

## L'HORIZON SÉMANTIQUE ET CATÉGORIAL DE LA MÉTHODE AXIOMATIQUE

Frédéric PATRAS

La méthode axiomatique est le socle sur lequel se sont édifiées les mathématiques du vingtième siècle. Au-delà de sa signification en termes de fondements logiques et épistémologiques pour la pratique mathématique, elle a gouverné l'écriture des ouvrages de synthèse, imposant peu à peu des règles formelles et un parti pris résolu pour l'abstraction au détriment des références à l'intuition. Ces dernières furent pourtant longtemps tenues pour légitimes, y compris par le héraut et la figure tutélaire de la méthode, David Hilbert. Nous n'entendons pas revenir ici sur la dérive conduisant du projet hilbertien tel qu'il se mit en place dans les années 1900 au structuralisme de tradition bourbakiste<sup>1</sup>, qui a gouverné l'univers mathématique des années 1950 aux années 1980. Nous considérerons donc comme acquis le constat de faillite épistémologique du structuralisme pour enquêter sur les racines philosophiques de cet échec et, plus spécifiquement, sur les non dits ontologiques de la méthode axiomatique. Quoiqu'il n'en soit qu'indirectement question dans la suite de cet article, signalons que l'enjeu principal de cette enquête en termes strictement mathématiques est la mise en place de critères

---

<sup>1</sup>. Nous renvoyons à notre livre, *La Pensée mathématique contemporaine*, Paris, Presses Universitaires de France, 2001.

d'évaluation de l'écriture scientifique alternatifs aux critères structuralistes, à savoir la mise en place de modalités d'appréciation des significations qui se déploient dans un texte formalisé indépendamment de la généralité des contenus ou du caractère systématique de l'exposition.

Dans un premier temps, il va falloir revenir sur les ressorts de la conception moderne de l'axiomatique qui continue, dans ses insuffisances mêmes, à être le sol de toute réflexion organique sur l'architecture et le devenir du corpus mathématique. De fait, Hilbert lui-même avait déjà signalé les grandes questions que sa méthode laissait en suspens, questions que n'ont pas su trancher ensuite les philosophies mathématiques développées sur les fondements de l'œuvre hilbertienne qu'il s'agisse de la pensée structurale, volontairement indifférente à ces aspects de l'héritage hilbertien, ou de pensées résolument philosophiques comme la phénoménologie husserlienne, dont on sait qu'elle a été pour une bonne part orientée vers le problème du statut ontologique de la logique formelle entendue en un sens mathématique.

Cependant, bien que l'œuvre de Edmund Husserl puisse sembler rétrospectivement inachevée ou inaccomplie dans son entente du formel tel que le conçoit la mathématique post-hilbertienne, à savoir comme système symbolique dont la vérité est d'abord, sinon exclusivement, conçue comme non-contradiction, l'idée et les techniques de la phénoménologie transcendantale telles qu'elles sont élaborées par le Husserl de la maturité dans des textes comme *Logique formelle et logique*

*transcendante*<sup>2</sup>, sont manifestement pertinentes pour décrire les mécanismes de conceptualisation à l'œuvre dans le travail mathématique. Si le texte présent fait peu utilisation du vocabulaire de la phénoménologie et peu référence à Husserl, sa conception et les idées qui y sont mises en place sont le résultat d'une mise en perspective du projet qui est celui de la phénoménologie transcendante au regard des développements techniques des mathématiques au cours des dernières décennies. C'est ainsi qu'il faut comprendre la référence à l'ontologie formelle qui fait le cœur de la deuxième partie de l'article : le fait que la pensée de Gottlob Frege y serve de guide ne doit pas induire en erreur.

Il n'est d'ailleurs sans doute pas inutile de préciser d'emblée ce que nous entendons ici par ontologie formelle, tant le terme peut prêter à dérives et malentendus. L'ontologie formelle, dans notre acception, se propose d'étudier la structure des domaines d'objets et de concepts possibles, intuitionnables, pensables, etc., antérieurement à l'existence de quelque objet ou concept que ce soit. Là où la logique formelle porte sur les mécanismes déductifs, l'ontologie formelle cartographie et structure les modalités d'existence d'objets ou de théories, et en particulier d'objets ou de théories mathématiques. L'étude du concept mathématique d'isomorphisme nous permettra de donner ultérieurement un sens précis et effectif à ces quelques indications.

---

<sup>2</sup>. Edmund Husserl, *Logique formelle et logique transcendante. Essai d'une critique de la raison logique*. trad. française Suzanne Bachelard. Paris, Presses Universitaires de France, 1957.

## La méthode axiomatique

Pour comprendre les traits originaux de la méthode axiomatique telle que la conçoivent les mathématiques contemporaines, il faut revenir à la conception classique et aux traités de logique aristotéliens. C'est précisément dans le décalage entre la conception hilbertienne et la conception aristotélienne de la logique que se joue aujourd'hui la possibilité d'une ontologie formelle mathématique. Confirmation, s'il en fallait une, de ce rôle stratégique et herméneutique de l'*Organon* : si c'est l'idée aristotélienne de l'axiomatique qui a gouverné l'écriture des *Éléments*<sup>3</sup> d'Euclide, c'est bien à elle qu'ont fait délibérément écho, à un demi-siècle d'intervalle, les *Fondements de la Géométrie*<sup>4</sup> de 1899 de Hilbert, puis les *Éléments de mathématiques*<sup>5</sup> de Bourbaki, deux textes clés pour la compréhension des mathématiques du vingtième siècle et deux étapes historiques dans la transvaluation moderne de l'idée d'axiomatique.

Aristote donne les définitions suivantes :

*J'appelle un principe immédiat du syllogisme une thèse, quand, tout en n'étant pas susceptible de démonstration, il n'est pas indispensable à qui veut apprendre quelque chose ; si, par contre, sa possession est indispensable à qui veut apprendre n'importe quoi, c'est un axiome : il existe, en effet, certaines vérités de ce genre, et c'est surtout à de telles vérités que nous donnons habituellement le nom d'axiomes. Si une thèse prend l'une quelconque des parties de l'énonciation, quand je dis par exemple qu'une chose est ou qu'une chose*

<sup>3</sup>. Euclide, *Les Éléments*, trad. française Bernard Vitrac. Paris, Presses Universitaires de France, 1990-2002.

<sup>4</sup>. David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart, Teubner, 1968.

<sup>5</sup>. Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématiques*, Paris, Hermann puis Masson, 1939-1984.

*n'est pas, c'est une hypothèse ; sinon, c'est une définition. La définition est une thèse, puisque, en Arithmétique, on pose que l'unité, c'est ce qui est indivisible selon la quantité ; mais ce n'est pas une hypothèse, car définir ce qu'est l'unité et affirmer l'existence de l'unité n'est pas la même chose*<sup>6</sup>.

Il précise ensuite le problème fondamental d'une théorie syllogistique de la connaissance : le statut logique des axiomes et prémisses premières est ambigu, puisqu'il faut bien les admettre sans démonstration. Il faut donc reconnaître, pour que la connaissance scientifique soit possible et assurée, « que toute science n'est pas démonstrative et que celle des propositions immédiates est indépendante de la démonstration »<sup>7</sup>.

Hilbert, quant à lui, écrit ses *Fondements de la géométrie* en héritier des avancées mathématiques du dix-neuvième siècle. Quatre types d'influences, au moins, sur son axiomatisation de la géométrie euclidienne sont détectables, liées aux développements de l'algèbre et de la géométrie, qui vont introduire autant de décalages entre le point de vue aristotélicien ou euclidien et le point de vue moderne<sup>8</sup> sur l'axiomatique.

La première, la plus connue sans doute, est celle des géométries non euclidiennes. C'est en 1871 que Felix Klein montre que les travaux de Arthur Cayley sur les transformations projectives conduisent à un modèle de la géométrie hyperbolique de Nicolaï Lobatchevski, avec ce corollaire que les géométries non euclidiennes n'ont pas

---

<sup>6</sup>. Aristote, *Les Seconds Analytiques*, trad. française Jean Tricot, Paris, J. Vrin, 1979., p. 11-12, [I,2,15-24].

<sup>7</sup>. *Ibid.*, p. 16, [I,3,18].

<sup>8</sup>. Dans tout cet article, l'adjectif *moderne* se réfère au vingtième siècle, dans l'esprit de la terminologie « maths modernes ».

moins de légitimité ontologique que la géométrie euclidienne. Au niveau logique, cela se traduit par la perte d'une nécessité inconditionnelle des axiomes. Au sein d'une théorie, un axiome continue d'être une thèse dont la vérité est première, mais cette vérité est devenue conventionnelle et donc philosophiquement problématique : la doctrine aristotélicienne consistant à admettre une science des propositions immédiates n'est plus tenable.

C'est véritablement un tournant décisif pour la théorie de la connaissance scientifique construite, depuis son origine grecque, par analogie et différence spécifique au cas des mathématiques. Traditionnellement, la vérité est conçue comme adéquation et rapport d'exactitude de la pensée à son objet. L'exemple du rapport, devenu conventionnel, de la géométrie euclidienne à son domaine d'objets, l'espace, ruine ce modèle. Bourbaki, avec toute la violence théorique et l'extrémisme de ses prises de position en viendra à parler de « contact fortuit entre deux disciplines »<sup>9</sup> à propos des liens entre mathématiques et sciences de la nature, poussant à sa limite extrême le mouvement d'autonomisation du mathématique rendu ainsi possible.

En philosophie, la géométrie participa d'une mutation de sens radicale du concept de vérité avec, tout d'abord, le développement de la sémantique (entendue au sens de la logique mathématique) dont on trouve les germes dans les travaux de Frege, autour de 1890-1900 avec, en particulier, la mise en évidence du rapport entre référence

---

<sup>9</sup>. Bourbaki, « L'architecture des mathématiques » in *Les grands courants de la pensée mathématique*, Éd. François le Lionnais, rééd. Paris, Hermann, 1998, p. 46.

et valeur de vérité<sup>10</sup>. Frege conclut à une extrême pauvreté du concept mathématique de vérité qui conduit à la mise en avant du rôle structurant du sens pour les énoncés mathématiques, et cela d'une manière que Frege voulait objective, par opposition à une conception subjective, anthropologique ou psychologique du sens. Nous y reviendrons.

L'autre mutation de sens du concept de vérité, tout aussi essentielle, est celle qui s'est développée avec la phénoménologie heideggerienne, conduisant à une remise en cause radicale de l'idée de vérité comme exactitude<sup>11</sup>. Il faut avoir à l'esprit ces enjeux philosophiques pour comprendre la nature du projet formaliste hilbertien<sup>12</sup> tel qu'il se met en place dans les années 20, à savoir le développement d'une métamathématique finitiste visant à établir la consistance des mathématiques et donc à sauver ce qui peut l'être de la notion classique de vérité, conçue désormais comme non-contradiction par Hilbert puisqu'elle a perdu ses assises traditionnelles, à savoir la nécessité ou encore le renvoi à une évidence première.

Un deuxième type d'influence, nettement perceptible dans les *Fondements de la géométrie*, provient de l'axiomatisation du continu par Richard Dedekind, Karl Weierstrass ou Georg Cantor. Au chapitre 2, Hilbert remarque que le caractère de consistance des axiomes de

---

<sup>10</sup>. Gottlob Frege, « Sens et dénotation » in *Écrits logiques et philosophiques*, tr. française Claude Imbert, Paris, Le Seuil, 1971, p. 102-126. Cité SD dans la suite de l'article.

<sup>11</sup>. Martin Heidegger, « De l'essence de la vérité » in *Questions I*, trad. Alphonse de Waelhens et Walter Biemel, Paris, Gallimard, 1968., p. 159-194.

<sup>12</sup>. Cf. Pierre Cassou-Noguès, *Hilbert*, Paris, Les Belles Lettres, Figures du savoir, 2001.

la géométrie euclidienne est une conséquence de la propriété correspondante pour la théorie des nombres réels. Aussi, si l'on admet l'équation *vérité = consistance*, la vérité en géométrie est reconduite aux propriétés du continu, des nombres et, indirectement, à la théorie des ensembles qui sert, depuis Cantor et Frege, à fonder le concept de nombre.

Est-il aujourd'hui, après l'échec du programme formaliste hilbertien, toujours raisonnable de vouloir fonder le corpus mathématique sur la théorie des ensembles, comme on continue le plus souvent à le faire ? Il est assez légitime d'en douter, indépendamment même des acquis catégoriels ou topossiques qui remettent en cause la prééminence de la théorie des ensembles<sup>13</sup>. Il semble bien qu'une fois reconnue la pauvreté épistémologique du concept mathématique de vérité, si l'on cherche à déplacer les termes du problème de fixation de normes pour l'écriture mathématique en direction de la question du sens, aussi problématique soit-elle encore, il va par exemple plus ou moins de soi que la reconduction de la géométrie à la théorie des ensembles a quelque chose de profondément insatisfaisant. Que la plupart des mathématiciens continuent pourtant aujourd'hui de s'en satisfaire est révélateur, sinon d'un malaise, du moins d'une indifférence à peu près complète aux questions en direction des fondements et de l'essence de la pensée.

La troisième influence est plus subtile, à la fois en termes techniques et dans ses corrélats épistémologiques.

---

<sup>13</sup>. Cf. Saunders MacLane et Ieke Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory*. Heidelberg, Springer-Verlag, 1992.

Elle est le fait de la théorie de Galois : toujours au chapitre 2, David Hilbert remarque que, si l'on renonce à l'un des axiomes de continuité qui est le pendant géométrique de la complétude du corps des réels, alors toute la géométrie euclidienne peut être écrite sur la clôture quadratique réelle du corps des rationnels. En termes épistémologiques, cette remarque se traduit par la possibilité de réaliser un même système d'axiomes dans différents modèles : on a affaire à une axiomatique ouverte lorsque ces modèles ne sont pas deux à deux équivalents. C'est peut-être le trait le plus marquant de la méthode axiomatique, ancrée historiquement dans l'axiomatisation des théories algébriques par l'école allemande à la fin du dix-neuvième siècle et au début du vingtième. Il a pour corollaire la possibilité d'appliquer une même théorie à des domaines d'objets éventuellement sans connexions apparentes. À ce titre, il est indissociable des rapports entre formalisme et intuition.

Quatrième influence notable sur les *Fondements de la géométrie* : celle des axiomatisations de la géométrie antérieures à Hilbert avec, par exemple, Moritz Pasch et ses *Leçons sur la nouvelle géométrie* de 1882 ou l'école italienne avec Giuseppe Peano et Giuseppe Veronese. Hilbert est connu pour avoir insisté sur l'autonomie des axiomes de la géométrie à l'égard de l'intuition, et on rapporte souvent cette citation fameuse où il déclare : « il doit être possible de substituer, dans tous les énoncés géométriques, les mots point, droite et plan par table, chaise et tasse »<sup>14</sup>. Pourtant, à y regarder de près, Hilbert est par exemple plus classique que les Italiens et respecte

---

<sup>14</sup>. Constance Reid, *Hilbert*, Berlin, Springer-Verlag, 1970.

la tradition euclidienne en regroupant les axiomes de la géométrie en fonction de leur signification (concept étranger, rappelons-le, à une conception purement formelle de l'axiomatique). Il y a derrière cela un souci constant, chez Hilbert et dans toute l'école hilbertienne : trouver un juste équilibre entre le formalisme et le développement nécessaire des axiomatiques – que ce soit en géométrie ou en algèbre – et, d'autre part, le renvoi aux fondements intuitifs de la pensée mathématique qui forment le support de l'activité concrète du mathématicien.

### **Le point de vue catégorial**

L'étude des *Fondements de la géométrie* permet de comprendre ce qu'a représenté l'émergence de la méthode axiomatique moderne (dont une forme édulcorée de tous ses aspects philosophiques a fait le fond du structuralisme mathématique de tradition bourbakiste au cours des cinquante dernières années), à savoir :

- une mutation de sens du concept de vérité, qui devient d'abord conventionnel avant de s'interpréter comme simple non-contradiction.
- l'émergence de la notion d'axiomatiques ouvertes et d'objets ou de théories mathématiques abstraits susceptibles de s'incarner dans différents modèles
- enfin, le problème qui s'affirme (avant d'être nié par l'école structuraliste) des liens entre contenus et formalisme, entre formes et intuitions.

Ce dernier problème du rapport entre intuition et formalisme est abordé explicitement par Hilbert dans

l'Introduction à son ouvrage avec S. Cohn-Vossen, *Anschaulische Geometrie*<sup>15</sup>. C'est un texte tardif, puisqu'il date de 1932, et qui permet d'apprécier le point de vue hilbertien sur l'axiomatique dans toute sa complexité :

*En mathématiques, comme dans toute recherche scientifique, nous sommes confrontés à deux tendances. D'une part, la recherche de l'abstraction cristallise les relations logiques inhérentes aux matériaux étudiés. Par ailleurs, la recherche d'une **compréhension intuitive** vise à une saisie plus immédiate des objets étudiés. Elle vise pour ainsi dire à l'établissement d'un rapport vivant avec eux qui mette en évidence la signification concrète de leurs relations.*

*Pour ce qui est de la géométrie, la tendance à l'abstraction a conduit aux belles théories de la géométrie algébrique, de la géométrie riemannienne et de la topologie. Ces théories font une utilisation systématique du raisonnement abstrait et du calcul symbolique. Toutefois il est toujours aussi vrai par ailleurs que la **compréhension intuitive** joue un rôle majeur en géométrie. Et l'intuition concrète est très appréciable, non pas seulement pour le chercheur mais, plus généralement, pour quiconque veut étudier et apprécier les résultats de la recherche en géométrie.*

Comment aller, aujourd'hui, au-delà de Hilbert, après de nombreuses années d'occultation délibérée des problèmes philosophiques soulevés par la mathématique moderne, au nom de l'indifférence du structuralisme mathématique aux significations<sup>16</sup> ? Un des grands intérêts épistémologiques que présente la théorie mathématique des catégories réside en ceci qu'elle met en évidence des phénomènes techniquement et logiquement antérieurs à l'édification des disciplines du corpus :

---

<sup>15</sup>. David Hilbert et S. Cohn-Vossen, *Geometry and imagination*, trad. angl., New-York, Chelsea Publ., 1956., Introduction.

<sup>16</sup>. Cf., là encore, *La pensée mathématique contemporaine*, op. cit.

algèbre, géométrie, combinatoire, topologie, etc. Ces phénomènes peuvent être appréhendés de plusieurs manières ; ils le seront ici dans le cadre d'une réinscription des problématiques de l'ontologie formelle dans le contexte mathématique.

Le point de départ en sera l'observation qu'un certain nombre de phénomènes catégoriels semblent avoir une portée universelle et, par là même, ontologique. En d'autres termes, la théorie des catégories énonce quelque chose sur le mode d'existence même des objets mathématiques. À l'usage des mathématiciens, voici deux exemples fondamentaux qui montrent que la théorie « se cache » derrière les phénomènes les plus élémentaires. La notion de base d'un espace vectoriel sur un corps s'interprète dans le langage fonctoriel comme un exemple d'adjonction entre la catégorie des ensembles et celle des espaces vectoriels<sup>17</sup>. Or c'est cette même notion d'adjonction qui permet de définir, d'un point de vue catégoriel, les éléments de la logique de Boole et des quantificateurs<sup>18</sup> ! De manière plus subtile, la genèse d'une notion comme celle de point en géométrie, dont on sait à quel point elle est philosophiquement problématique, est également susceptible d'être expliquée par des arguments catégoriels<sup>19</sup>.

---

<sup>17</sup>. Cf. par exemple S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Berlin, Springer, 1971.

<sup>18</sup>. Cf. notre article : « Phénoménologie et théorie des catégories » in *New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and the Humanities*. Éd. Luciano Boi, Springer-Verlag, à paraître (2003).

<sup>19</sup>. Cf. Pierre Cartier, « A mad days' work : From Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry », *Bull. Amer. Math. Soc.* Vol. 38, n°4 (2001), 389-408.

Pour interpréter ce type de phénomènes, il faut en revenir à Aristote. Son œuvre logique est découpée en plusieurs traités. Les traités dits *Analytiques* ont déjà été cités, qui portent sur les modalités du raisonnement. Ils sont précédés par le traité des *Catégories*, qui porte sur les genres de l'Être. Les catégories au sens aristotélicien en sont les genres les plus généraux : substance, quantité, relation, lieu, temps, position, possession, action, passion. Aux catégories proprement dites, il faut ajouter toute une série de concepts qui ont des propriétés d'universalité formelle transverse aux catégories, les *post-paedicamenta*, qui sont des concepts comme : l'identité, l'altérité, la différence, la similitude, l'opposition, etc. Pourquoi tous ces concepts trouvent-ils leur place dans un traité de logique ? C'est que la partie déductive de la logique ne dit rien sur les objets, le contenu du discours. La fonction du traité des *Catégories* est de réfléchir à la structure du champ des objets et des propositions qui font la matière du discours. En d'autres termes, il y va ici d'une forme de logique antérieure à la logique formelle ou encore à la logique de la vérité.

### **Identité, égalité, isomorphisme**

Quel est, maintenant, le lien entre les catégories aristotéliciennes (qu'il faut bien distinguer des catégories au sens mathématique) et les mathématiques contemporaines ? Considérons la famille des *post-paedicamenta* : identité, différence, etc. Ce sont des concepts qui ne relèvent pas de la logique mathématique usuelle – au sens où ils en sont des impensés, des prérequis allant de soi, alors même qu'ils structurent notre

compréhension des mathématiques et, dans une certaine mesure, la recherche elle-même.

Prenons l'exemple du concept d'identité et, plus spécifiquement, du concept d'identité de forme – c'est-à-dire, dans la terminologie mathématique, celui d'*isomorphisme*. Si l'on s'en tient à l'approche structuraliste, un isomorphisme est une bijection qui préserve les structures. Bien entendu, c'est là une utilisation du mot tout à fait adéquate, mais très figée. Les développements qui suivent devraient établir qu'il convient de rendre au mot toute la généralité ontologique qu'il peut avoir dans une pensée de type aristotélien.

Historiquement, le terme d'isomorphisme semble avoir été introduit au milieu du dix-neuvième siècle, en théorie des groupes, où il servit longtemps à désigner la classe des morphismes surjectifs. La terminologie moderne s'est cristallisée au début du vingtième siècle. Tout en donnant la définition technique d'un isomorphisme de groupes, le mathématicien allemand Heinrich Weber précise par exemple que deux groupes isomorphes représentent génériquement le même concept. Deux objets isomorphes sont donc deux incarnations d'un même concept, d'un même objet plus fondamental qui serait, s'il existait, l'archétype des objets réunis dans la classe d'isomorphisme considérée. L'idée de Weber est très intéressante, et donne à réfléchir, à travers le concept métamathématique de généricité, sur ce qu'un mathématicien comprend intuitivement sous le mot d'isomorphisme.

Une voie de réflexion plus systématique sur ces questions s'esquisse dans les travaux de Frege sur les nombres cardinaux. Rappelons que c'est à lui – et à Cantor – qu'est due la définition moderne du nombre

cardinal comme classe d'équivalence bijective d'ensembles finis, un cas particulier de classes d'isomorphismes. Dans ses *Fondements de l'arithmétique*<sup>20</sup>, Frege se propose d'établir que la définition du nombre cardinal qu'il introduit est logiquement correcte : le nombre cardinal associé à un ensemble E serait l'extension du concept « en correspondance biunivoque avec E »<sup>21</sup>. La justification qu'il donne est intéressante à plusieurs niveaux. Tout d'abord, nous allons le voir, elle procède par analogie avec une construction géométrique familière, ce qui a comme corrélat que le type de phénomènes logiques mis ainsi en évidence est transverse aux sectorisations du corpus mathématique : il y va d'un phénomène de portée universelle, au moins à l'intérieur des mathématiques. Par ailleurs, Frege engage sa pensée dans une problématique complexe, qui est celle des rapports entre les concepts d'identité, d'égalité et d'isomorphisme, problématique que la théorie des catégories permet aujourd'hui de mieux comprendre, mais sans en épuiser les potentialités. Nous y reviendrons après avoir rapporté l'analyse frégréenne<sup>22</sup> :

*Le jugement « la droite a est parallèle à la droite b », en signes  $a // b$ , peut être compris comme une égalité. Lorsque nous faisons cela, nous obtenons le concept de direction et disons : « la direction de la droite a est égale à la direction de la droite b ». Nous remplaçons donc le signe  $//$  par le signe plus général = [...]. Nous construisons ainsi un nouveau*

---

<sup>20</sup>. Gottlob Frege, *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, Koebner, 1884. Cité GA dans la suite.

<sup>21</sup>. La terminologie de Frege est antérieure à celle de la théorie moderne des ensembles et ne va pas sans poser quelques problèmes techniques à la racine de la « crise des fondements » des débuts du vingtième siècle.

<sup>22</sup>. GA, § 64.

*concept [celui de direction]. Souvent les enseignants procèdent à l'envers et définissent le parallélisme en disant que deux droites sont parallèles si elles ont la même direction. C'est procéder à l'encontre de ce qu'exigent les choses [...]. Pour parvenir à l'idée de direction à partir de celle de parallélisme, nous pouvons donc essayer de définir le concept de direction en demandant que l'énoncé " la droite a est parallèle à la droite b " soit équivalent à l'énoncé : " la direction de la droite a est égale à la direction de la droite b ".*

Le problème d'une telle définition c'est que, tout en caractérisant bien la notion de direction et en la reconduisant formellement à celle de parallélisme, elle ne l'explique pas vraiment. Nous disposons bien désormais d'un critère pour décider si deux directions sont égales, mais un certain flou règne encore sur la nature du concept de direction et sur son mode de formation. L'enjeu est de plus d'importance qu'il n'y paraît : il s'agit accessoirement de savoir si une définition mathématique formelle autorise à se dispenser d'une présentation effective du concept ou de l'objet, une question sur laquelle Frege reviendra amplement à la fin des *Fondements de l'arithmétique* à propos des « autres nombres » (les fractions, les nombres complexes, etc.)<sup>23</sup>.

Frege cite Leibniz pour expliquer son point de vue sur les énoncés égalitaires à l'origine de concepts comme celui de direction : « *Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate* », énoncé dont la traduction classique « Deux choses sont identiques lorsqu'on peut les substituer l'une à l'autre sans altérer la vérité »<sup>24</sup> peut être infléchie de manière à en transvaluer le sens et la

<sup>23</sup>. GA, § 92-109.

<sup>24</sup>. Sous-entendu : des énoncés qui portent sur elles.

portée. Frege affirme ainsi que l'on peut très bien substituer à « identique » le mot « égal », et s'en explique sur un exemple. Au lieu de dire : « deux segments a et b sont de longueurs égales », je peux aussi bien dire : « la longueur du segment a est identique à la longueur du segment b ». Un énoncé d'égalité peut donc toujours s'interpréter comme un énoncé d'identité.

D'où une deuxième traduction de la formule leibnizienne, que contestera Husserl dans sa *Philosophie de l'arithmétique*<sup>25</sup> : « Deux choses sont égales lorsqu'on peut les substituer l'une à l'autre sans altérer la vérité » (sous-entendu : quitte à modifier, selon certaines règles, la structure des énoncés). Frege engage ensuite son analyse en direction des nombres. Son argumentation peut toutefois être poursuivie dans la perspective d'une réflexion sur le concept d'identité et ses variantes et une troisième traduction/interprétation de la formule leibnizienne se présente alors naturellement : « Deux choses sont isomorphes lorsqu'on peut les substituer l'une à l'autre » (sous-entendu : pour une classe convenable d'énoncés).

L'important ici est que, comme la notion d'égalité, celle d'isomorphisme est une notion *relative* à un contexte donné là où l'identité est censée valoir de manière absolue. Pour autant, signalons que cette absoluité est elle-même plus problématique qu'il n'y paraît : l'exemple du fleuve héraclitéen montre bien que l'identité à soi-même n'est jamais acquise que sur fond de temporalité, et donc est à sa manière déjà relative. Pour en revenir aux

---

<sup>25</sup>. Edmund Husserl, *Philosophie de l'arithmétique*, trad. Jacques English, Paris, Presses Universitaires de France, 1972.

objets mathématiques, deux objets non isomorphes (i.e. non substituables dans un contexte donné) peuvent le devenir quitte à modifier ce contexte, c'est-à-dire, d'un point de vue frégeén, quitte à modifier la classe d'énoncés considérée. Et c'est précisément ainsi que les choses se passent dans les mathématiques contemporaines. En topologie algébrique<sup>26</sup>, par exemple, deux espaces comme le disque et le point ne sont pas isomorphes en un sens naïf : il n'existe pas de bijection ensembliste entre le disque et le point et, *a fortiori*, il n'en existe pas qui préserve les structures topologiques, c'est-à-dire qui soit (bi)continue ! Pourtant, comme le disque peut être contracté sur son centre par un processus continu (en faisant décroître linéairement le rayon du disque), le disque et le point sont des objets indiscernables pour le topologue au sens où, dans tout énoncé portant sur les formes topologiques (ce que l'on appelle les types d'homotopie), on peut les substituer l'un à l'autre *salve veritate*<sup>27</sup>.

Le disque et le point sont donc isomorphes en un sens leibnizio-frégeén pour la théorie de l'homotopie. Cette notion d'isomorphisme peut ensuite être rendue « rigoureuse » et être codifiée en langage formalisé par l'introduction de la catégorie homotopique, dont les objets sont les espaces topologiques et les applications les classes d'homotopie d'applications continues. Les détails techniques ne sont pas très importants pour notre propos ;

---

<sup>26</sup>. La topologie est l'étude mathématique des formes ; la topologie algébrique celle des invariants numériques des formes.

<sup>27</sup>. Les types d'homotopie sont des invariants universels des espaces topologiques. Ils sont invariants par les déformations continues des espaces, comme celle définie par la contraction du disque sur le point.

essentiel est par contre ce fait que le type d'analyse conduite par Frege à propos de l'identité est susceptible d'expliquer comment fonctionne, en profondeur, le travail mathématique, et de fonder une *logique des significations* en amont de la logique formelle. Pour parler comme Weber, l'intuition que le disque et le point représentent génériquement le même concept pour la topologie algébrique est une intuition antérieure à la formalisation de la topologie dans le contexte de la catégorie homotopique, et c'est ce type d'antériorité que l'écriture mathématique se doit de faire saisir si elle veut atteindre l'essence des phénomènes.

### **Vérité et signification**

Pour poursuivre dans la même voie, mais en donnant à ces idées un tour plus systématique, une autre idée frégréenne, la distinction entre sens et référence, est particulièrement intéressante et, malgré la littérature abondante qui lui a été consacrée, il est permis de douter qu'elle ait donné toute sa mesure en mathématiques. Rappelons que, pour Frege, un nom, un signe ou un groupe de mots utilisés comme un nom désigne, par défaut, un objet. Ainsi, « étoile du matin » et « étoile du soir » sont deux groupes de mots qui désignent tous deux le même corps céleste, qui est ce que Frege appelle leur référence commune. Par contre, si « étoile du matin » et « étoile du soir » désignent tous deux la planète Vénus, ils correspondent à deux modes de donation de Vénus sensiblement différents. C'est le sens qui mesure l'écart entre Vénus conçue comme étoile du soir et comme étoile du matin. Une des idées clés de la théorie frégréenne est que cet écart est une donnée objective : le sens n'est pas

quelque chose qui est mis par le sujet pensant dans un mot ou un énoncé « en sus » de la donnée objective fondamentale qu'est la référence.

En recherchant la référence d'un énoncé mathématique comme le théorème de Pythagore, la conclusion se dégage que c'est la valeur de vérité du théorème qui a cette fonction, et rien d'autre :

*Toute proposition affirmative, quand on considère la référence des mots qui la constituent, doit être prise comme un nom propre ; sa référence, si elle existe, est le vrai ou le faux [...]. Si la valeur de vérité d'une proposition est sa référence, toutes les propositions vraies ont la même référence, et toutes les fausses également. On voit ici que la référence ne retient rien de la singularité des propositions<sup>28</sup>.*

Pour comprendre les mathématiques, il n'est donc pas possible de s'en tenir à la vérité et à la fausseté, uniques références des propositions : il faut, en outre, développer la dimension du sens, qui est la dimension du mode de donation des objets mathématiques. En dernier recours, le problème est de déterminer quel type d'objectivité accorder au sens. Frege donne un critère intéressant, qui ne va pas sans rappeler l'insistance des pédagogues à mettre en avant les incertitudes inhérentes au travail du mathématicien (erreurs, conjectures, etc.) : il remarque que la signification d'un énoncé se détecte au mieux dans les formulations interrogatives. Un mathématicien qui travaille sur une conjecture est en prise directe avec des significations. Lorsque la conjecture est enfin démontrée ou invalidée, il se produit comme un phénomène de cristallisation de la vérité, et parfois d'évanouissement du sens.

---

<sup>28</sup>. *SD*, p. 110.

Au témoignage du mathématicien Claude Chevalley, les théories mathématiques, lorsqu'elles s'accomplissent et parviennent à maturité, se figeraient, se videraient de leur matière vivante. Chevalley, en jugeant ainsi, pensait vraisemblablement d'abord au fonctionnement de la méthode axiomatique de tradition structuraliste, qui dépouille, de par la logique de son fonctionnement, les résultats mathématiques de leur gangue d'intuitions, d'imperfections, d'inaccomplissements et de questionnements pour ne conserver que le résultat de la cristallisation : les preuves analytiques, les structures formelles. Alors que Hilbert et l'école hilbertienne ont toujours professé un idéal d'équilibre entre le formalisme et l'intuition, le structuralisme mathématique a cru pouvoir impunément aller jusqu'au bout du programme formaliste ; la pensée fré géenne et l'étude du programme axiomatique dans toute sa complexité et sa richesse originale montrent bien qu'une autre philosophie mathématique est possible – et nécessaire au vu de la pauvreté intrinsèque de la notion de vérité. La signification, outre ses aspects intentionnels, a une dimension objective et structurante : elle n'est pas un simple supplément d'âme accordé aux objets ou aux énoncés mathématiques, mais est constitutive de leur essence.