Analyse critique de la notion de variable (points de vue sémiotique et formel) - Seconde partie

Jean-Pierre Desclés et Kye-Seop Cheong

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/msh/3414>

DOI : 10.4000/msh.3414

ISSN : 1950-6821

Éditeur

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée

Date de publication : 27 juin 2006

Pagination : p. 69-99

ISSN : 0987-6936

Référence électronique

Jean-Pierre Desclés et Kye-Seop Cheong, « Analyse critique de la notion de variable (points de vue sémiotique et formel) - Seconde partie », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 174 | Été 2006, mis en ligne le 30 juin 2010, consulté le 23 juillet 2020. URL : <http://journals.openedition.org/msh/3414> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/msh.3414>

ANALYSE CRITIQUE DE LA NOTION DE VARIABLE (POINTS DE VUE SEMIOTIQUE ET FORMEL)¹ (SECONDE PARTIE)

Jean-Pierre DESCLÉS², Kye-Seop CHEONG³

RÉSUMÉ – Pour B. Russell, la variable est peut-être une des notions les plus difficiles à comprendre en mathématiques (*The Principles of Mathematics*, 1903). En effet, la variable est fondamentalement polysémique. Sa signification varie avec les domaines d'utilisation ; tantôt elle est utilisée pour indiquer une indétermination d'un signe dans une équation ; tantôt elle sert à décrire analytiquement une fonction en Analyse, tantôt, on l'utilise en logique pour exprimer la quantification au moyen de « variables liées ». Nous donnons une brève analyse historique de l'évolution de cette notion en mathématiques, depuis sa création avec l'Algèbre de Viète et Descartes pour l'expression des équations, jusqu'à la représentation formelle d'un concept, formalisé par Frege comme une fonction non numérique, ce qui a donné naissance aux modernes langages du premier ordre. D'une part, la théorie des signes de Peirce et d'autre part, les types fonctionnels de Church, le λ -calcul « avec variables liées » ainsi que la logique combinatoire de Curry « sans variables liées », sont d'excellents instruments qui sont convoqués pour examiner les différentes sortes de variables aussi bien en mathématiques, qu'en logique ou en informatique théorique. Par exemple, nous montrons que la notion de « variable liée » n'est pas nécessaire pour la formulation de la quantification en logique et son analyse dans le fonctionnement des langues naturelles : un quantificateur simple est avant tout un opérateur qui s'applique à un prédicat afin de construire une proposition ; un quantificateur restreint est dérivé d'un quantificateur simple, obtenu par une composition fonctionnelle avec un connecteur logique (les opérateurs d'implication ou de conjonction). Nous proposons de prendre en compte et de formaliser à l'intérieur du cadre formel de la logique combinatoire typée : (i) les « vieilles notions » logiques « extension / intension », (ii) les distinctions issues de la psychologie cognitive et de l'anthropologie, entre les exemplaires « typiques » ou « atypiques » d'un concept, (iii) l'opération de détermination » de la Logique de Port Royal, ce qui nous a conduit à définir les quantificateurs « star », considérés comme des opérateurs qui viennent apporter des déterminations supplémentaires aux termes, en particulier aux termes nominaux. Ces nouveaux quantificateurs sont plus adéquats à l'analyse logique des langues naturelles que les quantificateurs frégéens. Nous sommes ainsi capables de donner une distinction nette entre les significations de « quelconque » et « indéterminé », qui sont implicitement mises en œuvre dans la Dédution Naturelle de Gentzen. Cela nous conduit à donner une solution à un paradoxe apparent qui surgit avec la règle d'introduction du quantificateur universel.

MOTS-CLÉS – Algèbre, Fonction, Logique combinatoire, Quantification, Sémiotique, Variable

¹ Ce texte est le résultat des nombreux et fructueux dialogues menés lors des séjours de K.-S. Cheong, pendant son année sabbatique à Paris en 2002, et de J.-P. Desclés, à Séoul, en 2003 et 2004. Il peut être considéré comme une réflexion préliminaire à un article plus technique sur les formalismes intrinsèques [Desclés, 1980, 1981] que la logique combinatoire de Curry et les catégories cartésiennes fermées expriment.

² Laboratoire LaLICC (Langages, Logiques, Informatique, Cognition et Communication), unité mixte 8139 CNRS/Paris-Sorbonne, Maison de la Recherche, 28, rue Serpente 75006 Paris, Jean-Pierre.Descles@paris4.sorbonne.fr

³ Duksung Women's University, Séoul, 132-714 – Corée, kseopcheong@hanmail.net

SUMMARY – Critical analysis of variable (semiotic and formal viewpoints) (Second part)

For B. Russell “The variable is perhaps the most distinctively mathematical of all notions ; it is certainly also one of the most difficult to understand” (The Principles of Mathematics, 1903). *The aim of this paper is to highlight the meaning of variable in different fields of Mathematics: the expression of equations in Algebra with indeterminate entities; the analytical expression of functions in Analysis; the expression of quantification in Logic... We give a historical survey of this notion from Viète and Descartes to Frege’s representations of a concept, viewed as a non numerical function, yielding to the modern theory of quantification in first order languages. On one hand, the Peirce’s theory of signs, and on the other hand, with Church’s functional types, λ -calculus “with bound variables” and Curry’s combinatory logic “without bound variables”, are very useful tools for investigating different kinds of variables in Mathematics, in Logic and in theoretical Computer Sciences. For instance, it was showed that “bound variables” were not semiotic tools necessary to formulate quantification (in Frege’s sense) in “classical” Logic. Indeed, a simple quantifier is an operator which applies to a predicate by building a proposition; restricted quantifiers are derived from simple quantifiers by formal combinations with logical connectors (conditional or conjunction operators). We propose to take into account and to formalize, inside the framework of Combinatory Logic with types, (i) the “old logical notions” of “extension / intension”; (ii) determination operations from Port Royal’s Logic; (iii) the distinction from the anthropology and cognitive psychology between “typical” and “atypical” instances of a concept, which brings us to define new quantifiers, called “star quantifiers”, conceived as determination operators acting on terms. These quantifiers are more adequate than the fregean quantifiers, for a natural languages processing. Thus, we are able to give a conceptual distinction between the meanings of “Whatever” and “Indeterminate”, implicitly used in Gentzen’s Natural Deduction; thanks to this distinction, we can clarify an apparent “paradox” emerging with the universal quantifier introduction rule.*

KEYWORDS – Algebra, Combinatory Logic, Function, Quantification, Semiotics, Variable

La première partie de l’article nous amène à faire un bilan des différents usages de la variable, en algèbre d’abord, en analyse mathématique (analyse des fonctions) ensuite, puis en logique. Nous examinerons ensuite l’usage (temporalisé) de la variable dans les langages de programmation de style impératif (enchaînement d’instructions procédurales). Nous reviendrons sur l’analyse de la quantification dans la logique classique, en présentant quelques aspects de la «*déduction naturelle*» de Gentzen, qui a le mérite d’une part, de mieux faire comprendre le fonctionnement ambigu de la variable, en tant que «*objet quelconque*» ou en tant que «*objet indéterminé*» et d’autre part, de laisser apparaître une difficulté (proche d’un paradoxe) que nous analyserons.

7. DIFFERENTS USAGES DE LA NOTION DE VARIABLE

7.1. VARIABLE = UN REPRÉSENTANT D’UNE QUANTITÉ INCONNUE DANS UNE ÉQUATION

La variable dans une équation relative aux nombres, représente une quantité inconnue, c'est-à-dire un objet numérique *a priori* indéterminé. Lorsqu'on substitue à la variable dans l'équation une certaine quantité correspondant à la solution de l'équation, l'équation est alors vérifiée et, dans ce cas, sa valeur dénotative est «*véritable*», sinon sa valeur est «*faux*». Par conséquent, une équation de la forme :

$$(1) \quad A(x) = 0$$

où « x » présente des occurrences dans l'expression algébrique « $A(x)$ », est une expression tenue pour «vraie» pour certaines valeurs substituées à *toutes les occurrences* de la variable « x » dans « $A(x)$ » et «fausse» pour toutes les valeurs qui n'en sont pas des solutions. Du point de vue des écritures logiques, l'équation algébrique se ramène donc à une quantification existentielle (implicite⁴) de la forme :

$$(2) \quad (\exists x) [A(x) = 0]$$

ou mieux, en dégageant complètement le rôle du quantificateur « $\exists$ », de celui de la liaison qui est opérée à l'aide de l'opérateur d'abstraction « λ » :

$$(3) \quad \lambda_1 [(\exists x) . [A(x) = 0]]$$

Dans l'expression (1), nous avons une quantification existentielle enfouie : la proposition (2) est vraie si et seulement si l'équation (1) a (au moins) une solution et fausse sinon. Le domaine de parcours de la variable est donc le domaine d'interprétation, c'est-à-dire celui des entités (ou des objets) où l'équation acquiert un sens. Lorsque l'équation (1) est vérifiée, la variable « x » dénote un certain «objet indéterminé» du domaine d'interprétation de l'équation. Cet «objet indéterminé» peut être en général calculé par une procédure explicite, par exemple par un algorithme de résolution de l'équation qui construit la solution⁵. Lorsque la même équation n'a pas de solution dans un domaine d'interprétation donnée, la variable « x » parcourt le domaine d'interprétation et, pour chacun de ces objets, l'expression équative (1) est fausse. Ainsi, pour une équation « $A(x) = 0$ » qui est déclarée «valide», toutes les occurrences de la variable dénotent, dans l'expression $A(x)$, un certain objet indéterminé choisi dans l'ensemble des solutions de l'équation, cet ensemble dépendant évidemment du domaine d'interprétation. Lorsque l'équation « $A(x) = 0$ » n'a pas de solution dans un domaine d'interprétation, la variable « x » dénote *n'importe quel objet* du domaine, ce qui a pour effet d'assigner la valeur « faux » au concept « $(\exists x).[A(x) = 0]$ » pour chacun de ces objets.

7.2. VARIABLE = UNE ENTITÉ SUBSTITUTIVE DANS UNE IDENTITÉ REMARQUABLE

Dans des identités remarquables comme :

$$(4,a) \quad (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(5,a) \quad x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

nous avons une quantification universelle implicite :

$$(4,b) \quad (\forall x) [(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1]$$

$$(5,b) \quad (\forall x)(\forall y) [x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)]$$

⁴ Il est clair qu'une équation prend toute sa signification lorsqu'elle s'interprète sur un domaine déterminé. Un objet qui est solution de l'équation appartient à l'ensemble des solutions. Dire que l'équation $A(x)$ a (au moins) une solution, c'est donc affirmer que la proposition (2) est vraie.

⁵ Un raisonnement par l'absurde – par exemple la preuve de l'irrationalité de «racine de 2», solution de l'équation « $x^2 - 2 = 0$ » – peut prouver, éventuellement, l'existence – ou la non existence – d'une solution dans un domaine donné mais il ne la construit pas. Il faut trouver par ailleurs un algorithme de construction de la solution, quand elle existe.

Là encore, pour mieux séparer le rôle du quantificateur universel « $\forall_1$ » et celui des liaisons entre occurrences, assurées par l'opérateur d'abstraction « λ », les expressions précédentes sont équivalentes aux suivantes :

$$(4,c) \quad \forall_1 [(\lambda x) \cdot [(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1]]$$

$$(5,c) \quad \forall_1 [(\lambda x) \cdot [\forall_1 [(\lambda y) \cdot [x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)]]]]$$

Dans ces identités remarquables, quelle est la dénotation des symboles de variable ? Ces symboles dénotent une *expression bien formée quelconque objectale* (c'est-à-dire dénotant un objet représenté par le langage algébrique), à savoir n'importe quel objet, déterminé ou indéterminé, exprimé dans ce langage⁶. Le langage algébrique doit être spécifié avec (i) les règles de formation morphologique des expressions objectales, déterminées et indéterminées, puis avec (ii) des règles de formation syntaxique des énoncés construits au moyen de certains prédicats (comme les prédicats relationnels d'égalité « $=$ », de différence « $-$ », $>$, $<$... λ le (méta-)prédicat « λ de jugement⁷» et, éventuellement, avec certains opérateurs fonctionnels et de quantification.

Les occurrences des variables d'une identité remarquable ne dénotent pas des objets externes représentés par le langage algébrique (par exemple des nombres) mais des expressions objectales du langage qui, à leur tour, peuvent représenter des objets externes du domaine d'interprétation. Ainsi, étant donnée la première identité remarquable (4,a), on peut substituer aux occurrences de « λx » n'importe quelle expression bien formée dénotant un objet quelconque du domaine d'interprétation, d'où les nouvelles expressions obtenues après substitution λ à titre d'exemple, substituons à « λx » les expressions algébriques respectives « $(y^2 + 1)^2$ », « $(x - 1)$ » et « $(a + b)$ », nous obtenons :

$$(6,a) \quad ((y^2 + 1)^2 + 1)^2 = ((y^2 + 1)^2)^2 + 2(y^2 + 1)^2 + 1$$

$$(6,b) \quad ((x - 1) + 1)^2 = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1$$

$$(6,c) \quad ((a + b) + 1)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) + 1$$

Remarquons bien que n'importe quelle expression symbolique, y compris les énoncés construits avec des prédicats, n'est pas substituable aux occurrences de la variable « λx », par exemple les expressions :

⁶ Dans l'approche logique de la détermination des objets (LDO) [Desclés, 1988, 2002 λ Pascu, 1999 λ Freund *et alii*, 2004], nous associons à chaque concept « $(\lambda x).[f(x)]$ », un représentant objectal, appelé « λ objet typique» et désigné par « $\lambda (\lambda x).[f(x)]$ » qui représente « λ au mieux», en tant qu'objet, le concept. Cet objet typique peut être déterminé ultérieurement par différents opérateurs de détermination, associés à d'autres concepts, qui viennent ainsi contribuer à fixer, plus ou moins, la détermination référentielle d'un objet. L'objet typique « $\lambda (\lambda x).[f(x)]$ » représente « λ bien» le concept puisque, par définition, il hérite de toutes les propriétés qui sont dans « λ l'intension » du concept. Cette approche permet une analyse formelle adéquate des articles indéfinis et des représentants typiques et prototypiques d'un concept. (Cf. aussi la note 52 (de la première partie de l'article), *Mathématiques et Sciences humaines*, n° 173, 2006(2), p. 94).

⁷ En logique, Frege a introduit le (méta-)prédicat de jugement, désigné par « λ »; une expression propositionnelle précédée de ce symbole est une proposition jugée « λ raie», soit parce que posée en tant qu'axiome, soit obtenue à la suite d'une démonstration. Cf. « λ ur la constitution sémiotique des langages», H.B. Curry λ *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.

$$(7,a) \quad * ((x +) + 1)^2 = (x +)^2 + 2(x +)^2 + 1$$

$$(7,b) \quad * ((x = 1) + 1)^2 = (x = 1)^2 + 2(x = 1)^2 + 1$$

deviennent illicites et sont donc sans signification car elles sont «*mal formées*» à l'intérieur du langage algébrique.

Pour résumer la différence de dénotation des variables dans les équations et dans les identités remarquables, nous disons que les variables qui apparaissent dans une identité remarquable algébrique, dénotent n'importe quelle expression objectale du langage lui-même. Dans l'expression d'une équation, les variables dénotent des objets, d'un ensemble de solutions possibles, ces objets étant *externes* au langage. Les variables dans une identité remarquable dénotent n'importe quelle expression objectale qui est *interne* au langage algébrique.

7.3. VARIABLE = UNE PLACE D'ARGUMENT DANS UNE FONCTION OU UN PREDICAT

Que dénote, en tant que symbole, une variable dans l'expression d'une fonction ?
Considérons l'expression générale d'une fonction :

$$(8) \quad y = f(x)$$

Cette expression exprime que les variations des objets indéterminés représentés par la variable «*x*» entraînent des variations des résultats «*y*», calculés, selon une règle de construction, à partir des objets représentés par «*x*». On peut ramener cette expression d'une fonction à une expression avec deux quantificateurs⁸

$$(9) \quad (\exists x) (\exists! y) [y = f(x)]$$

Une fonction définie sur un domaine D et à valeurs dans co-domaine D' associe à chaque élément «*x*» du domaine D une et une seule image «*y*» du co-domaine D', cette image «*y*» reçoit une dénotation qui peut être calculée, dans le meilleur des cas, à partir de ce que dénote la variable «*x*» dans le domaine D. Plus généralement, dans l'expression symbolique d'une fonction de la forme

$$(10) \quad y = A(x, x', x'' \dots)$$

les variables *x*, *x'*, *x''* ... expriment des «*indéterminées quelconques*» dans leurs domaines de variation respectifs; à chaque indéterminée on peut substituer n'importe quel objet du domaine de variation de cette indéterminée.

Pour mieux dégager le rôle joué par les différentes occurrences liées d'une même variable dans une expression et l'opération d'application elle-même qui consiste à substituer une expression donnée comme argument à toutes ces occurrences liées, la notation de Church s'impose. Ainsi, l'expression décrivant la correspondance qu'établit une fonction est construite par abstraction à partir d'une expression (par exemple une expression algébrique) qui décrit comment sera calculé le résultat après substitution, c'est-à-dire la valeur de la fonction. Ainsi, l'expression suivante

$$(11) \quad (\lambda x) . [A(x, x', x'' \dots)]$$

⁸ Le quantificateur « $\exists! y$ » exprime la quantification existentielle et l'unicité. Il existe au moins une entité et elle est unique.

est l'expression d'une fonction à un seul argument construite à partir d'une abstraction opérée sur la variable « x ». L'opération de substitution revient à substituer à chaque occurrence de la variable « x », mise sous la portée de l'opérateur d'abstraction « λx », un objet du domaine, en prenant toutefois certaines précautions pour éviter les « λ -éclapages de variables». Désignons par

$$(12,a) \quad [x := U] (A(x, x', x'' \dots))$$

le résultat de la substitution de l'expression U à chaque occurrence de « x » dans l'expression $A(x, x', x'', \dots)$. L'opération d'application d'un opérateur, exprimé par une λ -expression, à un opérande « M », revient donc à établir une relation (appelée, techniquement, une λ -réduction dans le λ -calcul de Church) entre *l'opération d'application à effectuer* sur l'opérande « M », dans le membre de gauche, et *le résultat de la substitution* de « M » aux occurrences de la variable abstraite dans l'expression de la fonction, dans le membre de droite :

$$(12,b) \quad (\lambda x) . [A(x, x', x'' \dots)] (U) _ [x := U] (A(x, x', x'' \dots))$$

L'expression obtenue ne mentionne plus, en général⁹, la variable « x » aux différentes places où ont lieu les remplacements mais elle mentionne l'argument « M », d'où la nouvelle expression $B(x', x'', \dots)$ avec, en général, des occurrences des seules variables $x', x'', \dots$:

$$(12,c) \quad B(x', x'' \dots) = [x := U] (A(x, x', x'' \dots))$$

Par exemple, pour fixer les idées, prenons l'expression suivante $A(x, x')$:

$$(13) \quad A(x, x') = 3x^2 / (x' + 4)$$

Nous en déduisons, par abstraction, l'expression d'une fonction :

$$(13,a) \quad (\lambda x) . [A(x, x')] = (\lambda x) . [3x^2 / (x' + 4)]$$

Dans cette expression, la variable « x » a été abstraite, son nom est devenu « λ » et donc sans importance mais, en revanche, la variable « x' » y joue le rôle d'un simple paramètre, d'où la nouvelle expression :

$$(13,b) \quad A'(x') = (\lambda x) . [3x^2 / (x' + 4)]$$

Lorsqu'on applique cette fonction à un objet externe, par exemple le nombre « 3 », nous obtenons :

$$(13,c) \quad (A'(x'))(3) _ [x := 3](3x^2 / (x' + 4)) \\ = 3 (3)^2 / (x' + 4) = 27 / (x' + 4)$$

D'une façon générale, l'expression d'une fonction qui est obtenue par abstraction à partir d'une expression algébrique ne fait plus intervenir le nom de la variable liée par l'opérateur d'abstraction. Cette variable liée est « λ », elle désigne seulement « λ place d'argument». En tant que symbole, elle ne désigne rien d'autre que *la place que peut occuper un objet quelconque* dans l'évaluation de la fonction pour cet objet. L'objet peut être un objet externe, c'est-à-dire un objet du domaine de variation des arguments de la fonction ou une expression qui représente un objet symbolique interne au langage

⁹ La restriction vient de ce que « M » pourrait contenir des occurrences « λ » de la variable « x ».

lui-même. Reprenons l'expression de la fonction « $A'(x')$ » précédente. Prenons maintenant pour argument l'expression bien formée « $y^2 - 1$ ». Nous avons alors :

$$\begin{aligned} (13,d) \quad (A'(x')) (y^2 - 1) &= ((\lambda x) . [3x^2 / (x' + 4)]) (y^2 - 1) \\ &= [x := (y^2 - 1)] (3x^2 / (x' + 4)) \\ &= 3 (3(y^2 - 1)^2) / (x' + 4) \end{aligned}$$

L'expression ainsi obtenue par substitution dépend des deux paramètres « x' » et « y » :

Remarquons que dans l'expression usuelle d'une fonction

$$(14,a) \quad y = f(x)$$

les occurrences de symboles « x » et « y » n'ont pas le même statut sémiotique. En effet, comme nous venons de le voir, le symbole « x » désigne une «place d'argument» tandis que le symbole « y » désigne un «objet indéterminé» qui est solution de l'équation exprimée en rétablissant le quantificateur existentiel implicite (sous la dépendance d'une quantification universelle) :

$$(14,b) \quad (\lambda x) [(\exists! y) [y - f(x) = 0]]$$

Le symbole « y » désigne donc un objet indéterminé de l'ensemble des solutions de l'équation dont elle est l'inconnue. Le calcul effectif de la dénotation de « y » dépend du choix de l'argument assigné à la place occupée par « x » dans l'expression $f(x)$.

7.4. VARIABLE = UN OUTIL DE LIAISON ENTRE DES OCCURRENCES

La variable est utilisée comme un outil de liaison entre plusieurs occurrences. En effet, dans l'expression suivante

$$(15) \quad y = x^2 + 2x + 1$$

la variable « x » rappelle que ses différentes occurrences dans l'expression précédente désignent une même entité indéterminée telle que, à la suite d'une opération de substitution, par exemple d'une constante comme « 3 », à la variable « x », nous devons remplacer *chaque* occurrence de « x » par la même constante. Nous pourrions

- 1) utiliser des «places vides», susceptibles d'accueillir des entités à la suite d'une substitution et
- 2) exprimer par un lien anaphorique une identification entre ces différentes places vides pour indiquer que l'on doit substituer *la même entité* à toutes les places vides liées entre elles. Nous pourrions alors écrire l'expression précédente sous la forme

$$(15,a) \quad y = (\quad)^2 + 2(\quad) + 1$$

Ce lien traduit une relation anaphorique exprimée en langue naturelle par des expressions d'identification comme *la même* ou par un relatif comme *dont, qui*. Ainsi, l'expression précédente (15,a) s'énoncerait en français par (15,c) ou (15,d)

$$(15,c) \quad \text{« } y \text{ désigne une entité numérique qui est égale à la somme du carré d'une autre entité avec le double de cette seconde entité, le tout augmenté de l'unité »}$$

- (15,d) « $\square$ est égal à une expression qui est construite à partir d'une entité *dont* on prend le carré puis le double en *en* faisant la somme à laquelle on ajoute l'unité $\square$.

La substitution d'une entité, par exemple une constante, à une des places vides permet d'identifier toutes les places vides entre elles et donc d'y substituer exactement la même entité. Cette présentation avec des places vides et des liens anaphoriques n'est guère commode car elle exige une notation supra-segmentale. L'introduction d'une variable, en tant qu'indicateur de place liée à une autre place dans une expression, permet d'écrire et de manipuler des expressions dont les symboles sont positionnés selon un ordre total linéaire qui reproduit l'ordre syntagmatique des langues écrites¹⁰. De plus, cette notation « $\square$ deux dimensions $\square$ conduirait à intriquer les liens entre occurrences de plusieurs variables. Prenons par exemple l'expression suivante $\square$ otée avec les notations usuelles de l'algèbre :

$$(16) \quad y = x^2 + 2xz + z^2(x + z)$$

Cette expression sera présentée comme suit avec deux liens anaphoriques intriqués :

$$(16,a) \quad y = (.)^2 + 2(.) (.) + (.)^2 ((.) + (.))$$

Une telle expression est difficile à «énoncer $\square$ en langue naturelle $\square$

- (16,b) « $\square$ est une entité qui est égale à une expression construite à partir de deux entités en faisant la somme du carré *de la première* avec le double du produit des deux entités, à laquelle on ajoute le carré de *la seconde* que l'on a multiplié par *leur* somme ».

Le recours à des variables pour indiquer des liaisons entre des occurrences d'une même variable a conduit les logiciens, à la suite des notations implicites des mathématiciens, notamment en Analyse, à considérer explicitement deux genres de variables $\square$ les variables « $\square$ bres $\square$ et les variables « $\square$ liées $\square$. La liaison entre les occurrences d'une même variable est introduite par un opérateur de liaison qui établit un lien anaphorique, pour une éventuelle opération de substitution ultérieure, entre les différentes occurrences d'un même symbole de variable. On doit cependant spécifier la portée de l'opérateur de liaison puisque le même symbole de variable peut, dans une même expression, algébrique ou logique, avoir tantôt une occurrence liée, qui tombe alors sous la portée de l'opérateur de liaison, et tantôt avoir une occurrence libre, qui est alors à l'extérieur de la portée de cet opérateur. Le symbolisme logico-algébrique usuel amalgame souvent sous un même symbole d'opérateur à la fois l'opérateur de liaison avec sa portée et un opérateur plus spécifique. En analyse, l'opérateur d'intégration confond dans un même symbole « $\square$ l'opérateur de liaison des occurrences liées et l'opérateur d'intégration proprement dite, comme dans l'exemple suivant $\square$

$$(17) \quad y = \square ax^2 + 2bx \square dx$$

¹⁰ La notation proposée par Frege (1893) pour la proposition conditionnelle n'a pas été retenue par les autres logiciens car elle nécessitait un espace à deux dimensions pour se déployer, aussi chaque déduction prenait-elle très vite des proportions importantes sur le support matériel du raisonnement formalisé.

De même, comme nous l'avons déjà vu précédemment, la λ -notation introduit à la fois une opération de liaison entre des occurrences d'un symbole de variable et une opération d'abstraction, qui construit un opérateur à partir d'une expression analytique qui décrit le mécanisme de l'opération déclenchée par l'action de l'opérateur. Prenons l'expression

$$(18) \quad (\lambda x) . [x^2 + 2x + 1] + 3(x^2 + z)$$

qui désigne une fonction avec deux paramètres. La portée de l'abstraction est l'expression « $x^2 + 2x + 1$ », délimitée par les deux symboles de ponctuation « λ » et « $]$ ». Toutes les occurrences de « x » dans cette expression sont liées par l'abstracteur « λx ». La substitution d'une expression, par exemple « u^2 », à « x » *devra être effectuée sur toutes les occurrences* de « x » dans la portée de l'opérateur d'abstraction, d'où l'expression, après substitution

$$(18,a) \quad (u^2 + 2u + 1) + 3(x^2 + z)$$

Dans l'expression de départ, *avant* substitution de « u^2 » à « x », nous avons des occurrences liées et des occurrences libres du même symbole « x » : la substitution n'opère que sur les occurrences liées et non sur les occurrences libres.

Les notations usuelles des quantificateurs dans le calcul des prédicats amalgament, comme nous l'avons déjà remarqué, les opérations de liaison entre occurrences et les opérations de quantification. Prenons les deux expressions suivantes

$$(19,a) \quad (\lambda x) [A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow C(x)$$

$$(20,a) \quad (\lambda x) [(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow C(x)]$$

Dans (19,a), l'occurrence de « x », en tant qu'argument de « $\lambda(x)$ », n'est pas liée par la quantification alors que dans la seconde expression (20,a), toutes les occurrences de « x » sont liées par la quantification. Pour mieux faire apparaître les rôles différents des deux opérations, liaison et quantification, une meilleure notation serait comme nous l'avons déjà dit :

$$(19,b) \quad (\lambda_1 (\lambda x) . [A(x) \rightarrow B(x)]) \rightarrow C(x)$$

$$(20,b) \quad \lambda_1 (\lambda x) . [(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow C(x)]$$

La portée d'un opérateur doit être explicitement indiquée. Pour prendre un exemple de changement de portée, les deux expressions suivantes, où B ne dépend plus de « x », ne sont nullement équivalentes

$$(21,a) \quad (\lambda x) [A(x) \rightarrow B]$$

$$(22,a) \quad (\lambda x) [A(x)] \rightarrow B$$

On peut vérifier¹¹ que la première expression et la seconde sont respectivement équivalentes à

$$(21,b) \quad (\lambda x) [A(x)] \rightarrow B$$

$$(22,b) \quad (\lambda x) [A(x) \rightarrow B]$$

¹¹ Ce sont des théorèmes logiques du calcul des prédicats.

Les phénomènes de liaison des occurrences et de portée d'un opérateur conduisent, pour éviter les télescopages des variables, après des changements de variables dans la portée d'un opérateur de liaison, à prendre certaines précautions dans la présentation du Calcul des prédicats (ou dans la présentation du λ -calcul ou encore dans la présentation des règles du calcul intégral).

7.5. VARIABLE = UNE AFFECTATION TEMPORALISÉE DANS LES LANGAGES DE PROGRAMMATION

Une expression comme

$$(23) \quad x := 1$$

consiste à affecter la valeur «1» à une entité indéterminée, dont le nom est «x». Désormais, le contexte est fixé par l'affectation (1) d'une valeur à un nom : on doit substituer à toutes les occurrences de la variable «x» la valeur qui lui a été assignée, *du moins tant qu'on reste dans le contexte de la portée de l'affectation*. Ainsi, un certain nombre de langages de programmation font appel à la notation suivante

$$(24) \quad x := x + 1$$

lorsque l'on cherche, par exemple, à calculer la valeur d'une fonction «f(x)» par des itérations successives des valeurs entières affectées à la variable «x», à partir d'une valeur initiale de «x», par exemple avec l'affectation «x := 1». Tant qu'une certaine condition n'est pas satisfaite, l'itération se poursuit avec, à chaque pas, une nouvelle affectation. La procédure itérative de calcul se présente généralement comme suit

- (i) **Affectation initiale** $x = 1$ et passer à l'instruction (ii)
- (ii) 1) **Calculer** la valeur «f(x)», pour la valeur affectée à «x»
 2) **Tester** :
si la valeur de «f(x)» vérifie la condition «C(f(x))» où C est un certain prédicat unaire (exprimant une condition sur la valeur calculée),
alors sortir de l'itération, avec la dernière valeur de «f(x)» qui a été calculée,
sinon passer à (iii)
- (iii) **Nouvelle assignation** $x = x + 1$ et recommencer l'instruction (ii).

Il est certain que l'expression (24) fait intervenir explicitement une conception sous-jacente d'une temporalité discrète (où le temps est, ici, considéré comme un ensemble dénombrable d'instants). Le côté gauche du symbole « $=$ » signifie que la valeur nouvelle affectée à la variable «x», à un instant t' , doit être calculée à partir de la valeur qui a déjà été affectée à «x» à l'instant précédent t . Le calcul de «x» (dans le côté gauche de l'expression (2)) à l'instant t' consiste à ajouter l'unité «1» à la valeur que «x» (côté droit de l'expression (2)) avait à l'instant t . La procédure itérative de calcul de la fonction «f(x)» est donc calculée, dans un premier temps, avec la valeur initiale «x = 1» puis, ensuite, avec les valeurs successives affectées à «x», soit «x = 2», «x = 3»... jusqu'à ce que le test soit vérifié.

Chaque affectation détermine ainsi *un contexte qui reste le même* tant que celui-ci n'a pas été changé par une nouvelle affectation, soit directement signifiée (affectation directe), soit calculée à partir de l'affectation précédente (affectation calculée). Dans ce cas, le «domaine de parcours» de «x», en tant que variable, est l'ensemble des valeurs

qu'elle peut prendre successivement au fur et à mesure des affectations calculées, instant après instant.

L'expression (24) peut être ramenée ni à une équation avec une entité inconnue à calculer, donc à une expression quantifiée existentiellement, ni à une expression formelle quantifiée universellement. Il s'agit d'une nouvelle façon d'utiliser le symbole de variable « x » en insérant celle-ci dans un univers, structuré par une temporalisation, et en interprétant le symbole « $x :=$ » comme un symbole *d'affectation temporaire* d'une valeur à « x », définissant ainsi un nouveau contexte d'interprétation ou de calcul.

L'affectation de valeurs à des variables définit un contexte. Aussi peut-on, parfois, avoir des ennuis non négligeables avec des «effets de bord» (side effects) qui introduisent, dans ce cas, des erreurs graves dans les programmes. Considérons, à titre d'exemple, le programme suivant où « a », « b » et « c » sont des constantes données et où « f » et « g » sont des fonctions arbitraires :

```

1.      i := 0
2.      y := c
3.      tant que y < b
           faire
               x := a
               i := i + 1
               y := f(x)
               x := g(x, i)
           fin faire
4.      sortir x, y

```

Le lecteur qui aura la curiosité de faire tourner ce programme sera étonné de voir, en demandant une trace de toutes les valeurs calculées à chaque pas de la procédure faire... fin faire, que si les valeurs de « x » changent bien au cours des itérations successives, en revanche les valeurs de « y » restent identiques; de plus, il constatera que si « $f(a) < b$ » le programme ne se termine pas. En effet, à chaque itération de l'index i , la valeur de la variable « x » est changée, puisqu'elle dépend de cet index, mais la valeur de la variable « y » reste, elle, inchangée, puisque, précédemment dans le calcul, la variable « x » s'est vue affectée la même valeur initiale « a ». Nous avons, dans ce programme, un «effet de bord» typique. Le programme correct devrait être le suivant :

```

1.      i := 0
2.      y := c
3.      x := a
4.      tant que y < b
           faire
               i := i + 1
               y := f(x)
               x := g(x, i)
           fin faire
5.      sortir x, y

```

Ce programme sortira une séquence de valeurs (x, y) qui seront, en général, différentes et il se terminera.

La difficulté avec l'implémentation des programmes informatiques conduit à prendre en compte une certaine «temporalité», souvent absente des préoccupations de la logique classique. Il faut donc introduire, pour une variable déclarée dans un programme, une distinction nécessaire en tenant compte d'un côté, de sa «portée» (Scope) et d'un autre côté, de sa «durée temporelle» (Extent) qui est l'intervalle de temps durant lequel la variable a «une durée de vie» : «[...] scope is a spatial concept and extent is a temporal one»¹². Prenons par exemple le programme suivant (où «ff» est un opérateur quelconque de transformation des valeurs) :

```

début      réel: x ;
           x := 5 ;
           début      réel: x ;
                   x := 1
                   faire f(x) ;
                   x := f(x) ;
                   fin faire
           fin
fin
imprimer (x)
fin

```

où la portée de la variable déclarée «ff» présente «un trou» puisqu'elle passe par dessus une déclaration emboîtée qui fait appel au même nom «ff» de variable, aussi la durée de vie de la variable initiale la traverse-t-elle et l'impression sortira «ff».

La recherche des «effets de bord», le contrôle des portées et des durées de vie dans les programmes sont délicates à dépister et sont à la source de nombreux «bugs». Pour contourner ces difficultés, plusieurs langages de programmation expriment les programmes avec des formalismes sans mécanismes d'affectation et même, dans certains cas, «sans variables». C'est le cas des langages de programmation fonctionnelle, construit sur le modèle logique de la logique combinatoire «sans variables (liées)»¹³.

8. VARIABLE LOGIQUE = «OBJET QUELCONQUE» ET «OBJET INDETERMINE»

Comme nous l'avons vu précédemment (§ 6), les variables logiques dans la théorie de la quantification dénotent, selon les contextes, des «objets quelconques» ou des «objets indéterminés». Ces deux rôles, tenus par les variables qui tombent dans la portée des quantificateurs, apparaissent clairement dans la présentation du Calcul des prédicats par la «déduction naturelle» selon Gentzen¹⁴ et beaucoup moins dans les autres présentations (par exemple axiomatiques) de la logique. En effet, la règle d'élimination

¹² Joseph Stoy, *Denotational Semantics: The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory*, The MIT Press, 1977, p. 42.

¹³ Par exemple ML ou, avec types CAML et HASKELL. (Cf. aussi Hudak [1989]).

¹⁴ Gerhard Gentzen (1934), traduit en français par R. Feys et J. Ladrière dans *Recherches sur la déduction logique*, [1955]. On trouve une excellente présentation de la Déduction Naturelle de Gentzen dans les ouvrages de Quine, *Méthodes de logique* [1959, 1972], de Frederik Fitch [1952], surtout de Jean-Blaise Grize [1969] : ces deux derniers livres font bien apparaître la hiérarchie des sous déductions et la portée des hypothèses introduites dans une déduction.

du quantificateur universel ($\forall$ -e) introduit *un objet quelconque*, exprimé par «une variable» mais, en revanche, la règle d'introduction du quantificateur existentiel ($\exists$ -i) fait intervenir une hypothèse où une certaine propriété est appliquée à *un objet indéterminé* (et non pas à un objet quelconque). Les deux autres règles, à savoir la règle d'introduction du quantificateur universel ($\forall$ -i) et la règle d'élimination du quantificateur existentiel ($\exists$ -e), font également bien apparaître la différence essentielle entre «objet quelconque» et «objet indéterminé», bien que le formalisme utilise dans les deux cas une même notation avec introduction ou élimination d'«une variable» mais le rôle opératoire et interprétatif tenu par cette variable n'est pas le même.

Nous allons reprendre en détail la formulation des règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs dans la présentation opérée par le Dédution Naturelle pour bien faire apparaître, dans les preuves où ces règles sont utilisées, la différence des deux rôles tenus par les variables qui tombent sous la portée des quantificateurs, rôles que la plupart des manuels logiques laissent parfois implicites¹⁵.

8.1. RÈGLE D'ÉLIMINATION DU QUANTIFICATEUR UNIVERSEL

La règle ($\forall$ -e) d'élimination du quantificateur universel (ou de particularisation) dans la déduction naturelle se formule comme suit

$$(1a) \quad \begin{array}{|l} (\forall x) [A(x)] \\ \hline \dots \\ A(y) \end{array}$$

La variable «y» est substituable¹⁶ à toutes les occurrences liées de «x» dans $A(x)$ dans ce cas, la variable y désigne un objet quelconque, à condition toutefois que «y» soit considérée comme étant libre dans l'expression « $A(x)$ » dans toutes les occurrences où elle a été substituée à «x». Cette règle ne fait pas de difficulté à condition toutefois d'interpréter «y» comme se référant à *un objet quelconque de son domaine de variation*. En effet, de toutes les entités qui sont dans l'univers référentiel composé des corbeaux on peut en inférer que «une entité quelconque de cet univers est un corbeau».

La règle (1a) prend une forme plus générale (1b) avec la quantification restreinte

$$(1b) \quad \begin{array}{|l} (\forall x) [A(x) \rightarrow B(x)] \\ A(y) \\ \hline \dots \\ B(y) \end{array}$$

De l'énoncé tous les corbeaux sont noirs, ou en d'autres termes si n'importe quelle entité qui est un corbeau est noir, et si, par ailleurs, «y» est un corbeau

¹⁵ La présentation des règles relève, nous en sommes conscients, d'un cours élémentaire sur la Dédution Naturelle mais la compréhension complète de la sémantique opératoire de ces règles est nécessaire pour nous amener à distinguer clairement «objet quelconque» et «objet indéterminé», ce qui est une des buts de notre article.

¹⁶ En évitant, comme il se doit, les télescopages des variables et donc en procédant, pour y remédier, à d'éventuelles introductions de variables fraîches.

quelconque alors, par la règle (1b), on en infère immédiatement que cette même entité « α » est noire.

8.2. RÈGLE D'INTRODUCTION DU QUANTIFICATEUR EXISTENTIEL

La règle ($\exists$ -i) d'introduction du quantificateur existentiel est :

(2a)	<div style="border-bottom: 1px solid black; display: inline-block; width: 100%;"></div>	A(a)
		
		($\exists x$) [A(x)]

où « α », désigne *un objet déterminé* (du point de vue de la référence). Puisqu'un tel objet possède la propriété «A», il est alors possible d'introduire le quantificateur existentiel en *remplaçant* certaines des occurrences de « α » par « x ». Supposons que nous ayons connu un animal déterminé, appelons-le « Oboko », qui soit reconnu comme étant un chimpanzé, il s'ensuit naturellement que l'on peut affirmer qu'il existe bel et bien une entité qui est un chimpanzé. La règle s'exprime de façon plus générale par

(2b)	<div style="border-bottom: 1px solid black; display: inline-block; width: 100%;"></div>	A(y)
		
		($\exists x$) [A(x)]

où, cette fois, « y » désigne *un objet indéterminé* dont on sait seulement qu'il possède la propriété exprimée par l'expression «A». Il s'ensuit que l'on peut en déduire qu'il existe bien un objet qui possède la propriété «A». Prenons un exemple. Si l'on a vu une créature qui correspondait exactement à la description d'une amazone, alors on peut logiquement affirmer « $\exists y$ a une créature qui est une amazone». On généralise la règle (2b) précédente par la règle (2c) relative à la quantification restreinte

(2c)	<div style="border-bottom: 1px solid black; display: inline-block; width: 100%;"></div>	A(y) & B(y)
		
		($\exists x$) [A(x) & B(x)]

Ainsi, si une entité indéterminée « y » possède à la fois les propriétés «être-corbeau» et «être-blanc» alors on peut en déduire « $\exists x$ existe au moins un corbeau blanc».

8.3. RÈGLE D'ÉLIMINATION DU QUANTIFICATEUR EXISTENTIEL

La règle ($\exists$ -e) d'élimination du quantificateur existentiel se présente comme suit

(3)	<div style="border-bottom: 1px solid black; display: inline-block; width: 100%;"></div>	($\exists x$) [P(x)]
		y P(y)
		<div style="border-bottom: 1px solid black; display: inline-block; width: 100%;"></div>
		
		B

La compréhension de cette règle est la suivante : soit la proposition « $(\exists x) [P(x)]$ » prise comme prémisse : elle affirme qu'il existe au moins un élément (du domaine de référence) auquel s'applique le prédicat « P » : un tel élément *n'est pas déterminé* (du point de vue de sa référence) – en général, nous sommes donc dans l'incapacité de le désigner effectivement ou de l'identifier ou même de le décrire avec précision, sauf dans le cas dégénéré où le domaine serait réduit à un seul élément – appelons 'y' cet élément indéterminé : nous postulons une seule connaissance : à propos de 'y' : le prédicat 'P' s'y applique. Nous pouvons alors étudier les conséquences de cette connaissance épistémique et chercher à en déduire tout ce que l'on peut de la proposition 'P(y)', en raisonnant sur cet objet 'y' pensé alors comme *désignant un objet indéterminé* et sur lequel aucune autre hypothèse supplémentaire ne doit être faite. Supposons que la déduction arrive à une expression 'B' qui ne fasse plus intervenir des occurrences de 'y'. On peut déduire 'B' de la proposition existentielle. Pour mieux comprendre le rôle d'objet indéterminé mis en œuvre dans une telle déduction, prenons la démonstration du théorème suivant :

$$(4) \quad _ ((\exists x) [P(x) \& Q(x)]) \vdash ((\exists x) [P(x)] \& (\exists x) [Q(x)])$$

1.		$((\exists x) [P(x) \& Q(x)])$	hyp.
2.	y	$P(y) \& Q(y)$	hyp.
3.		$P(y)$	&-e
4.		$(\exists x) [P(x)]$	$\exists$ -i, x subst à y
5.		$Q(y)$	&-e
6.		$(\exists x) [Q(x)]$	$\exists$ -i, x subst à y
7.		$((\exists x) [P(x)] \& (\exists x) [Q(x)])$	&-i
8.		$((\exists x) [P(x)] \& (\exists x) [Q(x)])$	$\exists$ -e, 1, 2-7
9.		$((\exists x) [P(x) \& Q(x)]) \vdash ((\exists x) [P(x)] \& (\exists x) [Q(x)])$	$\vdash$ -i

Commentons cette déduction. Partant d'une proposition existentielle, qui affirme l'existence d'un objet indéterminé (pas initial), nous décidons de raisonner sur cet objet indéterminé en le désignant par « y » (pas 2.). Cependant, nous nous interdisons de faire aucune autre hypothèse sur « y », excepté celle qui lui attribue les propriétés « P » et « Q ». Il faut donc que la désignation par « y » soit entièrement nouvelle : « y » n'a donc pas dû servir à désigner antérieurement d'autres entités que la démonstration locale reprendrait alors ensuite, conduisant alors à des erreurs (analogues aux «effets de bord» en programmation). Maintenant, « y » désignant un objet indéterminé, nous pouvons raisonner sur une proposition ordinaire en nous interdisant tout autre hypothèse sur cet objet désigné par « y » : nous en déduisons la conjonction « $P(y) \& Q(y)$ » et les deux propositions « $P(y)$ » (pas 3.) et « $Q(y)$ » (pas 5.). Remarquons que puisque « y » désigne, ici, «un objet indéterminé», les deux expressions « $P(y)$ » et « $Q(y)$ » ne sont pas des formes propositionnelles auxquelles on ne pourrait pas assigner des valeurs de vérité mais des propositions qui sont vraies dès que l'on a accepté la prémisse du pas 1. Les déductions dans le Calcul des prédicats fonctionnent entre propositions (la vérité se transmet de propositions à proposition) et jamais entre formes propositionnelles. Maintenant, de la proposition « $P(y)$ », qui affirme que la propriété « P » s'applique à l'objet désigné par « y » sur lequel on raisonne, nous en déduisons l'affirmation de l'existence en introduisant le quantificateur existentiel (pas 4.), d'où la proposition « $(\exists x) [P(x)]$ » ; il en est de même au pas 6., à partir de la proposition « $Q(y)$ », nous

obtenons la proposition $\ll \forall x [P(x)] \gg$. Remarquons que nous aurions pu écrire tout aussi bien $\ll \forall z [P(z)] \gg$ puisque le nom de la variable n'intervient pas. La conjonction des deux propositions existentielles s'en déduit immédiatement (pas 7.). Or, cette proposition ne fait plus intervenir l'occurrence de $\ll y \gg$ puisque toutes les occurrences des variables sont maintenant liées par les deux quantificateurs existentiels. Cette proposition est donc *devenue indépendante de l'objet indéterminé qui avait été désigné par $\ll y \gg$* et avec lequel on a raisonné. La règle d'élimination du quantificateur existentiel ($\exists$ -e) peut maintenant s'appliquer en posant (pas 8.) que la proposition indépendante de $\ll y \gg$, à savoir $\ll \forall x [P(x)] \& (\exists x) [Q(x)] \gg$, est déduite de la proposition posée comme hypothèse initiale $\ll \forall x [P(x) \& Q(x)] \gg$, et donc en se libérant de l'hypothèse locale (pas 2.) où $\ll y \gg$ désignait un objet indéterminé qui vérifiait à la fois les propriétés $\ll P \gg$ et $\ll Q \gg$.

En raisonnant ainsi sur cet objet indéterminé, on en tire un certain nombre de conséquences sans avoir fait aucune autre hypothèse sur lui. Ainsi, si $\ll$ dans une assemblée, il y a quelqu'un qui est mathématicien et linguiste $\gg$, alors on en infère que, dans la même assemblée, $\ll$ il y a quelqu'un qui est mathématicien $\gg$ et $\ll$ il y a quelqu'un qui est linguiste $\gg$. Pour s'en persuader, il suffit de raisonner sur un individu indéterminé qui est à la fois mathématicien et linguiste. Remarquons que la réciproque n'est pas vraie.

8.4. RÈGLE D'INTRODUCTION DU QUANTIFICATEUR UNIVERSEL

La règle ($\forall$ -i). d'introduction du quantificateur universel (ou de généralisation) se présente comme suit

$$(5) \quad \begin{array}{c|c} y & \dots \\ \hline & A(y) \\ & (\forall x) [A(x)] \end{array}$$

Cette règle signifie que *l'on raisonne avec un élément quelconque désigné par $\ll y \gg$* et sur lequel on *ne fait aucune hypothèse*. On ne peut donc pas réitérer une expression qui posséderait des occurrences libres de $\ll y \gg$ dans la sous déduction qui suit l'introduction de $\ll y \gg$ comme hypothèse. Si tel était le cas, l'élément désigné par $\ll y \gg$ ne serait plus quelconque puisqu'il posséderait une certaine propriété (par exemple $\ll B(y) \gg$). Supposons maintenant que *en raisonnant sur cet objet quelconque*, on arrive à démontrer que cet objet, bien que quelconque, possède néanmoins également la propriété $\ll A \gg$. La règle affirme que l'on peut se libérer du choix que l'on a fait du nom $\ll y \gg$ attribué à l'objet quelconque et alors généraliser en introduisant le quantificateur universel, en se débarrassant du choix opéré sur l'élément quelconque et particulier appelé $\ll y \gg$ dans la proposition universelle $\ll (\forall x) [A(x)] \gg$, les occurrences libres de $\ll y \gg$ dans $\ll A(x) \gg$ deviennent toutes liées par le quantificateur, cette proposition ne dépend pas du nom de la «variable» $\ll x \gg$ (qui est ici «lettre»). Donnons un exemple d'utilisation de (5) avec la preuve de la déduction suivante

$$(6) \quad (\forall x) (\forall y) [P(x) \& (P(y) \supset Q(y))] \supset (\forall x) [Q(x)]$$

1.		$(\forall x) (\forall y) [P(x) \& (P(y) \supset Q(y))]$	hyp.
2.	z	$(\forall x) (\forall y) [P(x) \& (P(y) \supset Q(y))]$	réitération de 1.
3.		$(\forall y) [P(z) \& (P(y) \supset Q(y))]$	$\forall$ -e, z subst à x
4.		$P(z) \& (P(z) \supset Q(z))$	$\forall$ -e, z subst à y
5.		$P(z)$	$\&$ -e
6.		$P(z) \supset Q(z)$	$\&$ -e
7.		$Q(z)$	$\supset$ -e
8.		$(\forall x) [Q(x)]$	$\forall$ -i, 2.-7., x subst à z

Commentons cette déduction. À partir de la prémisse (pas 1.), on entre dans une sous déduction *en raisonnant sur un élément quelconque* désigné par « $\boxed{z}$ » «Soit un z quelconque». Cet élément étant quelconque dans l'univers de référence, il n'est pas *a priori* soumis à une hypothèse le concernant. Il faut donc veiller à ce que « $\boxed{z}$ » ne désigne pas un autre objet qui aurait été déjà introduit antérieurement et sur lequel porterait d'autres propriétés, auquel cas l'objet désigné par « $\boxed{z}$ » ne serait plus quelconque. En réitérant l'hypothèse, on obtient le pas 2. Puisque « $\boxed{z}$ » dénote un objet quelconque, nous pouvons bien substituer « $\boxed{z}$ » à « $\forall x$ » en éliminant le quantificateur universel « $(\forall x)$ » la propriété qui est affirmée pour toutes les entités s'applique naturellement à cet objet quelconque appelé « $\boxed{z}$ » (pas 3.). De même, pour les mêmes raisons, nous pouvons substituer le même « $\boxed{z}$ » à « $\forall y$ » en éliminant le quantificateur universel « $(\forall y)$ » (pas 4.). Nous déduisons de la conjonction des propositions « $P(z) \& (P(z) \supset Q(z))$ » la conditionnelle « $P(z) \supset Q(z)$ » et les deux composantes « $P(z)$ » (pas 5.) et « $P(z) \supset Q(z)$ » (pas 6.). Remarquons que l'expression « $P(z) \& (P(z) \supset Q(z))$ » n'est pas, ici, une forme propositionnelle mais une proposition. En effet, les prédicats « P » et « Q » s'appliquent à un objet arbitraire, qui a été désigné par « $\boxed{z}$ ». Le symbole « $\boxed{z}$ » est donc, ici, le nom d'un objet quelconque, choisi arbitrairement et désigné par un nom arbitraire. Maintenant, par *modus ponens*, nous en déduisons « $Q(z)$ » (pas 7.). Comme « $\boxed{z}$ » désigne un objet quelconque, il s'ensuit que nous pouvons introduire un quantificateur universel, d'où le pas 8. La conclusion est ainsi déduite de l'hypothèse initiale. Le raisonnement précédent a fait apparaître le rôle qui a été joué par *un objet quelconque désigné arbitrairement* par « $\boxed{z}$ » quelques précautions doivent être cependant prises pour maintenir le caractère arbitraire du choix du nom désignant un objet quelconque.

Illustrons la déduction précédente par un exemple plus concret. De l'affirmation «Dans cette académie, tous ses membres sont des mathématiciens et, par ailleurs, tous les mathématiciens de l'académie sont subtils», on peut en déduire que «Dans cette académie, tous ses membres sont subtils». Pour s'en persuader, on raisonne sur un élément arbitraire « $\boxed{z}$ » pris parmi les membres de l'académie. Or, cet élément étant arbitraire et quelconque, il possède la propriété d'être un mathématicien il est donc également subtil puisque tous les mathématiciens (de l'académie) sont subtils. L'élément étant quelconque, le même raisonnement peut être fait avec n'importe quel autre académicien et aboutir exactement à la même conclusion. La conclusion s'applique donc à tous les académiciens ils sont tous subtils.

La règle (5) est généralisée à la quantification restreinte par (7)□

$$(7) \quad \begin{array}{c|c|c} & y & B(y) \\ & & \dots \\ & & A(y) \\ \hline & & (\exists x) [B(x) \rightarrow A(x)] \end{array}$$

8.5. UN «PARADOXE» (APPARENT) LIÉ À LA RÈGLE ($\exists$ -I) ?

Les deux règles ($\exists$ -i).et ($\exists$ -e) nécessitent un certain nombre des précautions d'emplois. En effet, considérons la relation suivante□

$$(8) \quad P(x) \vdash (\exists x) [P(x)]$$

qui exprime que «Si on suppose qu'une entité *quelconque* possède la propriété P alors *tous* doivent posséder cette même propriété». En partant de cette relation d'inférence acceptée (*provisoirement*) comme étant vraie, on arrive à une conclusion qui est manifestement fausse, comme le remarquent Gochet et Gribomont [1990, p. 206-207], par une preuve analogue à□

$$(9^*) \quad \begin{array}{c|c|c|c} 1. & x & & P(x) \quad \text{hyp.} \\ & & & \hline 2. & & & (\exists x) [P(x)] \\ 3. & & P(x) \rightarrow (\exists x) [P(x)] & 1-2., \Rightarrow\text{-i} \\ 4. & (\exists x) [P(x) \rightarrow (\exists x) [P(x)]] & & \mathbf{3., 1-3., \exists\text{-i}} \\ 5. & (\exists x) [P(x)] \rightarrow (\exists x) [P(x)] & & 4., \text{loi logique} \end{array}$$

Ainsi, « $\exists$ » étant posé comme «quelconque», dans la déduction (9), on en déduit, par introduction du connecteur d'implication « $\rightarrow$ », le pas 3.; puis, par généralisation, avec la règle d'introduction du quantificateur universel, on obtient le pas 4.; or, la proposition obtenue au pas 5. lui est équivalente – la loi logique évoquée comme justification du pas 5. correspond à la relation entre (21,a) et (21,b) mentionnée au § 7.4., puisque, ici, le conséquent de la conditionnelle, au pas 4., *est indépendant du choix* de « $\exists$ » (« $\exists$ » est muette). Cependant, le résultat obtenu□

$$(10^*) \quad * (\exists x) [P(x)] \rightarrow (\exists x) [P(x)]$$

est manifestement une proposition fausse, ce ne peut pas être une loi logique¹⁷. En effet, de l'affirmation « $\exists$ y a un nombre pair», il ne suit pas que «tous les nombres sont pairs»□de même, de l'affirmation « $\exists$ y a un corbeau blanc», on ne peut pas en inférer dans l'univers des corbeaux que «tous les corbeaux sont blancs».Comment lever cet apparent paradoxe ?

Plusieurs solutions sont proposées dans la littérature sans toujours apporter une très grande clarté. Paul Gochet et Pascal Gribomont [1990, p. 205-206□ 230]

¹⁷ Une «loi logique» est une proposition toujours vraie quel que soit le domaine d'interprétation.

considèrent que l'on est passé «*subrepticement*» de l'interprétation générique de la variable à l'interprétation conditionnelle, en empruntant à Stoll cette distinction

*(...) dans une démonstration qui contient $A(x)$ à titre de supposition (assumption formula), on n'a pas le droit de généraliser x (d'appliquer à x la règle de généralisation universelle). En d'autres termes, x est traité comme une constante. Intuitivement, nous pouvons dire qu'une occurrence libre d'une variable dans une supposition est employée pour dénoter un individu arbitraire sans doute, mais néanmoins fixé. Dans les mathématiques formalisées quand une variable x est employée de cette manière on dit qu'elle reçoit l'interprétation conditionnelle. Au contraire, si x figure libre dans une formule $A(x)$ qui est un axiome de la théorie considérée, on dit que x reçoit l'interprétation générique ou de «*généralité*» (generality interpretation).*

(Stoll, 1961, p. 392, cité par [Gochet et Gribomont, 1990, p. 206])

La règle ($\square$ -i). est correcte pour autant que la variable est prise dans l'interprétation générique. La proposition (10) n'étant pas, manifestement, une loi logique, elle est vraie seulement à certaines conditions qui doivent alors être précisées par son contexte. La distinction «*générique/conditionnelle*» de Stoll, n'est pas, selon nous, extrêmement claire et demanderait certainement plus de précisions. Nous allons tenter, par la suite, de la préciser. Disons, dans un premier temps, que une variable a un «*emploi générique*» dans un axiome lorsqu'elle parcourt sans restriction aucune tout le domaine visé par l'axiome. Elle a un «*emploi conditionnel*» lorsqu'elle est restreinte à un certain domaine contextuel de variation. Nous devons, en fait, spécifier les notions de «*quelconque*» par opposition à «*objet arbitraire*» et à «*objet indéterminé*», ces notions étant par ailleurs très proches du point de vue de l'intuition première et de l'usage courant.

Nous devons préciser que la notion de «*quelconque*» est relative à un concept et donc à son extension. Ainsi, la relation (11)

$$(11) \quad P(x) _ (\square x) [P(x)]$$

doit être interprétée comme suit

*Si x désigne un objet quelconque relatif à un concept, par exemple «*être triangle*» et si, par ailleurs, cet objet quelconque possède une propriété P , par exemple «*avoir la somme des angles est égal à deux droits*», alors, puisque x désigne un objet quelconque, cette propriété P se distribue sur tous les objets qui font partie de l'extension du concept.*

Pour tenter d'expliciter plus profondément la notion de «*quelconque*», nous devons faire appel aux notions de «*prototype*» et «*l'objet typique*», de «*typicalité*» et «*atypicalité*». Nous avons proposé, dans différents articles [Desclés, 1997, 2003; Desclés & Pascu, 2006], une formalisation de ces notions, introduites par les psychologues et les anthropologues afin de mieux saisir les phénomènes de catégorisation (cf. [Le Ny, 1989; Dubois 1991; Cordier 1993; Kleiber, 1991]). Pour cela, nous faisons explicitement appel à «*l'intension d'un concept*».

Rappelons (cf. le § 5.3) que selon l'approche de Frege [1879-1884-1893], un «*objet*» est une entité désignative alors qu'un «*concept*» est une entité «*non saturée*», donc représentable par une $\square$ -expression. Un concept d'individus «*fin*» est conceptualisé comme une application d'un domaine D d'entités individuelles dans l'ensemble des valeurs de vérité, en d'autres termes comme un opérateur constructeur

de valeurs de vérité à partir d'opérands dénotant des entités individuelles. Un objet du domaine «*tombe sous* *f*» lorsque la valeur de «*f*», pour cet objet, est «*vrai*», il «*ne tombe pas sous* *f*» dans le cas contraire. L'extension du concept «*f*» est la classe de tous les objets qui tombent sous «*f*». Traditionnellement, l'intension de «*f*» est la classe de tous les concepts que ce concept «*f*» «*comprend*», «*contient*» ou «*subsume*». Un objet de l'extension de «*f*» est considéré comme un prototype lorsqu'il tombe sous tous les concepts «*g*» qui font partie de l'intension de «*f*». Un *prototype*, ou un représentant typique d'un concept, est donc un exemplaire objectal *qui hérite de toutes les propriétés de l'intension* de ce concept. Or, certains exemplaires «*qui tombent sous* *f*», ou en d'autres termes, ceux auxquels s'applique le concept «*f*», et qui sont par conséquent des éléments de l'extension de «*f*», ne sont pas nécessairement des représentants typiques du concept : ils ne sont donc pas des prototypes du concept, ce sont des exemplaires atypiques. Par exemple, «*une voiture avec trois roues*» peut être considérée comme étant atypique parmi les voitures ; de même, «*un corbeau blanc*» peut être considéré comme un exemplaire atypique des corbeaux. Prenons un autre exemple : l'autruche «*Rita*» est un exemplaire atypique parmi les oiseaux puisque les autruches ne volent pas, bien que les autruches soient des oiseaux et que, par ailleurs, les oiseaux ont la propriété de voler. Ainsi, Rita, en tant qu'autruche, n'hérite pas de toutes les propriétés qui sont dans l'intension du concept «*être oiseau*», c'est donc un oiseau atypique. Lorsqu'on veut prendre un exemple d'oiseau quelconque, il ne faut surtout pas prendre Rita, car Rita, en tant qu'oiseau, n'est pas quelconque (cf. [Desclés, 1988, 2002 ; Freund *et alii* 2004]).

Un *objet quelconque* est nécessairement quelconque relativement à un concept, il en est un exemplaire prototypique : il doit donc être pris, non pas en tant qu'exemplaire singulier, c'est-à-dire avec des déterminations propres et singularisantes, mais seulement en tant que représentant objectal typique du concept, c'est-à-dire en tant que «*son représentant*» objectal du concept, ou en d'autres termes, en tant que représentant objectal, dont on aurait fait abstraction de toutes les déterminations spécifiques qui en font un exemplaire singulier, pour ne retenir que les propriétés générales du concept, propriétés qui sont, par conséquent, partagées par tous les exemplaires typiques et donc par tous les prototypes du concept¹⁸, c'est-à-dire les propriétés de l'intension. Il s'ensuit qu'un objet quelconque, en tant que représentant prototypique, ressemble à tous les autres exemplaires prototypiques du concept, mais cette similitude – il s'agit, ici, d'une relation d'équivalence et non pas d'une identité – est engendrée par l'abstraction de toutes propriétés spécifiques et accidentelles attachées à chaque exemplaire singulier. La notion de «*quelconque*» est donc relative à la classe des objets prototypiques qui appartiennent à l'extension d'un concept. Lorsqu'un tel objet, saisi non pas en tant qu'objet singulier mais en tant qu'objet quelconque, est supposé posséder une propriété P, cette dernière *doit se distribuer sur tous les objets* (au moins sur les objets typiques et donc sur les prototypes de l'extension). Ainsi, lorsque nous disons :

(12) *Soit un triangle quelconque, appelé ABC*

il semble apparaître une certaine contradiction entre d'un côté, «*un triangle quelconque*» et d'un autre côté, le nom propre «*ABC*» qui le singularise, le fixe et le

¹⁸ Il y a une différence entre les exemplaires typiques et les prototypes. Une étude systématique de la détermination et de l'opposition entre «*étendue*» (de la Logique de Port Royal) et «*extension*» permettrait d'éclaircir cette distinction. Disons qu'un prototype est un exemplaire complètement déterminé dans «*extension*» alors qu'un exemplaire typique n'est pas nécessairement complètement déterminé dans «*étendue*».

désigne, éventuellement, par une représentation figurale singulière destinée à le visualiser¹⁹ avec ses déterminations singulières – c’est-à-dire avec une certaine longueur pour chacun des côtés, une certaine mesure pour chacun des trois angles. Mais, le triangle « $\triangle ABC$ » qui est présenté en tant qu’objet quelconque par « $\Box$ soit un triangle quelconque, appelé $\triangle ABC$ » ne vaut pas pour lui-même mais en tant que représentant du concept « $\Box$ être triangle», donc en tant qu’un des triangles prototypiques, la présentation, y compris par une désignation figurative singulière, valant ainsi pour n’importe quel autre prototype équivalent. Il faut donc distinguer la présentation exprimée par (12) de la présentation exprimée par (13)»

(13) *Voici un le triangle ABC*

qui dénote un triangle singulier qui tient pour lui-même et non en tant que représentant du concept « $\Box$ être triangle».

S’il est ajouté à la présentation (12) l’information selon laquelle « $\Box$ le triangle ABC possède la propriété ‘avoir la somme de ses angles égale à deux droits’», il est alors clair que cette propriété se distribue sur n’importe quel autre triangle, puisque la propriété, que nous affirmons de « $\triangle ABC$ », peut être affirmée de tout prototype associé au concept « $\Box$ être triangle»²⁰. Un triangle, comme un triangle d’une géométrie non euclidienne, qui ne serait plus un prototype de la classe des triangles, ne possède plus cette propriété « $\Box$ avoir la somme de ses angles égale à deux droits», aussi un tel triangle non euclidien devient-il un exemplaire atypique parmi les triangles. Seuls les triangles typiques qui héritent de toutes les propriétés constitutives de l’intension de « $\Box$ être triangle», peuvent être considérés comme des représentants quelconques, sur lesquels on peut raisonner en tant que des prototypes dont on a abstrait toutes les déterminations singularisantes.

Remarquons que la déduction (9), présentée plus haut, est *techniquement incorrecte* du point de vue des règles de la Déduction Naturelle. En effet, *elle télescope une hiérarchie dans les portées des variables introduites*. Le début de la déduction correcte, toujours en admettant (8), serait»

(14)

1.		x				P(x)	hyp.
2.						($\Box$ x) [P(x)]	
3.						P(x) $\Box$ ($\Box$ x) [P(x)]	1-2., =>-i

Cette dernière preuve s’interprète comme suit» *soit* « $\Box$ un objet « $\Box$ quelconque» maintenant, voulant introduire une hypothèse supplémentaire comme (8), nous devons introduire une hiérarchie supplémentaire et poser *si on suppose que cet objet « $\Box$ » est tel que s’il vérifie la propriété « $\Box$ » (hypothèse), alors tous les objets vérifient également la propriété « $\Box$ », nous déduisons bien, à ce niveau de hiérarchie, la*

¹⁹ Par exemple par un dessin sur le tableau ou sur une feuille de papier.

²⁰ Cf. K. Fine [1985], cité par F. Nef [1998, p. 217]. Pour Nef, nous avons les différents moments» (i) soit ABC un triangle, (ii) (un triangle) quelconque, (iii) la somme des angles est égale à 2 droits (iv) ce que nous affirmons de ABC peut être affirmé de tout triangle, (v) tout triangle a la somme de ses angles égale à 2 droits. (Cf. aussi [Nef, 1995, p. 154-159]).

proposition conditionnelle « $\Box x$ vérifie « $\Box P$ alors tous vérifie « $\Box \Box P$ ». Par conséquent, dans un univers référentiel précis et restreint, si une entité quelconque « $\Box$ vérifie la propriété « $\Box P$ alors toutes les entités du même univers référentiel la vérifient également. Mais, arrivé à ce stade, *nous ne pouvons pas nous libérer de la condition hypothétique* qui porte sur « $\Box$ objet « $\Box$ qui vérifie la propriété « $\Box \Box P$, et nous ne pouvons pas nous libérer du choix initial de cet « $\Box$ qui vérifie la propriété « $\Box P$ et qui nous sert de support à notre raisonnement. Ainsi, la relation de déduction (11) ne peut pas être démontrée et la proposition (10) n'est pas un théorème, c'est-à-dire une loi logique.

Lorsqu'on considère l'interprétation générique de la variable « $\Box$ », c'est-à-dire que le domaine de variation de « $\Box$ » n'est plus restreint par une hypothèse supplémentaire, la notion de « $\Box$ quelconque» n'est alors plus conditionnée par un concept particularisant qui viendrait restreindre la portée du « $\Box$ quelconque» et, dans ce cas, la déduction (8) ne doit pas considérer « $\Box$ » comme désignant un élément vraiment quelconque. La déduction (9) signifie que si on démontrait que l'extension de la propriété « $\Box P$ est non vide – dans ce cas, la proposition $(\Box x) [P(x)]$ est « $\Box$ vraie» – alors tous les éléments de l'extension partageraient la propriété « $\Box P$, l'objet, désigné par « $\Box$ », étant lui-même un de ces objets de l'extension de « $\Box P$. En revanche, lorsqu'on considère que l'occurrence de « $\Box$ » a une *interprétation conditionnelle*, la variation est restreinte à un certain domaine qui serait l'extension d'un (autre) concept précisé par le contexte» dans ce cas, pour un « $\Box$ » désignant un exemplaire non plus quelconque puisque soumis à une restriction, le raisonnement de la déduction (9) reste entièrement contextualisé et relatif à un certain concept qui vient ainsi limiter la portée extensionnelle du « $\Box$ quelconque». Autrement dit, la proposition (10) *ne vaut pas en tant que loi logique générale sans restriction*, ce qui est conforme à notre intuition, mais en tant que proposition sous la dépendance d'une condition restrictive supplémentaire. Dans ce cas (10) signifierait, « $\Box$ » désignant un objet quelconque relativement à un concept précisé par le contexte, s'il existe un « $\Box$ objet quelconque qui possède la propriété « $\Box \Box P$ dans ce sous domaine restreint, alors tous les autres objets prototypiques relatifs à ce concept, possèdent également cette propriété.

La preuve soumise à une *hypothèse conditionnelle restrictive* (« $\Box$ » reçoit, ici, une interprétation conditionnelle) se présente comme suit :

1.		x		$(\Box x) [P(x)] \Box (\Box x) [P(x)]$	hyp.
2.				$(\Box x) [P(x)] \Box (\Box x) [P(x)]$	conséquence de 1.

Cette preuve signifie « $\Box$ Soit un « $\Box$ pris dans un domaine où la proposition exprimée au pas 1. serait vraie» alors, dans ce domaine restreint, la conséquence devient valide. Arrivé à ce stade, il est devenu impossible de se « $\Box$ débarrasser» du choix restrictif de « $\Box$ » (« $\Box$ est tel que la proposition conditionnelle $(\Box x) [P(x)] \Box (\Box x) [P(x)]$ soit vérifiée) et donc de remonter dans la hiérarchie pour transformer en un théorème la proposition obtenue qui n'est vraie que relativement au domaine restreint.

On doit différencier cette preuve d'une preuve où la variable « $\Box$ » recevrait une *interprétation générique* par une énonciation axiomatique :

1.		$(\Box x) [P(x)] \Box (\Box x) [P(x)]$	* axiome
2.		$(\Box x) [P(x)] \Box (\Box x) [P(x)]$	loi logique

Évidemment, l'axiome $\ast \ll \Box \Box x \rangle [P(x)] \Box (\Box x) [P(x)] \gg$ doit être rejeté car il est contraire à l'intuition.

9. EN GUISE DE CONCLUSION

La notion de variable n'est pas aussi claire que l'on pourrait le souhaiter. L'emploi de la variable en algèbre est associé nettement à la fois à la notion d'*indétermination* (avec emploi implicite d'un quantificateur existentiel dans le cas d'une équation) et à celle de *quelconque* (avec l'emploi implicite d'une quantification universelle dans les identités remarquables). Dans la formulation analytique des fonctions, la variable d'argument dans une fonction est employée comme une « place d'argument », d'un côté, en traduisant ainsi la non saturation de la fonction et d'un autre côté, en fournissant un moyen explicite de calculer l'image de la fonction après la substitution d'un argument déterminé aux places vides liées entre elles. En logique, les notions de «*quelconque*» et «*indéterminé*» fonctionnent selon l'interprétation sémantique fixée par certaines règles, c'est-à-dire les règles d'introduction et d'élimination des «*constantes logiques*». La présentation de la logique classique par la Dédution Naturelle fait appel, dans la formulation des règles à deux significations et utilisations distinctes de la variable : en effet, d'un côté la variable est associée au «*quelconque*» et d'un autre côté, à «*indéterminé*». Or, ces deux notions, si elles sont assez proches dans l'usage commun, restent sémantiquement assez différentes alors que *les jeux des écritures sémiotiques adoptées par les formalismes classiques du premier ordre ne reflètent pas cette distinction conceptuelle*. Approfondir une telle distinction conduirait à s'interroger sur les notions constitutives de la logique elle-même, par exemple à approfondir les notions de «*prédicat*», de «*concept*», «*extension*» et «*intension*»..., en y adjoignant d'autres notions que la logique classique n'étudie pas, comme l'opération de «*détermination*», les notions de «*typicalité*»/«*atypicalité*» et de «*prototype*». Une explicitation plus complète de ces notions avec celles «*objet quelconque*» et «*objet indéterminé*» peut être abordée dans le cadre de la Logique de la Détermination des objets²¹ (LDO)²¹ qui est en développement (voir en particulier, Desclés & Pascu, 2006).

Par ailleurs, les variables «*liées*» ou «*libres*», conduisent, comme cela est bien connu, à certaines difficultés comme les risques de «*l'escopage des variables*» : un langage formel «*avec variables liées*» exige une gestion suivie de la déduction et, par conséquent, impose une certaine vue globale de cette dernière, ce qui rend la formalisation pas assez explicite, d'où de nombreuses difficultés dans la mise en œuvre informatique. Aussi certaines présentations de la logique, comme la logique combinatoire de Curry, n'utilisent-elles pas des variables liées pour éviter les différents pièges qui leur sont attachés, sans pour cela nuire au développement d'une théorie de la quantification sans variables liées. On comprend alors pourquoi certains langages de programmation se sont directement inspirés de la syntaxe de ce formalisme puissant et pourquoi la plupart des langages de programmation adoptent une sémantique formelle qui se déploie dans ce langage logique.

Comme l'a déjà justement remarqué Marcel Guillaume, la notion de variable passe de la simple désignation d'une entité indéterminée, en position exclusive d'opérande en algèbre élémentaire, à celle plus abstraite d'opérateur.

²¹ Sur la LDO, (cf. [Pascu, 1999 ; Desclés, 2002 ; Freund & alii, 2004 ; Desclés & Pascu, 2006]).

La variable (...) est la pièce élémentaire de toute expression formelle (...), l'absence d'une notation propre à l'Arithmétique va freiner le développement de l'algèbre, bien que dans l'oeuvre de Diophante apparaisse une lettre pour représenter l'inconnue, générique par essence.

Les variables, cependant, ne permettent pas de former des expressions formelles tant qu'on en borne l'usage aux positions d'opérandes, c'est-à-dire à la représentation d'objets entre lesquels on considère des relations ou à partir desquels on commence des calculs. Par contre, dès que l'on introduit, à côté de telles variables, des caractères que l'on destine à des positions d'opérateurs, c'est-à-dire à la représentation d'opérations et relations, on s'ouvre un domaine illimité de possibilités de formation d'expressions susceptibles de représenter des résultats d'instructions opératoires complexes, ou de propositions concernant de tels résultats.

(...) L'étape suivante [à l'innovation introduite par Viète] sur le chemin de la formalisation, est celle du passage du symbole opératoire représentant une opération bien déterminée, à la variable opératoire représentation d'une opération générique. Son franchissement s'opère en deux temps. Le premier introduit la représentation générique d'une opération engendrée par une suite, éventuellement indéfinie, en de compositions d'opérations élémentaires, qui sont celles de l'Algèbre et de la Géométrie : addition, soustraction, etc... La seconde substitue, aux représentations de ces dernières opérations, celles des lois de composition génératrices, elles-mêmes génériques.

[Marcel Guillaume, in Dieudonné, *Abrégé de l'histoire des mathématiques 1700-1990*, II, Paris, Hermann, 1978, p. 341-342].

Dans un premier temps, la variable est introduite pour exprimer une quantité inconnue dans l'expression formelle d'une équation. Dans un second temps, la variable va être utilisée pour définir les fonctions puis les opérations. La λ -notation de Church a permis d'écrire l'expression d'un opérateur, par un processus d'abstraction à partir d'une expression contenant des occurrences de variables (libres). L'étape suivante consiste à prendre la notion même d'opérateur comme thème d'étude et à le désigner par une simple variable (f, g, X, Y ...), pour en étudier les propriétés constitutives de l'opération générale d'application d'un opérateur à un opérande.

La logique combinatoire de Curry remplit parfaitement ce programme ambitieux de formalisation puisqu'elle est arrivée à un *complet détachement de l'opérateur*, devenu autonome, *par rapport à l'opérande*, en thématissant le premier comme un processus opératoire devenu quelconque, représenté alors par une variable (libre) au même titre que les variables d'opérande représentant des objets. Or, ce complet détachement n'est pas entièrement réalisé par le λ -calcul qui doit toujours faire appel dans les expressions manipulées à des variables liées par l'opérateur d'abstraction, ces variables pointant (au moins implicitement) vers le domaine des opérandes²². Dans la structure applicative «Opérateur appliqué à un opérande», les rôles opératoires d'opérateur et d'opérande ne sont plus des absolus mais ils sont devenus relatifs : une même entité peut fonctionner dans certains contextes, comme un opérateur et, dans d'autres contextes, comme un opérande. Les combinateurs sont des opérateurs abstraits qui composent entre eux des opérateurs quelconques (y compris eux-mêmes). Les combinateurs expriment ainsi tous les programmes possibles de composition formelle des opérateurs entre eux. La logique combinatoire de Curry, et dans une moindre mesure le λ -calcul de Church, atteint ainsi un pouvoir d'abstraction et d'expressivité synthétiques tel qu'un opérateur, qui représente une fonction définie sur un domaine

²² Sur ce dernier point, (cf. [Ladrière, 1973, 1984] Desclés, 1981] ainsi que le § 5.6).

interprétatif, peut s'appliquer à lui-même. Ainsi, en λ -calcul, peut-on appliquer la «fonction carré» à elle-même. En logique combinatoire, on peut faire opérer un combinateur, comme ' W '²³, sur lui-même

$WWW \rightarrow WWW$

Or, «l'auto-application» d'un opérateur à lui-même est souvent une nécessité formelle, en informatique notamment dans les définitions récursives, alors que l'approche «purement ensembliste» la capte assez difficilement, du moins par nos représentations intuitives des ensembles. Par exemple, en logique, il est utile de pouvoir appliquer à lui-même un concept conçu, rappelons-le, comme une fonction à valeur dans $\{\text{le-vrai, le-faux}\}$, pour former des expressions comme

(est-un-concept) @ (est-un-concept)

(est-auto-applicatif) @ (est-auto-applicatif)

(est-non-auto-applicatif) @ (est-non-auto-applicatif)

Une analyse, dans le cadre de la logique combinatoire avec des combinateurs appropriés, montrerait que la dernière expression '(est-non-auto-applicatif) @ (est-non-auto-applicatif)', qui exprime «l'auto-applicativité de la non-auto-applicativité», ne peut pas avoir le statut de «proposition» car si tel était le cas, on obtiendrait alors un point fixe de l'opérateur logique de négation, ce qui reviendrait à affirmer qu'une proposition est identique à sa propre négation. Or, une proposition est, par définition, soit «vraie», soit «fausse»... L'expression de «l'auto-applicativité de la non auto-applicativité» n'est donc pas une proposition. Elle est une reformulation du célèbre paradoxe de Russell que la logique combinatoire permet d'analyser par une voie purement logique afin d'en mieux comprendre le mécanisme formel d'engendrement²⁴.

Remerciements. Les auteurs remercient Michael Freund pour sa relecture attentive ainsi que les rapporteurs anonymes de la revue.

BIBLIOGRAPHIE

- AJDUKIEWICZ K., "Die Syntaktische Konnexität", *Studia PhiloSophica*, 1, 1935, p.1-27.
- AUROUX S., *La logique des idées*, Paris, Bellarmin, Vrin, 1993.
- BACH Ed., *Categorical grammars as theories of language*, in Oehrle et al., 1988, p. 17-34.
- BACH, Ed., JELINEK H., KRATZER A., PARTEE B., *Quantification in natural languages*, Dordrecht, Kluwer Academic Press, 1995.
- BARBIN E., BOYER A., *François Viète, un mathématicien sous la Renaissance*, Paris, Vuibert, 2005.

²³ On rappelle le schéma opératoire de « W » qui a déjà été présenté : $WXY \rightarrow XYY$.

²⁴ Cette analyse est détaillée et expliquée dans [Curry, Feys, 1958] et commentée dans plusieurs publications de J. Ladrière [1973] ou de J.P. Desclés [1990].

- BARENDREGT H. P., *The Lambda calculus, its syntax and semantics*, Amsterdam-New-York,-Oxford, North Holland Publishing Company, 1981, (1984: 2° ed).
- BARWISE J., "Noun phrases, generalized quantifiers and anaphora", in Gâdenfors P., *Generalized quantifiers, linguistic and logical approaches*, Dordrecht, Reidel, 1987, p. 1-29.
- BARWISE J., COOPER R., "Generalized quantifiers and natural languages", *Linguistics and Philosophy* 4, 1981, p. 159-219.
- BENVENISTE E., «Être et avoir" dans leurs fonctions linguistiques», *Problèmes de linguistique générale*, Paris, Gallimard, 1966, p. 187-207.
- BISKRI I., *Analyse formelle de la coordination dans le cadre de la grammaire catégorielle applicative et combinatoire*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sorbonne, 1995.
- BISKRI I., DESCLES J.-P., "Applicative and combinatory categorial grammar (from syntax to functional semantics)", Bulgarie , Acte du *Colloque RANLP*, 1995.
- BOURBAKI N., *Eléments de mathématiques, théorie des ensembles*, Paris, Hermann, 1970.
- BOUTOT A., «La logique combinatoire : une théorie de la morphogenèse», Conférence, Institut des Sciences Humaines, Université de Paris-Sorbonne, 1998.
- BRONOWSKI J., *Sciences and the human values*, New-York, Harper and Row, 1959.
- CANN R., *Formal semantics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
- CHARBONNEAU L., «L'algèbre au cœur du programme analytique», in *François Viète, un mathématicien sous la Renaissance*, (sous la direction de E. Barbin et A. Boyé), Paris, Vuibert, 2005, p. 53-73.
- CHURCH A., *The calculi of lambda-conversion*, Annals of Mathematical Studies, 6, Princeton, Princeton University Press, 1951.
- CONDILLAC (de) E., *Langue des calculs*, 1798, Lille, Presses Universitaires de Lille, 1981.
- CORBLIN F., *Représentation du discours et sémantique formelle*, Paris, Presses Universitaires de France, 2002.
- CORDIER F., *Les représentations cognitives privilégiées, Typicalité et niveau de base*, Lille, Presses universitaires de Lille, 1993.
- CULIOLI A., *Variations en linguistique, Entretiens avec Frédéric Fau*, Préface et notes de Michel Viel, Paris, Klincksieck, 2002.
- CURRY H.B., *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1951.
- CURRY H.B., FEYS R., *Combinatory logic*, Vol. I, Amsterdam, North-Holland, 1958.
- DESCLÉS, J.-P., *Opérateur / opération» recherches sur les formalismes intrinsèques en informatique fondamentale*, Thèse d'état en mathématiques, Paris, Université René Descartes, 1980.
- DESCLES J.-P., «De la notion d'opération à celle d'opérateur ou à la recherche de formalismes intrinsèques», *Mathématiques et Sciences humaines* 76, 1981, p. 5-32.
- DESCLÉS J.-P., *Langages applicatifs, langues naturelles et cognition*, Paris, Hermès, 1990.
- DESCLÉS J.-P., «Auto-applicativité, paradoxes et logique combinatoire», *Les Cahiers du CREA, Epistémologie et anthropologie*, CREA / École Polytechnique, Paris, 1993, p. 63-119.

DESCLÉS J.-P., «La logique combinatoire typée est-elle un «bon» formalisme d'analyse des langues naturelles et des représentations cognitives?» in Lentin A., 1997(a), p. 179-223.

DESCLÉS J.-P., «Logique combinatoire, types, preuves et langage naturel», *Travaux de logique, Introduction aux logiques non classiques*, Centre de recherches sémiologiques, Université de Neuchâtel, 1997(b), p. 91-160.

DESCLÉS J.-P., "Categorization: a logical approach of a cognitive problem", *Journal of Cognitive Science*, Vol. 3, n° 2, 2002, p. 85-137.

DESCLÉS J.-P., "Combinatory Logic, Language, and Cognitive Representations", Paul Weingartner (ed.), *Alternative logics. Do sciences need them ?*, Springer, 2003, p. 115-148.

DESCLÉS J.-P., 2004, «Une analyse non fré géenne de la quantification», Pierre Joray (éd.), *La quantification dans le logique moderne*, Paris, L'Harmattan, 2004, p. 263-312.

DESCLÉS J.-P., GUENTCHEVA Z., "Quantification without bound variables", Böttner et Thümmel (eds), *Variable-free semantics*, 13-14, Osnabrück, Rolandsmauer, Secolo Verlag, 2000, p. 210-233.

DESCLÉS J.-P., PASCU A., "Variables and notions of «Whatever» and «Indeterminate» in logic of determination of objects", *Journal of Artificial Intelligence Tools*, [à paraître, 2006].

DHOMBRES J., *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*, Paris, CEDIC, Fernand Nathan, 1978.

DHOMBRES J. et al., *Mathématiques au fil des âges. Textes choisis et commentés* I.R.E.M., Groupe Epistémologie et Histoire, Paris, Gauthier-Villars, 1987.

DIEUDONNE J., *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, I et II, Paris, Hermann, 1978.

DUBOIS D., *Sémantique et cognition : catégories, prototypes, typicalité*, Paris, Éditions du CNRS, 1991.

DOWTY D., *Type-Raising, functional composition, and non-constituent conjunction*, in Oehrle et al., 1988.

FITCH F. B., *Symbolic logic, An introduction*, New-York, Ronald Press, 1952.

FITCH F. B., *Dictionary of symbols of mathematical logic*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1969.

FITCH F. B., *Elements of combinatory logic*, New Haven and London, Yale University Press, 1974.

FODOR J., "Formal linguistics and formal logic", John Lyons (ed.), *New horizons in Linguistics*, Harmondsworth, Penguin, 1973.

FREGE G., *Begriffsschrift. Eine formelsprache des reinen denkens*, Halle, 1879.

FREGE G., *Die Grundlagen des arithmetik*, Breslau, Verlag von Wilhem Koebner, 1884.

FREGE G., *Grundgesetze der arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, Jena, Verlag Hermann Pohle, 1893. Traduit en anglais : *The basic laws of arithmetic, exposition of the system*, translated and edited, with an introduction, by Montgomery Furth, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1967.

FREUND M., DESCLÉS J.-P., PASCU A., CARDOT J., "Typicality, contextual inferences and object determination logic", 2004 *FLAIRS Meeting*, Miami (Florida), 26 pages, 2004 [à paraître, 2006].

- FROIDEVAUX C., «La fonction logique du epsilon de Hilbert à travers les *Grundlagen der Mathematik*», *Mathématiques et Sciences humaines* 84, 1983, p. 65-82.
- GABBAY D., GUENTHNER F., *Handbook of philosophical logic*, Volume IV, *Topics in the Philosophy of Language*, Dordrech, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- GENTZEN G., *Recherches sur la déduction naturelle*, traduction de R. Feys et J. Ladrière, Paris, Presses Universitaires de France, 1955.
- GINISTI J.-P., 1997, *La logique combinatoire*, Paris, Presses universitaires de France, col. Que Sais-je, 3205, 1997.
- GINISTI J.-P., «Logique combinatoire logique de l'objet quelconque ou logique de l'opérateur», *Mathématiques et Sciences humaines* 162, 2003, p. 42-92.
- GOCHET P., *Quine en perspective*, Paris, Flammarion, 1978
- GOCHET P., GRIBOMONT P., *Logique, méthodes pour l'informatique fondamentale*, tome I, Paris, Hermès, 1990.
- GODEMENT R., *Cours d'algèbre*, Paris, Hermann, 1966.
- GONSETH F., *Logique et philosophie des mathématiques*, Paris, Hermann (Nouvelle édition), 1998.
- GRANGER G.-G., *Langages et épistémologie*, Paris, Klincksieck, 1979.
- GRANGER G.-G., *Formes, opérations, objets*, Paris, Vrin, 1994.
- GRIZE J.-B., *Logique moderne*, tome I, Paris, Gauthier Villars, 1969.
- GROENENDIJK J., STOKHOF M., «Dynamic predicate logic», *Linguistics and Philosophy*, 1991, p. 39-101.
- GROOTE (de) P., *The Curry-Howard isomorphism*, Cahiers du Centre de Logique 8, Louvain-la-neuve, Université Catholique de Louvain, Département de philosophie, Academia, 1995.
- HARRIS Z., *Structures mathématiques du langage*, traduit de l'anglais par Catherine Fuchs, Paris, Dunod, 1968/1971.
- HARRIS Z., *Notes du cours de syntaxe*, traduit de l'anglais par Mauricer Gross, Paris, Éditions du Seuil, 1976.
- HARRIS Z., *A Grammar of English on mathematical principles*, New-York, John Wiley & Sons, 1982.
- HARRIS Z., *A theory of language and information, a mathematical approach*, Oxford, Clarendon Press, 1991.
- HEIM I., "E type pronouns and donkey anaphora", *Linguistics and Philosophy* 13, 1990, p 137-177.
- HILBERT D., BERNAYS P., *Grundlagen der mathematik*, II, Berlin, Springer-Verlag, 1939/1970.
- HINDLEY J.R., LERCHER B., SELDIN J.P., *Introduction to combinatory logic*, Cambridge, Cambridge University Press, 1972.
- HINDLEY J.R., SELDIN J.P., *Introduction to combinators and λ -calculus*, Cambridge University Press, 1986.
- HOOKWAY C., *Quine*, Bruxelles, De Boeck-Wesmael, 1992.
- HUDAK P., "Conception, evolution, and application of functional programming languages", *ACM Computing Surveys*, Vol. 21, n° 3, September 1989, p. 359- 411.

- JORAY P., GODART-WELDING B., «De la théorie des catégories sémantiques de Lesniewski à l'analyse dans la syntaxe de Ajdukiewicz», *Langages* 148, 2002, p. 28-50.
- JORAY P. (éd.), *La quantification dans la logique moderne*, Paris, L'Harmattan, 2004.
- KAHANE S. (sous la direction de), *Les Grammaires de dépendance. Traitement automatique des langues*, Techniques et science informatique, Vol. 41, n°1, Paris, Hermès, 2000.
- KAMP H., "A Theory of truth and semantic representation", Groenendijk *et al.* (eds), *Formal Methods in the study of language*, Amsterdam, Mathematical Centre Tracts, 135, 1981, p. 277-322.
- KAYSER D., LEVRAT B. (sous la direction), *Traitement automatique du langage naturel*, Techniques et science informatique, Vol. 20, n° 3, Paris, Hermès, 2001.
- KEENAN E., FALTZ L.M., *Boolean semantics for natural language*, Dordrecht, Reidel, 1985.
- KLEIBER G., *La sémantique du prototype : catégories et sens lexical*, Paris, Presses Universitaires de France, 1991.
- KLINE M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford, Oxford University Press, 1972.
- KRIVINE J.-L., *Théorie axiomatique des ensembles*, Paris, Presses Universitaires de France, 1969.
- LADRIÈRE J., «Le symbolisme comme domaine de l'opérateur», *L'articulation du sens*, Paris, Les éditions du CERF, 1973, p. 51-72.
- LADRIÈRE J., 1984, «L'explication en logique», *L'explication dans les sciences*, Paris, Flammarion, 1984.
- LAMBEK J., "The mathematics of sentence structure", *American Mathematical Monthly* 65, 1958, p. 154-165.
- LAMBEK J., "On the calculus syntactic types", *Proceeding of symposia in Applied Mathematics*, Vol. XII, Providence, Rhode Island, America Mathematical Society, 1961, p. 166-178.
- LAMBEK J., Scott P.J., *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge, Cambridge University Press, 1986.
- LAWVERE F.W., "Functorial semantics of algebraic theories", *Proc. Nat. Acad. Sci.* 52, U.S.A., 1963, p. 1506-1511.
- LAWVERE F.W., *Sets for mathematicians*, Cambridge, Cambridge University Press, 2003.
- LENTIN A., *Mélanges de mathématiques, linguistique, informatique offerts à André Lentin*, Paris, Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales avec le concours du CNRS, 1997.
- LE NY J.-F., *Science cognitive et compréhension du langage*, Paris, Presses Universitaires de France, 1989.
- LEROUX J., *Introduction à la logique*, Diderot Multimedia, 1998.
- MIEVILLE D., *Un développement des systèmes de Stanislas Lesniewski, Protothétique, Ontologie, Méréologie*, Berne, Peter Lang, 1984.
- MOLK J. (sous la direction de), *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquée*, Publiée sous les auspices des académies des sciences de Göttingue, de Leizig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants, Édition

française sous la direction de Jules Molk, Tome I, *Arithmétique*, Republication Éditions Jacques Gabay, 1992.

MORRIS C., *Writings on the general theory of signs*, The Hague, Mouton, 1971.

NEF F., «Des variables aux objets arbitraires», *Travaux du centre de recherches sémiologiques, Raisonement et calcul*, n° 63, septembre 1995, p. 149-159

NEF F., *L'objet quelconque. Recherches sur l'ontologie de l'objet*, Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1998.

OEHRLE R.T., BACH E., WHEELER D., *Categorical grammars and natural languages structures*, D. Reidel, 1988.

PARIENTE J.-C., *L'analyse de langage à Port-Royal, six études logico-grammaticales*, Paris, Les Éditions de Minuit, 1985.

PARTEE B.H., *Quantificational structures and compositionality*, Bach et al., 1995, p. 541-601.

PASCU A., *Logique de la détermination d'objets* — approche logique de la typicalité, Thèse de doctorat, Paris, Université de Paris-Sorbonne, 1999.

PEIRCE C.S., *Collected Papers*, Ch. Hartshorne, P. Weiss (eds), Vol. I-VI, Vol. VII-VIII, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1960.

QUINE W.V.O., "Variables explained away", *Proceedings of the American Philosophical Society*, Vol. 104, 1960, p. 343-347.

QUINE W.V.O., "Algebraic logic and predicate functors", *The Ways of Paradox and Other Essays*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1976, p. 283-307.

QUINE W.V.O., *Méthodes de logique*, Paris, Armand Colin, 1959/1972.

QUINE W.V.O., *Logique élémentaire*, Paris, Armand Colin, 1965/1972

QUINE W.V.O., *Le mot et la chose*, Paris, Flammarion, 1977.

RANTA A., *Type-Theoretical Grammar*, Oxford, Oxford Sciences Publications, Clarendon Press, 1994.

ROSSER J.B., "A mathematical logic without variables", Part I: *Annals of Maths.* (2) 36, 1935, p. 127-150; Part II: *Duke Math. J.* 1, 1935, p. 328-55.

ROUILHAN (de) P., *Frege, les paradoxes de la représentation*, Paris, Les éditions de Minuit, 1988.

RUSSELL B., *Principles of Mathematics*, London, Allen et Unwin, 1903. Trad. partielle in *Ecrits de logique philosophique*, Paris, Presses Universitaires de France, 1989.

SCHÖNFINKEL M., "Über die bausteine der mathematischen logik", *Math. Annalen* 92, 1924, p. 305-15.

SHAUMYAN (SAUMJAN) S.K., *Structurnaja linguistica*, Moskva, Nauka, traduit en anglais, *Principles of structural linguistics*, The Hague, Mouton, 1965/1971.

SHAUMYAN S.K., *Applicationnal grammar as a semantic theory of natural language*, Chicago, Chicago University Press, 1977.

SHAUMYAN S.K., *A Semiotic theory of language*, Bloogminton, Indiana University Press, 1987.

SIMONS P., "Functional operations in Frege's *Begriffsschrift*", *History and Philosophy of Logic* 9, 1988, p. 35-42.

SIMONS P., "Combinators and categorial grammar", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol 30, n° 2, Spring, 1989, p. 241-261.

SOMMERS F., *The Logic of Natural Language*, Oxford, Clarendon Press, 1982.

- SOMMERS F., “Term functor grammars”, M. Böttner et W. Thümmel, *Variable-free Semantics*, Osnabrück, Secolo Verlag, 2000, p. 68-89.
- STEEDMAN M., *Combinators and Grammars*, Oerhle *et al.*, 1988, p. 207-263.
- STEEDMAN M., *The syntactic process*, Cambridge (Mass.), The MIT Press, 2000.
- STOY J. E., *Denotational semantics: the Scott approach to programming language theory*, Cambridge (Mass.), The MIT Press, 1977.
- TATON R. (sous la direction de), *Histoire générale des sciences*, Tome 2 □ *La science moderne*, Paris, Presses Universitaires de France, 1958.
- TESNIÈRE L., *Éléments de syntaxe structurale*, Paris, Klincksieck, 1966.
- TODOROV S., *Théorie du symbole*, Paris, Seuil, 1977.
- VERNAND D., *Bertrand Russell*, Paris, Flammarion, 2003.
- WESTERSTÄHL D., *Quantifiers in formal and natural languages*, Gabbay et Guenther, 1989, p. 1-131.