivement par le Directeur des études (qui est alors Emmanuel Carvallo) et le corps professoral. Lhoste profite de cette situation privilégiée pour passer sa licence ès-sciences à la Sorbonne. Aurait-il eu l'intention à ce moment là de se réorienter vers des études théoriques dont il aurait pris goût place Saint Thomas d'Aquin ? Nous l'ignorons, mais nous pouvons noter qu'il suivit, avec les élèves, les premières conférences de calcul des probabilités faites par Paul Lévy à l'École

polytechnique en 1919. C'est du moins ce que rapporte ce dernier dans ses souvenirs publiés en 1970 (p. 70)□

*«En même temps que la loi de Gauss, je m'étais occupé des lois stables....□
Je n'aurais peut-être pas songé à ce problème sans une remarque du capitaine Lhoste, qui avait assisté à mes conférences de 1919. Après la dernière, j'avais été surpris de voir cet officier, dont je ne savais pas qu'il était un probabiliste averti, compléter mon exposé sur une question que j'avais laissée en suspens. Au cours de la conversation qui s'ensuivit, il me dit (naturellement en termes différents) que la loi de Gauss était la seule loi stable. Je n'osais d'abord rien répondre. Mais le soir même ...□.*

Le capitaine Lhoste aurait été à son insu à l'origine d'une des grandes théories développées par Lévy au cours des quinze années suivantes. Pendant la grande guerre, Lévy avait également été mobilisé dans l'Artillerie, mais dans le tir contre avion, à la Commission de Gâvre, où il dut manipuler souvent la loi de Gauss, bien qu'il n'en dise rien dans ses souvenirs. Il est assuré qu'il a côtoyé Jules Haag (1882-1953), normalien de la promotion 1903 mobilisé à Gâvre, professeur aux universités de Clermont-Ferrand puis de Besançon où il a dirigé à partir de 1927 le nouvel Institut de chronométrie. L'œuvre mathématique de Haag est d'une très grande originalité, notamment en géométrie, en mécanique, en physique mathématique et en statistique mathématique. Rappelons simplement que c'est Haag qui, le premier, a attiré l'attention sur les mémoires de Henry et de Lhoste dans son traité de 1926 déjà mentionné dans l'Introduction.

Promu chef d'escadron en 1924, Lhoste est attaché de nouveau au Service Technique de l'Artillerie. C'est à ce moment là qu'il fait publier ses articles statistiques, mais il travaille principalement au Conseil Supérieur de la Défense Nationale. Cet organisme créé en 1906 a pour fonction depuis 1921 de préparer les mesures de mobilisation humaine, économique et administrative pour le temps de guerre. Lhoste est chargé plus particulièrement de la mobilisation économique où son expérience acquise pendant la guerre est semble-t-il reconnue en haut lieu. C'est là sans doute qu'il prend conscience des nécessités de la normalisation industrielle en temps de paix et du retard pris par la France dans ce domaine. Il rejoint les rangs relativement clairsemés de ceux qui, au lendemain de la guerre, militent pour une modernisation durable de l'industrie française. Il croise ainsi de nouveau la route de Clémentel, ministre du Commerce à partir de 1915, qui, entouré de quelques rares ingénieurs savants, tels Henry Le Chatelier (1850-1936), Léon Guillet (1873-1946), ou Auguste Rateau (1863-1930), tente de mettre en oeuvre un programme de rationalisation économique articulé autour de quelques grandes idées□d'abord la nécessité de ce qui ne s'appelle pas encore la «**R**égionalisation□, c'est-à-dire le regroupement des départements en «**R**égions économiques□, et puis l'introduction systématique du taylorisme et de la «**S**tandardisation□ qui deviendra bientôt la «**N**ormalisation□. On verra à ce sujet [Caron 1993] et [Rousseau 1998]. Cette politique à la fois idéaliste et réaliste, privée de moyens et de pouvoirs, fondée sur le militantisme intellectuel de quelques savants et le dirigisme libéral des parlementaires de la III^e République, se trouvera très vite confrontée aux intérêts divergents des chambres de commerce, des départements et des différents partenaires industriels. Elle ne connaîtra pas la réussite espérée après l'euphorie des années de guerre, et ne réussira pas à freiner le

déclin économique français de l'entre-deux-guerres. Toutefois les propositions et les débuts de réalisation du «Rapport Clémentel» sont fort intéressants. Lhoste va se trouver en première ligne sur tous les fronts de cette nouvelle politique.

En septembre 1926, Lhoste est placé en disponibilité et détaché au Ministère du Commerce où il assure successivement (ou simultanément) deux fonctions très importantes dans le dispositif Clémentel. Il assure le secrétariat de la Commission Permanente de Standardisation, CPS (qui devient après la réforme de 1930 le Comité Supérieur de Normalisation, CSN). Cette Commission créée en 1919 et présidée par Clémentel est formée de 24 membres, tous éminents, mais déjà surchargés de tâches et responsabilités diverses. C'est l'organe directeur de la nouvelle normalisation française, laquelle fonctionne sur trois étages : à la base les bureaux de normalisation par branches industrielles, au centre l'Association Française de Normalisation, émanation des Chambres de commerce, fondée en 1926, qui guide et tente d'harmoniser les propositions de la base, au sommet la CPS ou CSN qui tranche et impose mais qui de fait n'a pas les moyens de le faire. On lira à ce sujet les livres et articles sur l'histoire de la normalisation en France proposée dans la bibliographie, au premier rang desquels on doit placer les textes de Lhoste lui-même [1928a,b, 1941-1946]. On verra également l'article électronique [Fayet-Scribe, Canet] qui est très clair, et aussi [Igalens, Penan], [Franck], [Maily], ...

Lhoste est également Inspecteur général des régions économiques, une autre fonction transitoire clémentellienne, sans équivalent actuel. Il s'agit de susciter, d'organiser et de contrôler les nouvelles Régions économiques (ancêtres lointains des Chambres Régionales de Commerce et d'Industrie). On imagine volontiers les difficultés, les déboires, les déconvenues, les attermoissements, les revirements dont une telle inspection générale peut être l'occasion et quelles vertus, quel art de l'arbitrage en situation d'incertitude, il faut pratiquer pour en triompher. Comme le souligne Albert Caquot dans son éloge d'Ernest Lhoste à propos de son action à la direction de l'AFNOR [1948] : «Sa diplomatie souriante s'appuyait sur un courage éprouvé, et quand des orages étaient annoncés à l'horizon de certaines Commissions, il n'hésitait pas à en prendre la présidence pour définir et faire accepter la solution de la raison». Lhoste, dont «la vive intelligence et le goût de l'action réalisatrice» sont assurés, paraît s'être efforcé toujours de privilégier la solution de la raison partout où il s'est trouvé en position de le faire, réglementations douanières coloniales, estimations bayésiennes, organisation de l'Artillerie lourde, définition des régions économiques, et enfin normalisation industrielle, à l'AFNOR, comme nous le voyons rapidement maintenant pour conclure.

C'est en tant qu'Inspecteur général des régions économiques qu'il est nommé membre de la Société de Statistique de Paris en avril 1930. Il intervient peu au sein de la Société et le seul article qu'il donne est un essai économétrique inspiré d'Irving Fisher et de Jean Lescure sur la Crise économique [1935]. Lhoste ne figure plus dans les comptes rendus des séances après 1938. À cette date en effet il est nommé directeur général de l'AFNOR. Il occupera cette fonction jusqu'à sa mort prématurée en 1948. C'est sans doute dans cette dernière fonction qu'il donnera le meilleur de lui-même, dans des

conditions particulièrement difficiles, d'autant qu'en 1943 il doit subir une grave opération dont il ne se remettra pas véritablement.

La normalisation est une idée ancienne et nouvelle dans la France des années trente. Dès la seconde moitié du 18^e siècle, la réforme Gribeauval est fondée en partie sur les nécessités d'une normalisation des pièces d'artillerie. On verra à ce sujet les belles études de l'Ingénieur général Charbonnier [1927] (notons incidemment que Lhoste aurait pu rencontrer Charbonnier en Indochine, où il a servi dans l'Artillerie coloniale de 1907 à 1911, il aurait également pu l'apercevoir place Saint Thomas d'Aquin pendant la guerre, Charbonnier présidant alors la Commission de Gâvre). On verra aussi [Belhoste *et al.*] et [Lemerrier]. Pour sa part, Lhoste, dans son histoire abrégée de la normalisation française [1928a], cite les travaux du colonel Renard qui datent des années 1870, notamment les «Séries Renard» que l'AFNOR et la plupart des organismes internationaux de normalisation reprendront (on ne manquera de relire, à ce sujet, [Guilbaud, p. 162-168]. Rappelons que Charles Renard (1847-1905), polytechnicien de la promotion 1868, officier du génie, est un des pionniers de l'aérostation française. Lhoste cite également la normalisation des filetages entreprise à l'initiative de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale, par Édouard Sauvage (1850-1937) dans les années 1890 (on verra par exemple la thèse d'Olivier Lavoisy [2000]). Toutefois ces initiatives demeurent limitées et l'industrie française profonde reste assez indifférente au mouvement de standardisation qui se développe ailleurs, notamment en Angleterre, en Allemagne et aux États-Unis (le National Bureau of Standards date de 1901 et dispose très vite de moyens considérables). La guerre, on l'a dit, et la mobilisation industrielle semblent devoir changer très rapidement cet état de fait et l'on espère beaucoup ici ou là de la modernisation industrielle, comme on l'a déjà indiqué. Ces espoirs seront assez vite déçus, il serait trop long sans doute d'en examiner les raisons. On note cependant une certaine prise de conscience des Chambres de commerce, inquiètes de voir les marchés se fermer aux produits français peu ou pas du coup compatibles entre eux. L'AFNOR, association loi 1901, se développe de façon intéressante et lorsque Lhoste en prend la direction, les réalisations que l'on peut porter à son actif sont manifestes en dépit de l'absence de sources de financement régulières et de la lourdeur des procédures de décision. Les choses vont changer sensiblement sous le Gouvernement de Vichy dont on connaît la volonté de modernisation industrielle et surtout le dirigisme autoritaire. C'est la loi du 24 mai 1941 qui supprime le CSN et attribue à l'AFNOR tous les pouvoirs qui lui étaient dévolus. Cette dernière se voit placée sous la tutelle directe de l'État qui en nomme les principaux responsables. Elle conserve toutefois une partie de ses prérogatives et de ses libertés associatives. Lhoste est maintenu à la direction générale et va orienter toute la politique de normalisation française. Il sera également maintenu à son poste à la Libération, performance rare, qui mérite d'être soulignée, Lhoste ayant réussi, semble-t-il, à tenir la normalisation industrielle française éloignée de la Collaboration qui, on le sait, a contaminé nombre de secteurs industriels français (voir à ce sujet [Caquot] et [Salmon]). Il n'existe pas, à notre connaissance, d'histoire quelque peu développée de l'AFNOR et nous ne pouvons ici entrer dans de plus grands détails. Pour rendre notre propos moins abstrait, nous donnerons cependant un exemple au moins de l'activité multiforme de l'AFNOR sous la direction de Lhoste. Nous le choisirons dans le domaine des

terminologies scientifiques, *a priori* plus simple d'abord, les enjeux industriels et commerciaux n'y interférant que modérément. Nous voulons parler des normes de la statistique, du calcul des probabilités et des erreurs de mesures (Normes AFNOR X 05-001 □ Terminologie de la statistique (séries statistiques à un caractère). X 05-002 □ Terminologie du calcul des probabilités. X 005-003 □ séries statistiques à plusieurs caractères. X 005-004 □ éléments aléatoires à plusieurs dimensions. X 06-001 □ erreurs de mesures). Nous suivons [Pallez, 1949] qui en fait l'historique et le bilan.

La Commission de terminologie statistique de l'AFNOR a été constituée (à l'initiative de Lhoste) en mars 1944. Elle est présidée par Michel Huber (1875-1947), ancien directeur de la Statistique Générale de la France, alors directeur des enseignements de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris (ISUP). Tous les membres de la Commission appartiennent à la Société de Statistique de Paris et dès la première séance, Maurice Fréchet, dont le rôle s'avère déterminant, souligne l'importance d'une telle entreprise □ les travaux sur les questions de statistique mathématique se multiplient dans la plus grande confusion lexicologique, il y a lieu d'y mettre un peu d'ordre et de mesure. Lui-même a déjà tenté d'imposer des normes dans son premier fascicule du *Traité de Borel* [Fréchet 1936]. Parmi les membres principaux de la Commission, notons l'Ingénieur général des Ponts et Chaussées Edgar Baticle, qui succède à Huber à la présidence de la Commission (et qui se trouve être l'un des très rares disciples statistiques de Lhoste avec Jean Bouzitat et Maurice Dumas), Jacques Chapelon (professeur à l'École polytechnique), Pierre Delaporte (actuaire, professeur à l'ISUP), Maurice Dumas (ingénieur en chef de l'Artillerie navale, le principal disciple statistique de Lhoste, e. g. [Dumas 1948, 1955, 1969]), Louis Krach (ingénieur en chef du Service des instruments de mesure) et à la Libération Georges Darmois, Paul Lévy et quelques autres (sur les statisticiens des années quarante, on verra en particulier le beau livre de Heyde *et al.* [2001]). Il existe dans la correspondance de Lévy et Fréchet en cours de publication par Marc Barbut *et al.*, une lettre datée du 12 mars 1945, dans laquelle Lévy donne rendez vous à Fréchet « □ l'AFNOR lundi prochain □, qui démontre à la fois l'assiduité des membres de la Commission et la régularité de leurs réunions. André Pallez (polytechnicien de la promotion 1914, ingénieur à l'AFNOR) nous dit qu'il n'y a pas eu moins de 56 réunions plénières « □ sans compter ni le temps passé à la préparation des projets, ni le temps passé par le personnel de l'AFNOR □. Les normes X 05 et 06 n'ont été publiées qu'à la fin de l'année 1948. Il serait intéressant de les examiner de façon approfondie, mais cela nécessiterait de trop longs développements. Indiquons simplement deux ou trois exemples pris au hasard. Le premier, le plus simple, est la normalisation de la locution laplacienne « □ espérance mathématique □ et de son symbole $E[X]$, contre toute autre locution concurrente, valeur probable, valeur moyenne, etc. □ Pallez nous indique que cette appellation et ce symbole « □ ont fait l'objet de vives discussions. La Commission a dû procéder à un référendum □, une procédure chère à Fréchet, comme l'a bien montré Michel Armatte [2001].

Passons sur des expressions telles que « □ diagramme en bâtons □, « □ histogramme □, « □ cart-type □, « □ covariance □, « □ coefficient de corrélation □, « □ moment centré □, etc., dont on n'imagine plus guère maintenant qu'elles aient dû être soumises à normalisation et

arrêtons nous sur la loi de Gauss dont nous nous occupons dans cet article, qui montre en même temps les limites de toute normalisation terminologique. La Commission, probablement emmenée par Fréchet qui en avait fait l'un de ses chevaux de bataille, décida de normaliser la locution «*loi de Laplace*». Pallez ajoute que «*La Commission, considérant que Laplace a découvert la loi qui devrait porter son nom et qui porte celui de Gauss, à une époque où Gauss était encore un jeune enfant, a rétabli la vérité en rendant à Laplace l'hommage qui lui était dû.*» Sur ce point l'AFNOR n'a pas été suivie et nous parlons toujours de loi de Gauss ou de loi normale (sur ce point on verra [Stigler 1999, § 22]). Un certain nombre de savants consultés par l'AFNOR sur ces sujets refusèrent d'ailleurs tout net de s'y associer, l'une des principales objections étant qu'une normalisation terminologique risquait de «*figer les concepts*», qui perdraient de la sorte leurs capacités d'évolution et de transformation, qui font la richesse de la science et sa perfectibilité indéfinie. Il est à noter que toute normalisation, dans quelque domaine que ce soit, est susceptible du même procès d'intention et peut être accusée des mêmes crimes. Lhoste dut à plusieurs reprises s'en défendre qui déclarait «*La normalisation est l'art de se discipliner soi-même pour ne pas être discipliné par les autres*». Fort heureusement, les mauvais esprits ne furent pas écoutés, et, grâce aux positions dominantes occupées par Fréchet et Darmais dans la plupart des sociétés internationales de statistique, un nombre important des normes AFNOR fut adopté par la communauté internationale pour en donner la preuve, Pallez termine son article en citant une phrase intercalée dans un bon de commande provenant de Londres «*Il est fort à propos que le pays de Laplace, de Demoivre et de Poisson continue d'avoir la préséance dans ce domaine*». Ernest Lhoste d'une certaine façon est à l'origine de cet hommage britannique improbable au génie français. Pour d'autres renseignements sur les normes statistiques de l'AFNOR, on verra en particulier [Dumas 1955, 1969] et [Dumas, Maheu 1951].

3. LE TEST DE NORMALITÉ DE LHOSTE

Comment reconnaître qu'une distribution empirique peut être assimilée à une loi normale ? Voilà un problème déjà ancien, qui a préoccupé nombre de statisticiens de la seconde moitié du 19^e siècle, à commencer par Quetelet. On consultera à ce sujet les beaux livres de Stigler [1986, 1999]. Les artilleurs, pour leur part, ont pris conscience vers 1850, et peut-être avant, que la portée et la direction des tirs d'un fusil ou d'une pièce d'artillerie étaient assez sensiblement gaussiennes (et indépendantes). Le premier auteur à l'avoir manifesté avec la plus grande netteté est sans doute Isidore Didion qui enseignait à l'école d'artillerie de Metz on verra son traité [1858] pour un historique de ses recherches. Didion y fait observer que les courbes d'égales fréquences des tirs d'artillerie très nombreux sont des ellipses presque parfaites et que dès lors la loi des couples (portée, direction) est assimilable à une loi de Bravais [1837], c'est à dire une loi normale bidimensionnelle. Et partout en Europe les artilleurs se convaincront qu'il en est bien ainsi, au point que l'on peut se dispenser des coûteuses manœuvres avec tirs réels pour l'apprentissage des officiers et sous-officiers d'artillerie, il suffit, pour leur apprendre à «*régler*» leurs tirs, de faire éclater des pétards ou de poser des fanions à des

emplacements choisis au hasard dans une urne gaussienne. Et cela marche assez bien (e.g. [Aubrat 1883]).

Il restait à mettre au point et à enseigner une méthode uniforme simple de «Vérification» de la loi de Gauss dans la pratique ordinaire du métier des armes, qui permette par exemple de contrôler au fur et à mesure l'état d'une pièce, l'augmentation de sa dispersion, le nombre éventuellement exagéré de coups «anormaux» dont elle est susceptible, etc.. Une telle méthode a été proposée à la fin du 19^e siècle par le commandant Henri (1848-1907) qui enseignait alors à l'école d'Artillerie de Fontainebleau. Son cours de probabilité du tir [1894] est d'un grand intérêt. On verra à ce sujet un article très complet de Pierre Crépel [1993]. La méthode du commandant Henri est «graphique» et utilise un papier fonctionnel gaussien sur l'axe vertical.

Prenons par exemple les portées d'une pièce d'artillerie, c'est à dire les longueurs atteintes par les projectiles dans l'axe du canon. Si ces portées sont distribuées suivant une loi normale de moyenne et variance données et si le nombre de tirs est assez grand, la fonction de répartition empirique est assez voisine de la fonction de répartition normale à un changement linéaire d'échelle près portant sur la variable et, de la même façon, les quantiles empiriques (distances telles qu'un pourcentage donné de portées leur soient inférieures) seront voisins des quantiles théoriques correspondants d'une loi normale standard à un changement linéaire d'échelle près, de sorte que, si on a observé les portées $x_1, x_2, \dots, x_n$, si on note $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, ces mêmes portées rangées par ordre croissant et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, les points du plan de coordonnées $\left(\Phi(x_{(i)}), \frac{\Phi(x_{(i)}) - \Phi(x_{(1)})}{\Phi(x_{(n)}) - \Phi(x_{(1)})} \right)$ sont sensiblement alignés, c'est la droite de Henry (ou Henri) que les traités anglo-saxons actuels appellent *qq-plots*.

Le traité de Haag [1926, note I et diagrammes VIII et IX] tracent plusieurs de ces droites de Henry pour de grands échantillons de portées, directions et vitesses initiales.

Pour que les points de Henry soient convenablement alignés il faut accumuler un grand nombre d'observations et donc un temps assez long au cours duquel les variations de précisions des tirs dues à l'échauffement et à l'usure des tubes mais aussi les changements importants de conditions atmosphériques perturbent grandement les paramètres de la loi normale postulée. Comment dès lors vérifier la normalité pour un petit nombre de tirs ou encore pour des tirs normaux à paramètres variables? C'est le problème du commandant Lhoste que nous exposons maintenant.

Il est vraisemblable que Lhoste ait d'abord voulu s'affranchir des paramètres inconnus de la loi, et qu'il ait trouvé naturel de considérer les variables centrées réduites empiriquement. Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des valeurs observées de la grandeur dont il s'agit, notons $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ et $s = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$, les valeurs réduites naturelles sont visiblement

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{s}}$$

Si les valeurs observées sont des réalisations d'un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ d'une même loi normale de moyenne et de variances quelconques mais fixées, Lhoste montre alors que l'une quelconque des variables réduites $Z_i = S^{\frac{1}{2}}(X_i - \bar{X})$ a une densité proportionnelle à

$$\frac{1}{n-1} \frac{z^2}{n-1} \frac{n-4}{2}$$

Le coefficient de proportionnalité est donnée au paragraphe 4 et nous importe peu ici, il ne dépend pas des paramètres de la loi normale considérée mais seulement de n . On trouvera également dans ce paragraphe 4 une démonstration générale des lois de Lhoste vectorielles et quelques unes de leurs propriétés. Le résultat publié par Lhoste en 1925 est démontré de façon plus élégante dans un article de Haag [1925] qui travaille sur les variables (de Haag) $Z/\sqrt{n}$.

Deux cas particuliers intéressants de la loi de Lhoste sont susceptibles de résoudre le problème de Lhoste.

- Si $n = 4$, les variables Z sont de loi uniforme sur l'intervalle $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ sous l'hypothèse de normalité — autrement dit, si X_1, X_2, X_3, X_4 sont 4 variables aléatoires indépendantes et de même loi normale, $\frac{X_1 - \bar{X}}{\sqrt{3S}}$ est uniformément répartie sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Il suffit par conséquent de regrouper les tirs par lots de 4 (de préférence successifs pour s'affranchir autant que possible des changements de paramètres). On peut alors tracer la fonction de répartition empirique des valeurs réduites et vérifier graphiquement qu'elle est voisine d'une droite. Lhoste applique cette méthode à 50 séries de 4 coups de 90 et obtient une « vérification satisfaisante ». Dans son traité [1926] Haag applique la méthode de Lhoste à 956 coups de 75 (portée), 956 coups de 75 (direction), 384 coups de 155 (portée) et 384 coups de 155 (direction) et à la réunion de tous ces coups ensemble. De nouveau la vérification est excellente.

- Si n est grand, la densité de Lhoste s'écrit

$$\frac{1}{n-1} \frac{z^2}{n-1} \frac{n-4}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

C'est donc à fort peu près une loi normale centrée réduite. Lhoste et Haag proposent alors de regrouper les tirs par lots de 50 et de calculer les variables de Lhoste associés. On vérifie sur un papier gaussien la conformité de la fonction de répartition

empirique avec celle de la loi normale standard. Avec les mêmes données Haag observe que les résultats obtenus «sont également excellents» [1926, p. 137].

Très tôt les artilleurs ont remarqué qu'il y avait quasi indépendance entre portée et direction d'un tir, les ellipses d'égale probabilité ont des axes parallèles aux axes de coordonnées (voir à ce sujet [Didion] et les auteurs cités en bibliographie, voir aussi [Bertrand 1888] qui discute ce point dans son chapitre IX sur la probabilité du tir). On peut donc appliquer la méthode de Lhoste simultanément en portée et en direction et représenter graphiquement les couples ainsi obtenus sur un carré de côté $2\sqrt{3}$. On obtient des points assez bien répartis et Haag conclut de nouveau «c'est remarquablement vérifié».

Le test graphique de Lhoste ne paraît pas avoir connu le succès mérité, on en trouve quelques rares traces dans la littérature militaire [Schäitánov, p. 777], [Dumas 1939, p. 446], mais, semble-t-il, très peu de véritables applications en dehors de celles proposées par Haag et Lhoste rappelées ci-dessus. Lhoste lui-même paraît s'être désintéressé de cette question, du moins à notre connaissance et ses travaux n'ont survécu que par l'intermédiaire de Maurice Dumas, on verra sur ce dernier point le bel article de Denis Bayart à paraître.

4. LES TESTS DE LHOSTE DE MULTINORMALITÉ

Comme nous venons de le voir, le test de Lhoste de normalité suffit amplement aux besoins de l'Artillerie. Il n'en est évidemment plus de même dans d'autres applications, en biométrie notamment où l'on rencontre très souvent des cas de binormalité ou de multinormalité à coordonnées liées entre elles. Les ellipses d'égales probabilités de Galton sont inclinées sur les axes de coordonnées, c'est le phénomène de «régression». Il est donc naturel de se demander s'il n'existe pas des versions multidimensionnelles du test de Lhoste et l'on imagine bien que la réponse est positive. C'est ce que nous voyons dans ce paragraphe, renvoyant au paragraphe 6 pour des énoncés mathématiques plus complets.

Examinons tout d'abord la dimension 2.

Soit donc un échantillon $X_1, X_2, \dots, X_n$ d'une loi normale bidimensionnelle de moyenne et de dispersion données. Formons $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$, les moyennes et dispersions empiriques, (les vecteurs $X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \end{bmatrix}$ sont notés en colonne et X_i^t est la ligne correspondante. De façon générale nous notons A^t la transposée de A). $S = \begin{bmatrix} S_1 & C \\ C & S_2 \end{bmatrix}$, avec $S_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2$, $j=1,2$, et $C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{i2} - \bar{X}_2)$. Notons $R = \frac{C}{\sqrt{S_1 S_2}}$ le coefficient de

corrélation empirique de l'échantillon (la locution coefficient de corrélation empirique est une norme AFNOR).

Choisissons alors les racines carrées triangulaires de S et $S^{\square 1}$ définies par

$$S^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{S_1} & 0 \\ R\sqrt{S_2} & \sqrt{S_2(1-R^2)} \end{bmatrix}, \text{ et } S^{\square \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-R^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{1-R^2} & 0 \\ R & \frac{1}{\sqrt{S_2}} \end{bmatrix}$$

$$\text{on a } S^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}t} = S \text{ et } S^{\square \frac{1}{2}} S^{\square \frac{1}{2}t} = S^{\square 1}.$$

Posons $Z_i = S^{\square \frac{1}{2}}(X_i - \bar{X})$, on vérifie que la loi de Z_i ne dépend pas des paramètres de la loi normale dont cette variable est issue sa densité bidimensionnelle est nulle à l'extérieur du cercle de rayon $\sqrt{n-1}$ centré à l'origine et, à l'intérieur de ce cercle, elle est proportionnelle à

$$1 - \frac{x^2 + y^2}{n-1}$$

Comme dans le cas de la dimension un, deux valeurs de n sont particulièrement intéressantes

Si $n = 5$, la loi des variables Z_i est uniforme à l'intérieur du cercle de rayon 2.

Si n est grand, la densité de Z_i est normale centrée réduite, de densité $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, à un $\frac{1}{n}$ près.

Les deux cas suggèrent des tests graphiques d'emploi très commode, comme nous le voyons au paragraphe suivant. Il suffit de former des groupes de cinq variables (ou de 50) et de calculer toutes les variables de Lhoste associées, ou simplement une pour chaque groupe, on obtient alors, sous l'hypothèse de normalité, des réalisations d'un échantillon de la loi uniforme sur le cercle de rayon 2 (ou d'une loi normale standard de dimension 2), réalisations dépendantes à l'intérieur de chaque groupe mais indépendantes de groupe à groupe. Un simple coup d'œil aux points ainsi obtenus permet de se faire une idée de la validité de l'hypothèse de normalité, qu'on pourra tester en cas de doute.

On aurait pu naturellement considérer la racine carrée symétrique de S , ou toute autre racine carrée analytique, les résultats auraient été les mêmes en loi mais les calculs moins commodes. Sur la théorie des racines carrées des matrices on verra par exemple [Horn, Johnson] ou [Magnus, Neudecker].

Ce que nous avons fait pour la dimension 2 s'étend sans difficulté notable à la dimension supérieure, notamment la dimension 3. Les graphiques sont alors en 3D mais restent très lisibles, l'hypothèse de normalité se traduisant pour les variables de Lhoste associées par des points uniformément répartis à l'intérieur de la sphère origine de rayon $\sqrt{5}$. On se reportera au paragraphe 6 pour le détail du cas général.

5. APPLICATION

Nous allons appliquer ce test pour des données bivariées supposées suivre une loi normale. Pour cela, nous avons recueilli dans un centre de santé de protection maternelle et infantile les poids en grammes, taille et périmètre crânien en centimètres de 145 bébés de trois mois.

poids	6250	5900	6100	7200	6000	5700	7100	5800	4200	5800	7000
taille	62	60	62	56	63	58	64	59	59	60	62
P.C.	40	42	38	42	42	38	43	41	37	42	42

poids	9000	8500	6000	6750	5100	5600	6200	7000	5900	4900	6700
Taille	60	66	62	65	58	59	59	62	60	60	58
P.C.	42	43	39	40	41	42	40	42	39	39	41

poids	7900	6800	5550	6400	6900	7750	7800	5600	6600	5500	7300
taille	50	62	60	55	60	65	61	62	62	56	62
P.C.	38	42	42	39	41	44	41	40	41	41	40

poids	7000	6000	6400	5700	5550	6850	6300	5650	6100	6200	6250
taille	60	53	58	56	67	62	55	56	62	59	54
P.C.	44	41	41	40	39	41	41	41	41	39	40

poids	4800	7100	6000	6350	5800	7000	7000	7000	6700	6500	5800
taille	60	63	62	58	55	62	67	59	61	61	58
P.C.	41	41	40	41	41	42	43	42	42	42	45

poids	7000	6500	5800	5800	5700	6000	6500	5800	5700	4950	5000
taille	60	59	60	61	60	62	57	63	58	58	56
P.C.	39	42	41	42	41	42	42	40	38	40	42

poids	5800	7300	6000	5800	6700	5100	3650	7100	5500	7000	5000
taille	60	62	61	64	63	61	51	61	62	56	62
P.C.	39	42	41	40	40	41	36	40	40	36	41

poids	5500	6000	7100	6300	4500	4200	5600	6000	6100	5600	4500
taille	58	66	61	61	59	56	62	62	62	59	54
P.C.	42	43	40	40	39	38	37	42	38	41	38

poids	6000	7300	6900	6000	6000	6200	5600	5300	6300	6300	5550
taille	59	63	56	61	62	59	58	61	59	60	60
P.C.	41	42	42	39	41	39	40	41	42	39	40

poids	6900	6900	5300	6000	6100	7000	5800	6100	6000	6500	7000
taille	63	58	56	62	62	60	60	59	57	62	61
P.C.	43	40	41	42	43	40	42	41	41	41	37

poids	6400	6000	6650	6900	6700	6650	6700	6100	6500	7100	6000
taille	62	62	58	61	59	64	59	42	62	61	57
P.C.	42	41	43	38	41	44	38	38	42	41	40

poids	6100	5800
taille	56	61
P.C.	40	39

On a étudié séparément les variables (poids, taille), (poids, périmètre crânien) et (taille périmètre crânien), on a formé les variables de Lhoste de cinq en cinq à la suite, on obtient les 145 points suivants□

6. LES DENSITÉS DE HAAG-LHOSTE VECTORIELLES

Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de la loi normale de dimension d $N_d(\bar{\mu}, \Sigma)$. On note comme précédemment $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^t$ les moyennes et variances-covariances empiriques de X . On pose $T = (\bar{X}, S)$ et

$$Z_i = S^{\frac{1}{2}}(X_i - \bar{X}), \quad R_i = \frac{Z_i}{\sqrt{n-1}}$$

($S^{\frac{1}{2}}$ désigne une racine carrée de la matrice définie positive S , telle que $S^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} = S$, son

inverse vérifie alors $S^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} = S^{-1}$).

La densité conditionnelle de X_i sachant T ne dépend pas des paramètres et est égale

$$\text{à } \frac{\frac{n-1}{2} \pi^{\frac{d-1}{2}} [\Gamma(n-1)]^{\frac{d}{2}}}{\frac{n-d-1}{2} \pi^{\frac{d-1}{2}} |S|^{\frac{1}{2}}} \frac{(x - \bar{X})^t S^{-1} (x - \bar{X})^{\frac{n-d-3}{2}}}{n-1} dx, \text{ e. g. [Voinov, Nikulin 1996],}$$

d'où l'on déduit la densité de Z_i (loi de Lhoste multidimensionnelle) □

$$\frac{\frac{n-1}{2} \pi^{\frac{d-1}{2}} [\Gamma(n-1)]^{\frac{d}{2}}}{\frac{n-d-1}{2} \pi^{\frac{d-1}{2}}} \frac{z^t z^{\frac{n-d-3}{2}}}{n-1} dz, \text{ si } \|z\|_2 < \sqrt{n-1}$$

et celle de R_i (loi de Haag multidimensionnelle) □

$$\frac{\frac{n-1}{2} \pi^{\frac{d-1}{2}} (\Gamma(n-1))^{\frac{1-d}{2}}}{\frac{n-d-1}{2} \pi^{\frac{d-1}{2}}} [1 - r^t r]^{\frac{n-d-3}{2}} dr, \text{ si } \|r\|_2 < 1$$

Lorsque $d = 1$, cette dernière densité, considérée d'abord par Haag en 1925, a été étudiée indépendamment par Sato [1951] et vraisemblablement d'autres auteurs que nous ignorons.

Si d est quelconque, aucune de ces lois ne dépend des paramètres et lorsque $n = d + 3$, les variables R_i sont de loi uniforme sur la sphère unité de dimension d .

Dans l'espace de dimension d , définissons la transformation □

$$R = \frac{R}{\sqrt{1 + R'R}} \quad R = \frac{R}{\sqrt{1 + R'R}}$$

d'où l'on déduit :

$$dR = \frac{1}{\sqrt{1 + R'R}} dR \quad \frac{1}{1 + R'R} dR$$

de déterminant jacobien

$$(1 + R'R)^{\frac{d+2}{2}}$$

la densité de R est par conséquent

$$\frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{d}{2}} (n-1)^{\frac{1-d}{2}}}{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{1 + R'R} dR \text{ sur } R^d$$

En particulier si $d = 1$, on obtient la densité du t de Student

$$\frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{d}{2}}}{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{1 + t^2} dt$$

La loi de R est donc une loi de Student vectorielle et, dans le cas de la dimension 1, les lois de Haag-Lhoste peuvent être vues comme des transformées trigonométriques simples des lois de Student, dont les premières démonstrations rigoureuses, dues à R. A. Fisher, datent sensiblement de la même époque [Hald 1998]. Il existe d'autres lois de Student vectorielles, voir par exemple [Tong 1990], mais celle ci, la tangente de l'angle de Haag, est sans doute l'une des plus naturelles.

Pour en finir avec ces lois, calculons la loi de $R_i R_i = \frac{1}{n-1} (X_i - \bar{X})' S^{-1} (X_i - \bar{X})$.

Conditionnons de nouveau par T . Pour une fonction mesurable bornée quelconque h , on a, en posant $r = S^{-\frac{1}{2}} (x - \bar{X})$

$$E[h(R'R)/T] = \int_{\|r\| \leq 1} h(r'r) \frac{\left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{d}{2}}}{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{d}{2}}} \frac{(x - \bar{X})' S^{-1} (x - \bar{X})}{n-1} dx$$

Il suffit alors de passer en coordonnées sphériques polaires et de simplifier pour obtenir

$$E[h(R|R)] = \int_0^1 h(u) \frac{\frac{n-1}{2} u^{\frac{n-1}{2}-1} (1-u)^{\frac{n-1}{2}-1}}{\frac{n-1}{2} u^{\frac{n-1}{2}-1} (1-u)^{\frac{n-1}{2}-1}} (1-u)^{\frac{n-1}{2}-1} u^{\frac{n-1}{2}-1} du$$

c'est-à-dire une loi Bêta, d'où il est possible de tirer des tests d'ajustement à une loi normale multidimensionnelle sans estimations de paramètres. Ces tests sont des tests du χ^2 dès que n est grand, les lois Bêta étant alors très bien approchées par les lois du χ^2 , [Nikulin, Greenwood].

Reprenons le cas $d = 2$, pour lequel nous avons choisi la racine carrée de S triangulaire inférieure (cf. § 4).

Partageons l'échantillon en blocs successifs de 5 variables et formons les variables bidimensionnelles $Z_i = (Z_{i1}, Z_{i2}) = S^{\frac{1}{2}}(X_i - \bar{X})$, pour chaque blocs. Ces variables sont indépendantes de bloc à bloc et uniformément distribuées sur le cercle de rayon 2 centré à l'origine. Comme le signale Haag dans le cas de la dimension 1, on pourrait aussi bien constituer au hasard des blocs de cinq variables dans l'échantillon X et des vecteurs de Lhoste indépendants et uniformément distribués.

Considérons l'angle θ_i formé par le vecteur Z_i et un axe fixe du plan $0z_1z_2$. Il est également uniformément distribué et peut servir avec le module au carré de Z_i à construire un test graphique intéressant quoique moins simple que le précédent, ces deux variables n'étant pas indépendantes. Le module au carré de Z_i est uniformément distribué comme le montre sa loi pour $n = 5$, $d = 2$, ou un calcul direct élémentaire si un point est uniformément distribué à l'intérieur d'un cercle, sa distance au centre du cercle, élevée au carré, est uniformément distribuée.

On verra [Andrews *et al.*] pour d'autres tests graphiques basés sur les modules et arguments des vecteurs du plan, transformés de telle sorte qu'ils soient approximativement uniformément distribués dans le cas gaussien. Ces tests ne paraissent pas donner de meilleurs résultats que ceux des tests de Lhoste bidimensionnels et ils n'ont pas leur généralité ni leur élégance ce point est développé dans la thèse [Seddik Ameer 1995]. Il existe une importante littérature sur ces sujets, on verra notamment les livres [Gnanadesikan 1977], [du Toit *et al.* 1986], l'article [Romeu, Ozturk 1996] et la bibliographie commentée très complète de Mecklin et Mundfrom [2003]. Aucun de ces auteurs ne mentionnent les tests de Lhoste-Haag.

Remerciements. L'auteur remercie très chaleureusement Bernard Bru et Denis Bayart qui lui ont communiqué un grand nombre d'informations au sujet d'Ernest Lhoste. Nous avons également bénéficié des renseignements contenus dans le bel article à paraître de L. et A. Broemeling. Enfin nous remercions les éditeurs de la revue *Mathématiques et Sciences Humaines*, qui ont relu avec beaucoup de soin une première version de cet article et ont contribué grandement à son amélioration.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie très provisoire d'Ernest Lhoste. Nous avons rassemblé ici quelques références éparses sur les travaux de Lhoste. Une bibliographie exhaustive de l'auteur est en projet.

[1907] Faculté de droit de Paris, *Le Régime douanier des colonies françaises*, Thèse pour le doctorat, Paris, A. Pedone, 1907.

[1923] «Le calcul des probabilités appliqué à l'artillerie, lois de probabilité *a priori*», *Revue d'artillerie* 91, 1923, p. 405-423, 517-532 et 92, 1923, p. 58-82, 152-179.

[1925] «Étude d'un procédé rationnel permettant de vérifier la loi de Gauss», *Mémorial de l'Artillerie Française*, IV, 1^e fasc., 1925, p. 245-251, 1027.

[1928a] «La Normalisation», *Revue politique et parlementaire* 134, 1928, p. 410-417.

[1928b] «La Normalisation en France», *Revue politique et parlementaire* 137, 1928, p. 277-288.

[1932] «Observations sur la communication de M. Razous. Importance statistique de la crise économique actuelle», *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1932, p. 262.

[1935] «De la comptabilité et de la statistique dans l'étude des crises. Applications à la situation actuelle», *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1935, p. 189-204.

[1937] «Discussion de la communication de M. Dufrénoy», », *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1937, p. 283-284.

[1941] *La normalisation et l'art*, Conférence donnée le 14 novembre 1941 à la Société des ingénieurs civils de France. S.P.

[1943] *La normalisation, journée d'études et de propagande du 16 décembre 1942*, Paris, Comité national de l'organisation française, Association Française de Normalisation, 1943.

[1944] *La Normalisation dans le domaine de la mécanique*, Paris, Syndicat des constructeurs français de machines-outils. Centre syndical de documentation et de formation des techniciens de la machine-outil, 1944.

[1946] *Exposé de M. Lhoste, ... sur la normalisation au 1er novembre 1946*, Paris, Association Française de Normalisation, 1946.

Autres auteurs cités

AFNOR, *La Normalisation, journée d'études et de propagande du 16 décembre 1942*, Paris, Comité national de l'organisation française ; Association Française de Normalisation, 1943.

ANDREWS D. F., GNANADESIKAN R., WARNER J. L., *Methods for Assessing Multivariate Normality*, Murray Hill, Bell Laboratories, 1972.

ARMATTE M., «Maurice Fréchet statisticien, enquêteur et agitateur public», *Revue d'Histoire des Mathématiques* 7, 1, 2001, p. 7-65.

- AUBERT J., *La probabilité dans les tirs de guerre*, Paris, Gauthier-Villars, 1919.
- AUBRAT G. (Colonel), «Exposé d'une méthode de tir simulé fondée sur l'emploi de pétards pour indiquer l'éclatement des projectiles», *Revue d'artillerie* 21, 1883, p. 81-303.
- BARBUT M., LOCKER B., MAZLIAK L. *La correspondance Lévy-Fréchet*, édition critique, Paris, Hermann [à paraître].
- BACHELIER L., *Le Jeu, la Chance et le Hasard*, Paris, Flammarion, 1914, réimp., Paris, J. Gabay, 1993.
- BAUDET A., GIRARDEAU R. (général), *Normalisation*, Chambre de commerce de Paris, Institut d'organisation commerciale et industrielle, 1930.
- BAYART D., «Théorie des probabilités et pratiques industrielles les débuts difficiles du contrôle statistique de qualité en France», *Annales des Mines, série Gérer et comprendre* [à paraître 2003].
- BELHOSTE B., PICON A. (dir.), *L'École d'application de l'artillerie et du génie de Metz (1802-1870) Enseignement et recherches*, Paris, Musée des plans-reliefs, 1996.
- BERTRAND J. *Calcul des probabilités*, Paris, Gauthier-Villars, 1888.
- BOUTROUE P. (Lieutenant), «La dispersion et sa généralisation à deux et trois dimensions», *Mémorial de l'Artillerie Française*, II, 2^e fasc., 1923, p. 315-345.
- BOUZITAT J., «Note sur un problème de sondage», *ONERA*, Publication n° 1, 1947.
- BRAVAIS A., *Sur les méthodes employées dans les levés sous voiles*, thèse sci. math., Lyon, 1837.
- BRAVAIS A., «Sur les probabilités des erreurs de situation d'un point», accepté le 26 mars 1838, *Mémoires Savants étrangers*, IX (2^e série), 1846, p. 255-332.
- BRÉGER P.-J. (Capitaine), «Mémoire sur la probabilité d'atteindre un but de forme quelconque», *Mémorial de l'Artillerie de marine*, XVII, 1875, p. 313-388.
- BRÉGER P. J., «Quelques réflexions sur les ellipses d'égale probabilité», *Revue d'artillerie* 10, 1877, p. 82-86.
- BROEMELING L. D., BROEMELING A., «Studies in the history of probability and statistics. The bayesian contributions of Ernest Lhoste», *Biometrika* [à paraître 2003].
- BURILEANO S. (Capitaine), *Probabilité du tir, théorie et application au tir de l'infanterie et de l'artillerie*, Paris, Douin, 1911.
- CAQUOT A., «Ernest Lhoste», *Courrier de la Normalisation* 81, 1948, p. 883.
- CARON F., «Le rapport Clémentel», *Entreprise et Histoire* 3, 1993, p. 127.
- CHARBONNIER P. (Ingénieur général de l'Artillerie navale), «Essais sur l'histoire de la balistique», *Mémorial de l'Artillerie Française*, VI, 4^e fascicule, 1927, p. 955-1250.
- CRÉPEL P., «Henri et la droite de Henry», *Matapli* 36, 1993, p. 19-22.

CROIZÉ A. (Capitaine), «Note relative à la régularité des tirs d'expériences et aux règles à suivre pour déterminer le régime d'un tir avec une probabilité suffisante», *Revue d'artillerie*, 32, 1888, p. 572-582.

DIDION I. (Général), *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles*, Paris, Dumaine, 1858.

DUMAS M. (Ingénieur principal de l'Artillerie navale), «Note sur les séries de mesures appartenant à une loi de Gauss. Préseptions permises et interprétation des résultats», janvier-novembre 1936, *Mémorial de l'Artillerie Française*, XVI, 3^e fasc., 1937, p. 599-700.

DUMAS M., «L'introduction des probabilités dans les sciences concrètes», *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1948, p. 435-443.

DUMAS M., *Les épreuves sur échantillon*, Paris, CNRS, 1955.

DUMAS M., «Conditions de réception et statistique. Exposé critique, historique et conjectural», *Mémorial de l'Artillerie Française*, XLIII, 4^e fasc., 1969, n°170, p. 631-694.

DUMAS M., MAHEU P., *Les méthodes statistiques et leurs applications dans le domaine des techniques industrielles*, Paris, Eyrolles, 1951.

DUPUIS J. (Ingénieur en chef de l'Artillerie navale), «Notions sur la dispersion», *Mémorial de l'Artillerie Française*, XVIII, 4^e fasc., 1939, p. 899-958.

DU TOIT S. H. C., STEYN A. G. W., STUMPF R. H., *Graphical Exploratory Data Analysis*, New York, Springer, 1986.

ESTIENNE J.-E. (Général), *Loisirs d'artilleurs : le nombre et la valeur dans le combat moderne, études de géométrie, le théorème de Pascal, la loi d'entropie, les télémètres, étude sur les erreurs d'observation, essai sur l'art de conjecturer, causerie sur la tactique à l'usage de l'artillerie*, Paris, Berger-Levrault, 1907.

FAYET-SCRIBE S., CANET C., «Histoire de la normalisation autour du livre et du document : l'exemple de la notice bibliographique et catalographique. De la Bibliographie générale et raisonnée de la France (1791) à la Description bibliographique internationale normalisée (1975)», *Normes et documents numériques : quels changements* Sous la direction de G. Chartron et J.-M. Noyer, *Revue SOLARIS*, Décembre 1999, <http://www.info.unicaen.fr/bnum/jelec/Solaris/d06/>.

FERRY R., *Étude sur le régime douanier de l'Indochine*, thèse pour le doctorat en droit, Paris, Larose, 1912.

FRANCK P., *La Normalisation des produits industriels*, Paris, Presses universitaires de France, Que sais-je ?, 1954, 1981.

FRÉCHET M., *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*. Premier livre. *Généralités sur les Probabilités. Variables aléatoires* [avec une Note de M. Lévy], fascicule 3, tome I du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, par É. Borel, Paris, Gauthier-Villars, 1936, deuxième édition revue et augmentée, *ibid.*, 1950.

- GARNIER M. (Ingénieur principal de l'Artillerie navale), «Probabilités du tir fusant de 75 contre avions», *Mémorial de l'Artillerie Française*, II, 2^e fasc., 1923, p. 253-314.
- GAZOT E. (Commandant), *Détermination de l'écart probable d'une arme ou d'une munition au moyen de groupements d'un nombre restreint de coups*, Paris, R. Chapelot, 1904.
- GERMAIN A., «Le calcul du prix de revient dans l'artillerie (1879-1937), de la rationalisation économique à la comptabilité industrielle en partie double», *Les Cahiers de Recherche de l'A.F.C.* 5, 2000, p. 35-49.
- GNANADESIKAN R., *Statistical data analysis of multivariate observations*, New York, Wiley, 1977.
- GUILBAUD G. Th., *Leçons d'à peu près*, Paris, Christian Bourgois, 1985.
- HAAG J., «Sur l'application de la loi de Gauss à la position probable d'un point dans le plan ou dans l'espace», *Mémorial de l'Artillerie Française*, II, 2^e fasc., 1923, p. 217-252.
- HAAG J., «Procédé rationnel permettant de vérifier la loi de Gauss (problème du commandant Lhoste)», *Mémorial de l'Artillerie Française*, V, 3^e fasc., 1926, p. 67-70.
- HAAG J., *Applications au Tir*, fascicule 1, tome IV, [Applications diverses et Conclusion du] *Traité du calcul des Probabilités et de ses Applications*, par É. Borel, Paris, Gauthier-Villars, 1926.
- HALD A., *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*, New York, Wiley, 1998.
- HÉLIE F., *Traité de balistique expérimentale* [2^e édition augmentée, avec la collaboration de M. Hugoniot], Paris, Gauthier-Villars, 1884.
- HENRI P. (Colonel), *Probabilité du Tir*, [Cours professé à Fontainebleau, 1894, reproduit dans le] *Mémorial de l'Artillerie Française*, V, 2^e fascicule., 1926, p. 294-447.
- HERMARY H. A. H., (commandant), *Probabilité du Tir* [Cours professé à Fontainebleau], 1884.
- HEYDE C. C., SENETA E., CRÉPEL P., FIENBERG S. E., GANI J., *Statisticians of the Centuries*, New York, Springer, 2001.
- HORN R. A., JOHNSON C. R., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1991.
- IGALENS J., PENAN H., *La normalisation*, Paris, Presses Universitaires de France, Que sais-je, 1954, 1994.
- JOUFFRET E. (Commandant), «Étude sur l'effet utile du tir», *Revue maritime et coloniale* 4, 1872, p. 205-246.
- JOUFFRET E. (Commandant), «Sur la probabilité du tir et la méthode des moindres carrés», *Revue maritime et coloniale* 3, 1873, p. 5-30, 523-544, 957-988, 3, 1874, p. 65-680, 986-1021, 4, 1874, p. 131-152.
- LAMOTHE A. (Ingénieur en chef de l'Artillerie navale), «Réflexions sur le calcul des probabilités», *Mémorial de l'Artillerie Française*, XIII, 4^e fasc., 1934, p. 1039-1091.

LAVOISY O., *La Matière et l'Action, le graphisme technique comme instrument de la coordination industrielle dans le domaine de la mécanique depuis trois siècles*, thèse, Grenoble, Université P. Mendès-France, 2000.

LEMERCIER C., (éd.), *Actes du Colloque Armement, Stratégie, Nation, de Gribeauval à la force de frappe*, Paris, École militaire, 18-19 janvier 2001, Paris, Comité pour l'histoire de l'armement [à paraître].

LÉVY P., *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Paris, Blanchard, 1970.

LIAGRE J. B. J. (Lieutenant général), *Calcul des probabilités et théorie des erreurs*, Bruxelles, Muquardt, 1879 (2^e édition).

MAGNUS J. R., NEUDECKER H., *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, New York, Wiley, 1986, revised ed., *ibid.*, 1999.

MAILLY J., *La Normalisation*, Paris, Dunod, 1946.

MECKLIN C. J., MUNDFROM D. J., «An Appraisal and Bibliography of Tests of Multivariate Normality», Murray State University, Dpt Math., Stat., preprint, 2003, campus.murraystate.edu/academic/faculty/chris.mecklin/Review.pdf.

MUZEAU E. (Colonel), *Calcul des erreurs*, cours professé à Fontainebleau, 1884.

NIKULIN M. S., GREENWOOD P. E., *Guide to Chi-Squared Testing*, New York, Wiley, 1996.

PAGEZY E. (Général), *Traité de tir contre avions*, Ministère de la guerre, 1919, Paris, Berger-Levrault, 1925.

PALLEZ A., «Normes de la statistique, du calcul des probabilités et des erreurs de mesures, », *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1949, p. 125-133.

PERCIN A. (Général), «Sur la précision que procure dans le réglage du tir, l'observation de la grandeur des écarts», *Revue d'artillerie* 23, 1883, p. 189-195.

POISSON S.-D., «Formules de probabilités, relatives aux résultats moyens des observations, qui peuvent être utiles dans l'artillerie», *Mémorial de l'Artillerie Française* III, 1830, p. 141-156.

PUTZ H. (Général), «Mémoire sur les principes fondamentaux de l'application du calcul des probabilités aux questions d'artillerie», *Revue d'artillerie*, 32, 1888, p. 213-240, 313-343.

RAO C. R., *Linear Statistical Inference and its Applications*, New York, Wiley, 1965, 2nd ed., *ibid.*, 1973, 2002.

ROMEY J. L., OZTURK A., «A new graphical test for multivariate normality», *Amer. J. Math. Management Sci.* 16, 1996, p. 5-22.

ROUSSEAU G., *Étienne Clémentel (1864-1936), entre idéalisme et réalisme, une vie politique, essai biographique*, Clermont-Ferrand, Archives départementales du Puy-de-Dôme, 1998.

ROYAL (Lieutenant-colonel), *Revue d'artillerie*, 15 juillet 1924, p. 24-36.

- RUAULT M. (Général), *Mémorial de l'Artillerie de Marine* 1892, p. 351-372.
- SALMON P., *La Normalisation internationale, son aspect actuel, son avenir*, Paris, AFNOR, 1948.
- SALMON P., «Hommage à M. Lhoste», *Courrier de la Normalisation* 81, 1948, p. 82.
- SATO R., « χ^2 -distributions and r-tests», *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* II (2), 1951, Tokyo.
- SCHAIÏTANOV E. (Lieutenant-colonel de l'Artillerie impériale russe), «Sur les lois de dispersion. Analyse critique des bases fondamentales de la théorie de la dispersion», *Mémorial de l'Artillerie Française* XIV, 1935, p. 731-786.
- SCHOLS C.-M., «Note sur la probabilité du tir», *Revue d'artillerie* 23, 1883, p. 408-412.
- SIACCI F. (Major de l'Artillerie italienne), «Sur les axes de groupements», (extrait du *Giornale di artiglieria e genio*) *Revue d'artillerie* 22, 1883, p. 521-544.
- SONNET H., «Probabilité de tir», *Dictionnaire des mathématiques appliquées*, Paris, Hachette, 1874, p. 1103-1108 (2^e édition,).
- STIGLER S. M., *The History of Statistics The Measurement of Uncertainty before 1900*, Cambridge, Belknap Press of Harvard Univ. Press, 1986.
- STIGLER S. M., *Statistics on the Table. The History of Statistical Concepts and Methods*, Cambridge, Harvard University Press, 1999.
- TONG L., *The Multivariate Normal Distribution*. New York, Springer-Verlag, 1990.
- VALLIER E. (Colonel), «Étude de la probabilité du tir», *Revue d'artillerie* 9, 1877, p. 201-224.
- VOINOV V., NIKULIN M. *Unbiased Estimators and Their Applications*, vol. 2, *Multivariate Case*, Dordrecht, Kluwer Academic Press, 1996.