Territoires et conceptualisation de la proportionnalité

Territories and conceptualization of proportionality

Jean-Pierre Levain, Philippe Le Borgne et Arnaud Simard

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/osp/1852>

DOI : 10.4000/osp.1852

ISSN : 2104-3795

Éditeur

Institut national d'étude du travail et d'orientation professionnelle (INETOP)

Édition imprimée

Date de publication : 15 mars 2009

Pagination : 69-95

ISSN : 0249-6739

Référence électronique

Jean-Pierre Levain, Philippe Le Borgne et Arnaud Simard, « Territoires et conceptualisation de la proportionnalité », *L'orientation scolaire et professionnelle* [En ligne], 38/1 | 2009, mis en ligne le 15 mars 2012, consulté le 03 mai 2019. URL : <http://journals.openedition.org/osp/1852> ; DOI : 10.4000/osp.1852

Ce document a été généré automatiquement le 3 mai 2019.

© Tous droits réservés

Territoires et conceptualisation de la proportionnalité

Territories and conceptualization of proportionality

Jean-Pierre Levain, Philippe Le Borgne et Arnaud Simard

Introduction

- 1 La recherche que nous présentons est issue de la rencontre de deux problématiques que nous organisons dans une perspective différentielle.
- 2 La première renvoie à un double constat aujourd'hui bien validé, notamment dans le cadre des travaux de «l'Observatoire de l'école rurale¹» : à la fin du cycle primaire, les élèves des écoles rurales, souvent issus de classes à niveaux multiples, se caractérisent aux évaluations institutionnelles par des résultats équivalents, voire légèrement supérieurs, à ceux de leurs camarades des écoles urbaines ou périurbaines. Non seulement ces résultats relativement meilleurs ne se maintiendront pas au collège mais ils auront généralement tendance à se dégrader puis à s'inverser en faveur des élèves fréquentant les établissements urbains. Ce phénomène apparaissant de manière plus marquée chez les garçons avec un taux de redoublement plus élevé, une orientation vers des cursus courts en fin de troisième ainsi que des sorties du système éducatif plus fréquentes (Alpe & Poirey, 2003). Cette relative dégradation des performances reste par ailleurs difficile à interpréter et nécessite de prendre en compte et d'articuler, comme le souligne Yves Alpe (2005), différents niveaux d'analyse comme la spécificité des collèges, la composition sociologique des espaces ruraux, l'attitude face à la mobilité, le souhait professionnel, le niveau d'aspiration et d'expectation, le degré d'estime de soi, etc. Dans ce cadre, l'objectif de notre travail vise plus particulièrement à valider l'impact sociogéographique du collège d'appartenance sur la structure des réussites et des échecs d'un échantillon de quelque mille deux cents élèves confrontés à une série de dix-neuf problèmes de proportionnalité. Il vise également, en prenant appui sur des apports issus de la psychologie des apprentissages et de la didactique, à analyser finement les niveaux

de conceptualisation développés par les élèves ainsi que leur répartition au sein des différents établissements.

- 3 Nous avons également souhaité problématiser cette question sous l'angle de la psychologie cognitive en insistant tout particulièrement, d'une part sur l'aspect fonctionnel de l'organisation en mémoire et de l'utilisation des connaissances (Bastien, 1997; Bastien & Bastien-Toniazzo, 2004), d'autre part sur l'importance du rôle des situations et des tâches proposées aux élèves dans la construction de savoirs et de savoir-faire (Vergnaud, 1988, 1991). C'est en ce sens que nous situons notre étude dans le cadre de la résolution de problèmes d'agrandissement et d'échelle (Levain, 1996, 1997) à l'intérieur du champ conceptuel² de la proportionnalité. Cette articulation entre problèmes d'agrandissement et problèmes d'échelle nous apparaît particulièrement propice, à l'interprétation des résultats obtenus en termes de niveaux de conceptualisation spécifiques.

Méthode

Le choix des collèges participants

- 4 Nous avons retenu, pour différencier les collèges de notre étude, une typologie fréquemment utilisée dans le cadre des travaux de l'Observatoire de l'école rurale. Cette typologie qui s'appuie sur un zonage des aires urbaines (INSEE/INRA, 1998) permet de catégoriser quatre zones sociogéographiques distinctes en prenant en compte le taux d'actifs travaillant dans les pôles urbains (Alpe, Fauguet & Poirey, 2007); elle distingue:
  - Le pôle urbain comme unité urbaine de 5000 emplois ou plus et qui n'est pas situé dans la couronne périurbaine d'un autre pôle.
  - Le milieu rural sous faible influence urbaine dont 20 à 40% de la population travaille dans un pôle urbain.
  - Le milieu rural isolé dont moins de 20% de la population travaille dans un pôle urbain.
  - Le pôle rural enfin qui renvoie à une commune offrant de 2 000 à 5 000 emplois.
- 5 Nous avons soumis notre questionnaire de manière exhaustive à l'ensemble des classes de quatre établissements caractéristiques de chacune des zones préalablement définies: un collège situé dans un pôle urbain et accueillant une part importante d'élèves en difficulté³, un situé en milieu rural sous faible influence urbaine, un autre représentant un milieu rural isolé, un dernier relevant d'un pôle rural. Nous avons retenu, pour faciliter les comparaisons inter-établissements, des collèges de taille comparable: un peu plus de 300 élèves répartis en 16 classes (quatre par niveau). Ce choix résulte également d'un ensemble de contraintes locales: il n'existe par exemple qu'un seul établissement de pôle rural dans l'académie, le collège de centre-ville et de taille comparable, que nous avons initialement sollicité, n'a pas souhaité participer à l'enquête, etc. Les quatre collèges retenus se caractérisent par des niveaux de réussite assez proches aux évaluations institutionnelles de mathématiques en sixième pour les quatre années concernant notre étude (voir tableau 1). Ils traduisent néanmoins une fluctuation des performances des établissements selon les années. En 2003, c'est le collège situé en milieu rural isolé qui obtient le meilleur score, en 2004 et 2005, c'est le collège de pôle urbain, en 2006 le collège situé en milieu rural sous faible influence urbaine arrive en tête.

Tableau 1

Taux de réussite (en %) aux évaluations institutionnelles des classes de sixièmes en mathématiques

	2003	2004	2005	2006
Pôle urbain	62,1	66,2	71	64,4
Milieu rural isolé	64,1	61,4	60,5	60,9
Milieu rural sous faible inf. urbaine	63,2	63,5	64,9	65,1
Pôle rural	60,6	60,6	66,1	64,6

Table 1

Success rates (in %) in mathematics on the French national assessments for sixth-graders

- 6 Nous avons également rencontré les équipes professorales qui collaborent fréquemment et sont stables dans les établissements depuis plusieurs années.

Matériel

Le choix des situations d'agrandissement et d'échelle

- 7 Nous abordons la proportionnalité à partir d'un ensemble de situations d'agrandissement et d'échelle. Ce choix, qui nous amène à privilégier les problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle ainsi que le calcul d'un rapport d'agrandissement, nous a semblé particulièrement bien adapté pour inférer les principaux niveaux de conceptualisation développés par les élèves. Les situations d'agrandissement ou de réduction de figures, la lecture de plan, ainsi que la distinction entre carte et territoire renvoient à des usages et des pratiques sociales assez largement banalisés qui réfèrent par exemple à la consultation de notices de construction ou d'agencement, à des situations d'orientation ou de choix d'un itinéraire, au calcul d'un kilométrage ou à l'utilisation d'un GPS, etc.
- 8 Le concept d'échelle traduit l'objectivation progressive d'un rapport d'agrandissement de type $1/n$ dans lequel n est grand. Il constitue en ce sens davantage un objet complexe de nature transdisciplinaire (Bodin, 1989) plutôt que strictement mathématique car ne pouvant se définir exclusivement en référence à d'autres objets mathématiques.
- 9 L'échelle représente à la fois un outil permettant de résoudre des problèmes mais aussi un objet de savoir socialement organisé et culturellement reconnu. Cette articulation entre «concept outil» et «concept objet» touche au cœur de notre travail (Douady, 1986). Le passage des problèmes d'agrandissement à ceux d'échelle en constitue une des mises en forme qui, d'un point de vue cognitif, ne va pas de soi. Dans les situations d'agrandissement, les deux objets mis en rapport sont chaque fois d'une grandeur comparable, et sont de ce fait facilement assimilables à des objets de même nature. Par contre, dans les problèmes d'échelle, la différence de taille entre représentant et

représenté est telle qu'ils ne sont plus nécessairement appréhendés dans un registre de grandeurs comparables. L'échelle traduit alors davantage les caractéristiques d'un signifiant dans son rapport au signifié plutôt qu'une mise en rapport entre deux objets de même nature. Cet aspect devrait provoquer selon nous des «localisations» différentes dans l'espace des connaissances du sujet (Cellerier, 1993; Bastien & Bastien-Toniazzo, 2004); les situations d'agrandissement étant plus facilement appréhendées par les élèves en termes de rapport de similitude.

Présentation du questionnaire

- 10 Le questionnaire⁴ retenu, issu de recherches précédentes, est aujourd'hui bien validé (Levain, 1997; Levain, 2006; Levain, Le Borgne & Simard, 2007). Il se compose de huit problèmes portant sur des situations d'agrandissement ou de réduction de figures suivis de onze autres traitant directement du concept d'échelle.
- 11 *Les problèmes d'agrandissement ou de réduction de figures.* Le premier problème présenté (voir figure 1) a pour rôle essentiel d'introduire le questionnaire.

Figure 1. Réduction du problème n°1

Figure 1. Reduction of the problem n°1

- 12 Il nécessite de repérer un agrandissement et une réduction d'une figure cible. La reconnaissance se faisant par comptage et non par calcul, c'est l'invariance des rapports internes qui est ici privilégiée ainsi que la compréhension, dans un contexte mathématique, des termes d'agrandissement et de réduction.
- 13 Les quatre problèmes suivants (n°s 2 à 5) sont typiques de l'agrandissement d'une figure géométrique et nécessitent de déterminer la largeur du rectangle agrandi connaissant sa longueur ainsi que les deux dimensions du rectangle d'origine.

Figure 2. Réduction du problème n°2

Figure 2. Reduction of the problem n°2

- 14 Ces problèmes nous permettent, comme précisé au tableau 2, de croiser le type de rapport: interne ou externe avec son niveau de difficulté: simple ou complexe⁵ afin d'en analyser l'impact sur le niveau de réussite et le choix de la procédure.

Tableau 2

Type et difficulté des rapports

Problèmes	Rapport interne	Rapport externe
n°2	simple: 1/2	simple: 2/1
n°3	complexe: 3/5	simple: 2/1
n°4	simple: 1/2	complexe: 5/3
n°5	complexe: 3/5	complexe: 5/3

Table 2

Type and difficulty of the ratios

- 15 Le problème n°6 (voir figure 3) s'inspire de la fameuse épreuve de Karplus «Mr Short and Mr Tall» (Karplus & Peterson, 1970; Karplus, Karplus, Formisano & Paulson, 1979) testée dans de nombreux pays (Hart, 1981, 1988).

Figure 3. Réduction du problème n°6

Mic

Luc

Sur une photo, Mic mesure 4 cm
et Luc 6 cm.
Après agrandissement de la photo,
Mic mesure 6 cm.
Combien Luc mesure-t-il sur la photo agrandie ?

Problème n°6.

Figure 3. Reduction of the problem n°6

- 16 La petite taille et la symétrie des valeurs numériques impliquées invitent fréquemment à l'utilisation d'une procédure additive erronée formulée en termes de différences constantes.
- 17 Les deux problèmes suivants, n°7 et 8 (voir figure 4), clôturent cette première partie du questionnaire respectivement sur un agrandissement et une réduction. Dans ces deux problèmes, les rapports externes et internes sont égaux (respectivement 25 et 1,5). Nous postulons ici une plus grande familiarité (se traduisant par une meilleure réussite) de la situation d'agrandissement.

Figure 4. Réduction des problèmes n°7 et n°8

Une photographie d'identité mesure 3,6 cm de longueur et 2,4 cm de largeur.
Une fois agrandie, sous forme de poster, cette photo a pour longueur 90 cm.
Quelle est sa largeur ?

Écris ta réponse dans le cadre

Problème n°7.

Ce dessin est un agrandissement d'un petit circuit électrique :

45mm
30mm

Sur le dessin, ce circuit de forme rectangulaire mesure 45 millimètres de longueur et 30 millimètres de largeur. La longueur réelle du circuit est de 1,8 millimètre.
Quelle est sa largeur ?

Problème n°8

Figure 4. Reduction of the problems n°7 and n°8

- 18 *Les problèmes d'échelle.* Nous distinguons, dans notre questionnaire, les problèmes qui portent directement sur le calcul de l'échelle (voir figures 5 à 7), ceux qui nécessitent de

calculer une dimension du représentant, c'est-à-dire sur le plan ou la carte (voir figure 8), ceux enfin qui renvoient au calcul d'une dimension du représenté, c'est-à-dire sur le terrain (voir figures 9 et 10).

- 19 Le concept d'échelle n'est par ailleurs pas toujours présenté aux élèves de manière univoque (Bodin, 1989). Parfois sa représentation écrite peut s'apparenter à un dessin qui rappelle effectivement les échelons d'une échelle⁶; c'est ce que nous appelons dans la suite de ce travail «échelle de type 3»:

20 1 km

- 21 La fraction $3/100000$ «représente» alors cette échelle; cette écriture correspondant la plupart du temps à la représentation canonique (nous la nommerons en ce sens «échelle de type 1»). «L'échelle de type 2» correspond pour nous à une formulation du type: «3cm représentent 1km». Nous introduisons également une «échelle de type 4» dans laquelle l'énoncé comprend explicitement une formulation du type: «par quel nombre faut-il multiplier (diviser) cette hauteur pour...» (cette «échelle de type 4» privilégie alors l'aspect «outil» du concept). Nous croisons comme suit ces quatre modes de présentation avec les trois catégories de problèmes définies préalablement (calcul de la transformation, du représentant ou bien du représenté).
- 22 Les problèmes n°9 et 12 (voir figure 5) nécessitent tous deux de calculer une échelle connaissant une dimension sur le terrain et celle qui lui correspond sur la carte. Échelle fractionnaire (de type 1) pour le n°9, de type 4 pour le n°12. Pour ce dernier, la formulation employée («par quel nombre faut-il multiplier...») décharge l'élève de la nécessité d'objectiver le rapport d'agrandissement et renvoie davantage au concept familier d'opérateur multiplicatif. Les valeurs numériques utilisées rendent les calculs assez simples; le rapport d'agrandissement est le même pour les deux problèmes de manière à favoriser les comparaisons.

Figure 5. Réduction des problèmes n°9 et n°12

Un mur de 50 m de long est représenté sur un plan par un segment de 10 cm. quel est l'échelle de ce plan ? Quels calculs fais-tu ? Ecris ta réponse dans le cadre : ____ Problème n°9	Un architecte a réalisé la maquette d'un nouveau quartier. Sur cette maquette, un immeuble de 25 m de haut est représenté par une petite boîte d'allumettes de 5 cm de hauteur. Par quel nombre faut-il multiplier la hauteur de cette petite boîte pour obtenir la hauteur de l'immeuble ? Ecris ta réponse dans le cadre : ____ (tu peux faire les changements d'unités que tu désires). Problème n°12

Figure 5. Reduction of the problems n°9 and n°12

- 23 Les problèmes suivants (voir figure 6) traduisent tous deux un changement de formulation dans l'écriture de l'échelle à partir, soit d'une écriture de type 2 pour le problème n°10, soit d'une écriture de type 3 pour le n°11. Ces deux problèmes sont complexes pour les élèves. La charge cognitive est sans doute plus lourde pour ce dernier (n°11) qui nécessite l'introduction d'une mesure supplémentaire.

Figure 6. Réduction des problèmes n°10 et n°11

Sur une carte on peut lire : "2 centimètres pour 1 kilomètre". Quelle est l'échelle de cette carte ? Quels calculs fais-tu ? Ecris ta réponse dans le cadre : ____ Problème n°10	Sur une carte, on a relevé les indications suivantes : Ecris l'échelle correspondante : Ecris tes calculs : ____ Echelle : ____ Problème n°11

Figure 6. Reduction of the problems n°10 and n°11

- 24 Les problèmes n°s13 et 14 (voir figure 7) sont particulièrement complexes puisqu'il s'agit de calculer une échelle, de type 1 pour le n°13 et de type 4 pour le n°14, qui maximise la représentation (taille du plan) dans les limites d'une feuille de format 21 par 29,7cm. Ces deux problèmes ne devraient être réussis que par un très petit nombre d'élèves; ceux ayant développé un bon niveau d'expertise du domaine.

Figure 7. Réduction des problèmes n°13 et n°14

Tu veux faire le plan d'une salle des fêtes qui mesure 58 mètres de long et 28 mètres de large. Calcule une échelle pour que ton plan tienne tout entier dans une feuille comme celle-ci (format 21 X 29,7 cm), et qu'il soit le plus grand possible : Echelle de cette salle : ____ Problème n°13	Tu veux faire le plan d'une classe de chimie qui mesure 14 mètres de long et 9 mètres de large. Par combien dois-tu diviser les dimensions de cette classe pour la représenter sur une feuille comme celle-ci (format 21 X 29,7 cm) ? Le plan doit être le plus grand possible : Ecris ta réponse dans le cadre : ____ Problème n°14

Figure 7. Reduction of the problems n°13 and n°14

- 25 Les problèmes n°s15 et 16 (voir figure 8) renvoient tous deux au calcul d'une dimension sur le plan ou la carte en utilisant une échelle de type 1. Le problème n°15 fait appel à de petites valeurs numériques (la conversion des unités n'est pas ici forcément utile contrairement au n°16).

Figure 8. Réduction des problèmes n°15 et n°16

Un jardin rectangulaire mesure 50 mètres de long et 30 mètres de large. On représente ce jardin par un dessin à l'échelle $\frac{1}{100}$. Quelle est la longueur du jardin sur ce dessin ? Ecris ta réponse dans le cadre : ____ Problème n°15	A vol d'oiseau, 76 kilomètres séparent Besançon de Montbéliard. La carte Michelin de Franche Comté est à l'échelle : $\frac{1}{200\,000}$. Combien de centimètres séparent, sur cette carte, Besançon de Montbéliard ? Ecris ta réponse dans le cadre : ____ Problème n°16

Figure 8. Reduction of the problems n°15 and n°16

- 26 Les trois problèmes suivants impliquent le calcul d'une dimension du représenté (calcul de l'image par la transformation). Dans le n°17, l'échelle est de type 3 alors que dans le n°18, elle est de type 1 (voir figure 9).

Figure 9. Réduction des problèmes n°17 et n°18

Figure 9. Reduction of the problems n°17 and n°18

- 27 Dans le dernier problème (n°19), les deux données (échelle de type 1 et dimension sur la carte) sont fournies directement dans le texte d'énoncé (voir figure 10).

Figure 10. Réduction du problème n°19

Pierre regarde une carte Michelin à l'échelle : $\frac{1}{200\,000}$.

Sur cette carte, il mesure 38 centimètres de Chaumont à Saint-Dizier.

Combien de kilomètres séparent Chaumont de Saint-Dizier à vol d'oiseau ?

Écris ta réponse dans le cadre :

Problème n°19

Figure 10. Reduction of the problem n°19

Procédure

- 28 Nous avons soumis notre questionnaire à l'ensemble des 1223 élèves des quatre niveaux des quatre collèges représentant chacun une zone sociogéographique préalablement spécifiée (pôle urbain pour la première, pôle rural pour la seconde, milieu rural sous faible influence urbaine pour la troisième, et enfin, milieu rural isolé pour la dernière). La passation s'est déroulée pendant les cours de mathématiques sur une période étalée entre le 15 mai et le 10 juin 2007 de manière à ce que chaque professeur ait eu le temps de

traiter l'ensemble des éléments du programme en lien avec la proportionnalité. Les consignes invitent chaque élève à résoudre les problèmes proposés dans l'ordre séquentiel du questionnaire et à ne pas se bloquer sur les problèmes qu'il juge insolubles. Elles sont transmises par écrit à chaque professeur. Les calculatrices sont systématiquement utilisées. La passation dure environ une heure.

- 29 D'un point de vue méthodologique, notre démarche peut se décomposer en trois temps. Nous traitons tout d'abord les données de manière à mettre en évidence des regroupements dans la structure des réussites et des échecs, entre des sous-groupes d'élèves et les sous-ensembles de problèmes qu'ils réussissent électivement. Nous décrivons et interprétons ensuite les caractéristiques des groupes obtenus en termes de niveaux de conceptualisation de la tâche. Nous analysons enfin la répartition sociogéographique, c'est-à-dire par collège, de chacun de ces différents niveaux de conceptualisation.
- 30 Concernant le traitement des données, les 23237 problèmes recueillis sont corrigés et codés de manière binaire dans un tableau booléen dans lequel chaque colonne représente un problème et chaque ligne les résultats d'un élève. Nos données sont traitées avec le logiciel⁷ «Anaconda» dont la particularité est de croiser simultanément deux approches complémentaires (Girardot, 1982): une analyse factorielle des correspondances (AFC) qui repose sur l'algorithme de Benzecri (Benzecri, 1973, Benzecri & Benzecri, 1976; Lebart, Morineau & Tabard, 1977) ainsi qu'une classification ascendante hiérarchique (CAH) à partir d'un algorithme dit «des moments centrés d'ordre deux» (Roux, 1985). La CAH produit, à partir de calculs algorithmiques, des classes qui permettent de ranger les objets à décrire (à la fois des groupes d'élèves et des sous-ensembles de problèmes). Elle s'applique au même tableau de données que l'AFC et permet par là même de compléter et nuancer les analyses de celle-ci. Les résultats se présentent sous la forme d'un arbre hiérarchique dont les principales branches définissent les différentes classes.

Premiers résultats

Analyse en termes de pourcentages de réussite

- 31 À la lecture globale des résultats (voir tableau 3), nous retrouvons assez nettement notre bipartition initiale entre les situations d'agrandissement ou de réduction qui sont globalement bien réussies (versant «outil» du concept) et les problèmes d'échelle («concept objet») dont la maîtrise pose de nombreuses difficultés à la plupart des élèves (y compris ceux de quatrième et de troisième). Si l'on exclut les problèmes n^{os}2 et 3 extrêmement faciles et qui ont pour principale fonction de ne mettre aucun élève en échec dès le début du questionnaire, la réussite aux autres problèmes d'agrandissement est de 46,8%. Par contre, les problèmes d'échelle ne sont réussis que par 14,9% des élèves de notre échantillon ce qui peut apparaître comme une performance globalement faible.
- 32 Il n'y a donc pas continuité, mais bien plutôt rupture entre les situations d'agrandissement et celles d'échelle. Objectiver l'échelle sous la forme d'un rapport de type $1/n$ dans lequel n est grand ne va pas de soi.

Tableau 3

Taux de réussite (en %) aux différents problèmes

Problèmes	6 ^e	5 ^e	4 ^e	3 ^e	Moyenne
n°1	45,2	53,8	54,4	62,5	60
n°2	96	98,7	98	98,9	97,6
n°3	96,6	98,4	97,4	100	98,1
n°4	20,7	34,8	47,9	51,1	38,6
n°5	18,6	36,1	46,2	57,1	39,5
n°6	14,6	36,7	44,6	56,4	38,1
n°7	40,2	64,9	70,8	79,3	63,8
n°8	25,4	43,3	53,4	66,4	47,1
n°9	6,8	16,4	13,8	17,9	13,7
n°10	9,6	16,7	17	24,6	17
n°11	3,7	8,2	7,5	14,3	8,4
n°12	16,4	23,3	27,9	45	28,1
n°13	0,9	2	3,3	6,8	3,2
n°14	1,2	0,7	3	7,1	3
n°15	6,2	15,1	22	35	19,6
n°16	5,3	7,5	10,8	27,9	12,9
n°17	14,6	22,3	30,5	40,4	27
n°18	5,3	14,1	14,8	26,8	15,2
n°19	7,7	15,1	16,1	25,4	16,1
Moyenne	22,9	32	35,8	44,4	33,8

Table 3

Success rates (in %) in the different exercises

- 33 De la classe de sixième à celle de troisième, la réussite progresse environ du simple au double pour l'ensemble des quatre catégories de problèmes considérées (situations d'agrandissement, calcul de l'échelle, d'une dimension du représentant ou du représenté) avec, néanmoins, des niveaux globaux en fin de collège très contrastés. En ce qui concerne les problèmes d'agrandissement ou de réduction, les pourcentages de réussite passent de 23,9% en sixième à 62,1% en troisième; ils progressent donc de manière assez sensible en fonction de l'âge. Nos données semblent indiquer que la maîtrise de ces problèmes d'agrandissement (et sans doute, plus généralement, d'une bonne part des situations de proportionnalité) dépend en grande partie du niveau de développement psychogénétique du sujet (son âge) ainsi que du degré de familiarité développé avec la tâche (Inhelder & Piaget, 1955). En ce sens par exemple, la réussite aux problèmes 7 et 8 est croissante selon la classe, mais le problème n°7 (agrandissement d'une photographie) est mieux réussi que le n°8 (situation de réduction) alors même que les rapports externes et internes sont égaux (respectivement 25 et 1,5) et que ce sont tous deux des problèmes équivalents du point de vue de leur structure mathématique (recherche d'une quatrième proportionnelle).
- 34 Notons également, en ce qui concerne les situations d'agrandissement d'un rectangle (voir tableau 2), que le problème n°4 dans lequel le rapport interne est extrêmement simple ($2/1$) n'est pas mieux réussi que le n°5 dans lequel les deux types de rapport externe et interne sont complexes. La plupart des élèves (même en troisième) ne reconnaissent pas ici les propriétés de linéarité de la fonction (la largeur est la moitié de la longueur) et préfèrent calculer un rapport d'agrandissement complexe utilisant ainsi une procédure plus générale mais beaucoup plus coûteuse; le contexte semblant jouer ici le rôle d'un «situateur» au sens défini par Bastien et Bastien-Toniazzo (2004) dans l'espace des schèmes mobilisés par le sujet.
- 35 Concernant les trois catégories de problèmes d'échelle (calcul de l'échelle, d'une dimension du représentant ou du représenté), les résultats restent faibles dans leur ensemble (toujours moins d'un tiers de réussite, voire moins de 20% pour le calcul d'une échelle), à l'issue de la troisième. Les progressions apparaissent cette fois plus chaotiques et les différences très peu marquées entre les classes de cinquième et quatrième par exemple. Le traitement des situations d'échelle, ainsi que l'utilisation du concept de rapport exprimé sous la forme d'une fraction, resteraient bien plus dépendants des apprentissages scolaires et de l'organisation des connaissances mathématiques qui en découlent.

Classification des élèves et des problèmes

- 36 Les résultats du traitement statistique (AFC et CAH) portant sur l'ensemble des données obtenues se présentent sous la forme d'un arbre hiérarchique dont les principales branches définissent les différents groupes d'élèves. La figure 11 traduit le schéma de cet arbre qui nous permet de distinguer six groupes d'élèves en lien avec les problèmes qu'ils ont plus particulièrement réussis.
- 37 L'axe principal de l'AFC (n°1) oppose les groupes 1 et 2 à l'ensemble des autres groupes. Il traduit selon nous, à travers une dimension de plus ou moins grande complexité des problèmes proposés, la capacité des élèves à utiliser efficacement des rapports dans des situations d'agrandissement et d'échelle. À la lecture du graphe factoriel, nous retrouvons à une extrémité de cet axe les problèmes

Figure 11. Positionnement des groupes par rapport aux axes

Figure 11. Positioning of groups in relation with axis

- 38 n°2, 3 et 1 (les plus simples) et à l'autre les problèmes n°11, 13 et 14 (les plus complexes). L'axe n°2 oppose plus particulièrement le groupe 3 aux groupes 4, 5 et 6. Cet axe que nous appellerons «agrandissement - échelle» traduit bien, au niveau des données recueillies, le passage délicat des problèmes d'agrandissement aux problèmes d'échelle. Nous l'interprétons dans le cadre d'un processus de conceptualisation renvoyant au passage d'un concept «outil» (n fois plus grand que) à un concept «objet» (rapport de type $1/n$) avec toutes les difficultés d'objectivation de ce rapport, y compris la gestion des unités qui en découle. L'axe n°3, que nous intitulerons «calcul de l'image - calcul de la transformation», différencie principalement le groupe 4 des groupes 5 et 6. Il rend compte, selon nous, des difficultés de passage des problèmes portant sur le calcul d'une dimension du terrain (représenté) ou de la carte (représentant), ce que nous appelons sur la figure 12 «calcul de l'image», aux problèmes nécessitant le calcul de l'échelle (objectivation du rapport sous forme d'une fraction), ce que nous nommons «calcul de la transformation».
- 39 Les inerties des axes 1, 2 et 3 sont respectivement de 16%, 10% et 8%. La segmentation des classes s'opère à 10% de l'indice de diamètre de l'ensemble. La figure 12 illustre une représentation spatiale respectivement des trois groupes 2, 3 et 6 sur le plan factoriel délimité par les axes 1 et 2, ainsi que des trois groupes 4, 5 et 6 sur le plan factoriel délimité par les axes 2 et 3.

Figure 12. Représentation des groupes 2, 3 et 6 (axes 1 et 2) et des groupes 4, 5 et 6 (axes 2 et 3)

Figure 12. Representation of groups 2, 3 and 6 (axis 1 and 2) and groups 4, 5 and 6 (axis 2 and 3)

- 40 Concernant la représentation spatiale des trois groupes 2, 3 et 6 sur les axes 1 et 2 (partie gauche de la figure 12), il apparaît assez nettement que le groupe 2, qui ne réussit que quelques problèmes simples, est plutôt situé sur la partie gauche de cette représentation. Les élèves appartenant au troisième groupe ont une grande maîtrise des problèmes d'agrandissement, mais échouent largement aux problèmes d'échelle. Leur position est donc médiane par rapport à l'axe 1, par contre ils se positionnent très nettement du côté agrandissement par rapport à l'axe 2. Le groupe 6 par contre apparaît comme un groupe composé d'élèves très performants. Il occupe plutôt la position droite de l'espace factoriel (réussite aux problèmes complexes) et se situe plus largement du côté échelle par rapport à l'axe 2.
- 41 Concernant la représentation spatiale des groupes 4, 5 et 6 sur les axes 2 et 3 (partie droite de la figure 12), la différenciation se situe cette fois principalement en fonction de l'axe 3. Le groupe 6 occupe une position intermédiaire sur cet axe (les élèves de ce groupe réussissant la plupart des problèmes proposés). Contrairement au groupe 4 qui est plus nettement situé du côté «calcul de l'image» et au groupe 5 davantage positionné du côté «calcul de la transformation». Les élèves de ce groupe, assez atypique par ailleurs, réussissent relativement mieux certains problèmes nécessitant le calcul d'une échelle que d'autres impliquant le calcul d'une dimension sur le terrain ou la carte.
- 42 Le tableau 4 illustre cette correspondance entre les six groupes de sujets identifiés et les problèmes qu'ils réussissent électivement, en précisant les pourcentages de réussite. La dernière colonne indique le pourcentage de réussite de chaque groupe à l'ensemble des 19 problèmes du questionnaire; apparaissent en caractères gras les pourcentages de réussite les plus caractéristiques des résultats du groupe. Les élèves des groupes 3 et 4, par exemple, tout en ayant des pourcentages de réussite très proches (38% et 35%) se caractérisent par des niveaux de conceptualisation (voire des profils cognitifs) fort distincts.

Tableau 4

Taux de réussite (en%) par groupe aux différents problèmes

	Problème n°1	Problèmes n°2 & 3	Problèmes n°4, 5, 6, 7 & 8	Problèmes n°12 & 17	Problèmes n°9, 10, 11, 13 & 14	Problèmes n°15, 16, 18 & 19	Réussite à l'ensemble des problèmes
1 ^{er} groupe							
N = 194	37	97	0	0	0	0	12
2 ^e groupe							
N = 229	43	97	20	7	0	0	21
3 ^e groupe							
N = 283	60	97	76	30	0	8	38
4 ^e groupe							
N = 238	57	99	36	46	2	33	35
5 ^e groupe							
N = 166	56	98	64	31	33	13	45
6 ^e groupe							
N = 104	76	100	68	64	46	64	65

Table 4

Success rates (in%) in each group for the different problems

- 43 La stabilité des résultats obtenus au cours de différentes recherches ainsi que leur confirmation par des entretiens cliniques (Levain, 1997, 2006) nous conduisent à interpréter les regroupements effectués en termes de «profils cognitifs» traduisant à la fois des composantes psychogénétiques, mais aussi situationnelles et conceptuelles de l'apprentissage de la proportionnalité.

Description des groupes en termes de niveaux de conceptualisation

- 44 Le premier groupe a un effectif de 194 élèves ce qui représente 16% de notre échantillon. C'est un groupe relativement jeune puisque composé à 70% d'élèves des classes de sixième et de cinquième. Les sujets de ce groupe ne réussissent aucun des problèmes (voir tableau 4), hormis les trois premiers problèmes les plus simples. Ils échouent systématiquement à traiter les situations de proportionnalité même les plus simples. Ils utilisent massivement

des procédures additives erronées, ou s'abstiennent. Ces élèves éprouvent de grosses difficultés de compréhension qui débordent sans doute assez largement le cadre des situations proposées.

- 45 Le deuxième groupe représente 19% des sujets de l'étude (229 élèves). Un peu plus âgé que le précédent, il est composé de 40% d'élèves de quatrième et troisième. Il représente également des élèves en grande difficulté, mais qui réussissent, contrairement à ceux du premier groupe, au moins un des problèmes d'agrandissement ou de réduction parmi les cinq proposés. Tous les problèmes d'échelle sont échoués systématiquement.
- 46 Les élèves de ces deux premiers groupes sont des élèves majoritairement «additifs» qui traitent les situations de proportionnalité presque exclusivement en termes d'écarts constants. Ils sont en ce sens, et depuis longtemps, assez bien identifiés dans la littérature concernant la résolution de problèmes de proportionnalité (Karplus *et al.*, 1970; 1979; Hart, 1981; Nesher, 1988, etc.).
- 47 Le troisième groupe est pour nous particulièrement intéressant puisqu'il illustre expérimentalement cette bipartition entre «concept outil» et «concept objet» qui sous-tend l'organisation de notre travail. Les élèves de ce groupe réussissent largement les problèmes d'agrandissement les plus complexes de type recherche d'une quatrième proportionnelle (76% de réussite aux problèmes d'agrandissement ou de réduction) et échouent tout aussi largement à l'ensemble des problèmes d'échelle (voir tableau 4). Notons également que ce groupe est numériquement le plus important: 283sujets, soit 23% du total. La moyenne d'âge y est élevée, il se compose en effet d'environ 60% d'élèves appartenant aux classes de quatrième et troisième. La structure des réussites et des échecs semble, de ce fait, relativement stabilisée.
- 48 Le quatrième groupe caractérise la diversité des formes et des trajectoires d'apprentissage développées par les élèves. Les résultats des sujets de ce groupe se caractérisent à la fois par une dispersion importante des niveaux de réussites entre catégories de problèmes et à l'intérieur d'une même catégorie. Ces élèves se caractérisent par un profil relativement atypique: réussite modérée aux problèmes d'agrandissement (36%), succès du même ordre vis-à-vis des problèmes nécessitant le calcul d'une dimension du terrain ou du plan connaissant l'échelle (33%) et, enfin, échec massif aux problèmes nécessitant le calcul de l'échelle (2%) compte non tenu du n°12, formulé dans les termes d'une situation d'agrandissement⁸ et qui est réussi à 27%. Ce groupe représente 19,5% de l'échantillon avec ses 238élèves, dont 54% sont de grands élèves de quatrième ou de troisième.
- 49 Le cinquième groupe est relativement jeune puisque composé pour moitié d'élèves des classes de sixième et de cinquième. Il représente avec ses 166 élèves près de 14% de notre échantillon. Là encore, nos résultats semblent aller à l'encontre d'une organisation logique des connaissances impliquant une relation d'ordre entre la maîtrise des problèmes d'agrandissement puis celle des problèmes d'échelle. Comment en effet expliquer (tableau 4), que de «bons élèves», qui réussissent à 64% les problèmes d'agrandissement ou de réduction les plus complexes, à plus de 50% les problèmes n°9, 10 et 11 nécessitant le calcul d'une échelle fractionnaire, échouent aussi largement (10,2%) aux problèmes n°s16, 17, 18 et 19 qui consistent simplement à calculer une dimension du représentant ou du représenté, l'échelle étant donnée dans l'énoncé. Nos données vont dans le sens d'un constat déjà posé par ailleurs pour des élèves plus jeunes; les connaissances que construisent les élèves ne suivent pas nécessairement l'ordre

didactique des manuels scolaires (Weil-Barais, 2004). Ce groupe atteste que l'objectivation d'une échelle peut être en bonne voie d'acquisition chez des élèves plutôt jeunes; il illustre, comme pour le groupe précédent, une multiplicité de trajectoires possibles dans l'acquisition des notions en jeu qu'il conviendrait d'étayer davantage par une analyse fouillée des différentes procédures. Ces données nous semblent plaider une fois encore en faveur d'une organisation fonctionnelle des connaissances en termes de réseaux de schèmes activés en contexte.

- 50 Enfin le sixième groupe est à la fois le moins important numériquement (104 élèves, représentant moins de 9% du total) et aussi le plus âgé (70% des sujets qui le composent sont en classes de quatrième ou de troisième). Les 104 sujets concernés se caractérisent par un niveau élevé de réussite aux quatre catégories de problèmes. Les problèmes nécessitant le calcul d'une échelle fractionnaire (problèmes n°9, 10 et 11) sont réussis à plus de 63%. Hormis les problèmes n°13 et 14 très complexes (et néanmoins réussis à près de 20%) Le pourcentage de réussite aux autres problèmes est légèrement supérieur à 70%. Ces élèves sont bien, pour la plupart, en voie de développer un niveau d'expertise du domaine.

Réussite, conceptualisation et localisation des collèges

Niveaux de réussite et localisation des collèges

- 51 Le tableau 5 présente les pourcentages globaux de réussite au questionnaire pour chaque niveau de nos quatre collèges.

Tableau 5

Taux de réussite (en%) au questionnaire en fonction de la localisation du collège

	Sixième	Cinquième	Quatrième	Troisième	Total
Pôle urbain	23,1	30,1	37,6	44,9	33,9
Milieu rural isolé	21,7	29,9	32	45,6	31,7
Milieu rural sous faible inf. urb.	20	31,7	34,7	41,7	32
Pôle rural	26,7	35,2	39,4	45,6	36

Table 5

Success (in%) at the test as a function of the location of the school

- 52 D'un point de vue global, c'est le collège du pôle rural qui obtient les meilleurs résultats (36% de réussite) suivi de l'établissement du pôle urbain (33,9%) viennent ensuite, proches l'un de l'autre, le collège de milieu rural sous faible influence urbaine (32%) et le

collège situé en milieu rural isolé (31,7%). À la lecture du tableau 5, nos résultats ne confirment pas l'hypothèse de départ de l'Observatoire de l'école rurale concernant une dégradation des performances des élèves des établissements ruraux au fil de leur scolarité. Ce constat apparaissait déjà en partie au regard des fluctuations des réussites, plutôt en faveur du collège de pôle urbain, aux évaluations institutionnelles des classes de sixième en mathématiques (voir tableau 1).

- 53 La mise en perspective de ces deux derniers tableaux est intéressante et semble expliquer une part des variations observées. En troisième par exemple, les deux collèges obtenant les meilleurs résultats sont l'établissement de pôle rural ainsi que le collège de milieu rural isolé (avec 45,6% au tableau 5). Les résultats de ce dernier collège peuvent néanmoins surprendre au regard des scores obtenus en cinquième et quatrième et qui sont les moins bons de l'ensemble (avec respectivement 29,9% et 32%). Pourtant cet établissement obtenait déjà les meilleurs résultats en 2003 (voir tableau 1) aux évaluations institutionnelles de début de sixième en mathématiques (avec 64,1% de réussite pour ces élèves qui seront, pour la plupart, en troisième au cours de l'année scolaire 2006-2007 de notre étude). Il obtenait également, à l'inverse, des résultats nettement moins bons en 2004 et 2005. On pourrait interpréter de manière sensiblement analogue la deuxième meilleure performance au questionnaire des élèves de quatrième du collège du pôle urbain (37,6% au tableau 5) qui réussissaient le mieux aux évaluations institutionnelles en 2004 (voir tableau 1). Ou encore, concernant les classes de sixième, les élèves de l'établissement de pôle rural obtenant les meilleurs résultats au questionnaire (26,7% au tableau 5) sont ceux qui avaient la deuxième meilleure performance aux évaluations institutionnelles en mathématiques à l'entrée en sixième de 2006 (voir tableau 1).
- 54 Indépendamment des localisations sociogéographiques, les résultats des élèves en entrée de collège semblent bien déterminer, en partie du moins, les niveaux de performance en fin de cursus. En ce sens, une enquête menée avec les mêmes problèmes dans deux collèges performants de centre ville nous donnait, il y a un peu plus de dix ans, des pourcentages de réussite beaucoup plus élevés, (Levain, 1997). La réussite en fin de troisième s'y établissait à 58% (soit plus de dix points au-dessus des scores obtenus ici). Celle en sixième y était également largement supérieure à 31%. Cette variable (niveau de réussite des élèves en entrée de sixième) ne rend néanmoins pas compte de l'ensemble des résultats observés. Les élèves du collège situé en milieu rural sous faible influence urbaine, par exemple, tout en réussissant le mieux aux évaluations institutionnelles d'entrée en sixième en 2006 (65,1% au tableau 1), obtiennent le moins bon score à notre questionnaire (20% au tableau 5).

Niveaux de conceptualisation et localisation des collèges

- 55 Le tableau 6 illustre la répartition des six groupes d'élèves, que nous avons interprétés en termes de niveaux de conceptualisation du domaine, au sein de nos quatre collèges. Les différences entre établissements semblent, de ce point de vue, plus nettes. L'observation de cette répartition nous permet grandement d'affiner notre analyse.

Tableau 6

Taux de répartitions (en%) des élèves dans les groupes en fonction de la localisation du collège

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4	Groupe 5	Groupe 6
Pôle urbain	10,8	20,5	30,5	19,4	12,8	5,9
Milieu rural isolé	18,5	20,1	17,6	24,3	11,5	8
Milieu rural sous faible inf. urb.	19,4	19,7	26,4	15	12	7
Pôle rural	15	15,3	19,4	19,1	18,1	13,1

Table 6

Distribution (in%) of the pupils as a function of the location of the school

- 56 Nous posons, en amont de ce travail, l'hypothèse d'un lien entre la répartition de ces regroupements dans la structure des réponses obtenues et la localisation géographique des collèges. Cette hypothèse semble effectivement validée. Au test du khi carré, la valeur calculée est de 49,1 pour un nombre de degrés de liberté égal à 15; ce qui nous amène à rejeter l'hypothèse nulle d'indépendance entre nos deux modalités croisées (groupe et collège) à tous les seuils usuels ($p < .0001$).
- 57 Comme les effectifs de nos quatre établissements sont proches (ayant tous quatre le même nombre de classes), nous avons calculé les six valeurs de chi carré (chacune avec un degré de liberté égal à cinq) résultant de la comparaison deux à deux des quatre collèges. Cinq des six valeurs calculées sont significatives. L'établissement le plus différenciateur est le collège du pôle rural qui comparé à ceux du pôle urbain, du milieu rural sous faible influence urbaine et enfin du milieu rural isolé permet de calculer respectivement les valeurs de chi carré de 22,5 ($p < .001$); 17,3 ($p < .01$) et 14 ($p < .05$). Le collège du pôle urbain, croisé avec celui situé en milieu rural isolé, permet de calculer un chi carré égal à 19,5 ($p < .01$). Enfin, la comparaison des deux établissements situés en milieu rural isolé et en milieu rural sous faible influence urbaine donne un chi carré calculé de 11,8 ($p < .05$).
- 58 À la lecture du tableau 6, ce sont les élèves du collège du pôle rural qui atteignent en plus grand nombre les niveaux de conceptualisation les plus élevés (groupes 5 et 6). Cet établissement se caractérise par une proportion d'élèves en difficulté plus faible que celle des deux collèges situés en milieu rural mais comparable avec celle du collège du pôle urbain (groupes 1 et 2). Cette bonne réussite semble assez nettement distinguer ce collège des autres établissements alors même qu'il intègre un bon nombre d'élèves d'origine étrangère n'ayant pas forcément un bon niveau de langue en entrée. Le collège de pôle urbain a d'emblée peu d'élèves en échec systématique (groupe 1), il a également peu d'élèves «experts» dans le domaine (groupe 6). Par contre, les élèves du groupe 3, incapables de conceptualiser la notion d'échelle, y sont surreprésentés. Cette surreprésentation semble contribuer à la constitution d'un effet de seuil pouvant éventuellement renvoyer à la difficulté qu'éprouvent certains élèves de ces établissements à conceptualiser la notion d'échelle dans un champ culturellement

organisé de savoirs, voire, de manière plus générale, à s'approprier effectivement et le savoir scolaire et le travail intellectuel (Bautier & Rochex, 1998).

- 59 Nous pouvons également observer, quoique de manière moindre, ce même effet de seuil en ce qui concerne les sujets de l'établissement de milieu rural sous faible influence urbaine. Le collège situé en milieu rural isolé semble quant à lui se caractériser par l'importance du nombre d'élèves appartenant au groupe 4 (groupe atypique composé d'élèves réussissant modérément certains problèmes d'agrandissement et d'échelle nécessitant le calcul d'une dimension sur le terrain ou sur la carte). Il partage par ailleurs avec le collège de milieu rural sous faible influence urbaine un nombre plus important d'élèves en échec (groupes 1 et 2).

Conclusion

- 60 Nous avons tenté, dans cette recherche, d'analyser les conceptualisations d'élèves de collège mis en situation de résoudre un ensemble de problèmes d'agrandissement et d'échelle. Le traitement des données recueillies nous a permis de mettre en évidence des regroupements dans la structure des réussites et des échecs entre différents sous-groupes d'élèves et certaines catégories de problèmes qu'ils réussissaient électivement. La spécificité de cette recherche consiste d'une part, à avoir interprété ces regroupements en termes de niveaux de conceptualisation et, d'autre part, à les avoir utilisés en tant que variable dépendante prolongeant l'analyse de la réussite problème par problème.
- 61 À partir d'un zonage des aires urbaines emprunté à l'INSEE, nous avons analysé les réponses de l'ensemble des élèves de quatre collèges situés chacun dans une des quatre zones rurales et urbaines suivantes: pôle urbain, pôle rural, milieu rural isolé, milieu rural sous faible influence urbaine. Nos conclusions ne nous ont pas permis de valider, à partir des quatre établissements retenus, l'hypothèse de l'Observatoire de l'école rurale. Les quatre collèges, que nous avons étudiés, s'insèrent dans des espaces économiques, sociaux, et culturels spécifiques. Ils ne sont pas pour autant nécessairement représentatifs de l'ensemble de la zone géographique dans laquelle ils sont situés.
- 62 Par contre ce travail nous a permis de valider l'hypothèse portant sur l'existence d'un lien de dépendance entre le type de collège d'appartenance et les différents niveaux de conceptualisation développés par les élèves. Dans le cadre de notre étude, la position sociogéographique ne semble pas nécessairement être le seul facteur en jeu. Le choix des établissements retenus, ainsi que le niveau de maîtrise du domaine en entrée au collège apparaissent également comme des facteurs déterminants. De manière générale, nos données plaident plutôt en faveur d'une covariation d'un ensemble de facteurs: certains de nature sociogéographique, mais d'autres également impliquant des dimensions de l'ordre du cognitif, du situationnel, du conceptuel, d'autres enfin relevant davantage du collège et de ses modes d'organisation et de travail.

BIBLIOGRAPHIE

Alpe, Y., & Poirey, J.-L. (2003). *L'enseignement scolaire dans les milieux ruraux et montagnards*, t. 2: *Au seuil du collège*. Besançon: Presses Universitaires de Franche-Comté.

Alpe, Y. (2005). Le système éducatif en milieu rural: des débats anciens, des problématiques actuelles. In Y. Alpe & J.-L. Poirey (Éd.), *L'enseignement scolaire dans les milieux ruraux et montagnards*, t. 3 (pp. 21-30). Besançon: Presses Universitaires de Franche-Comté.

Alpe, Y., Fauguet, J.-L., & Poirey, J.-L. (2007, 14 et 15 mars). Contextes géographiques et pédagogiques: stratégies d'ouverture des écoles et trajectoires scolaires des élèves. Communication présentée au colloque organisé par les IUFM du Pôle Nord-Est. Besançon, France.

Benzecri, J.-P. (1973). *L'Analyse des correspondances*. Paris: Dunod.

Benzecri, J.-P., & Benzecri, F. (1976). *Pratiques de l'analyse des données*. Paris: Dunod.

Bastien, C. (1997). *Les connaissances de l'enfant à l'adulte*. Paris: Armand Colin.

Bastien, C., & Bastien-Toniazzo, M. (2004). *Apprendre à l'école*. Paris: Armand Colin.

Bautier, E., & Rochex, J.-Y. (1998). *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification?* Paris: Armand Colin.

Bodin, A. (1989). Les échelles: préparation d'une situation d'enseignement en classe de cinquième. *Petit x*, 20, 35-44.

Cellérier, G. (1992). Le constructivisme génétique aujourd'hui. Organisation et fonctionnement des schèmes. In B. Inhelder & G. Cellérier (Éd.), *Le cheminement des découvertes de l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7.2, 5-31.

Girardot, J.-J. (1982). ANACONDA, système conversationnel d'analyse des données. *Cahier du SURF*, 1 (nouvelle série), 137-174.

Hart, K.M. (1981). *Children understanding of mathematics*. London: J. Murray.

Hart, K.M. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.198-219). VA: National Council of Teachers of Mathematics. Hillsdale, N.J.: Erlbaum/Reston.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Paris: Presses Universitaires de France.

Karplus, R., & Peterson, R.W. (1970). Intellectual development beyond elementary school. II: Ratio, a survey. *School, Science and Mathematics*, 70(9), 813-820.

Karplus, R., Karplus, E.F., Formisano, M., & Paulson, A.C. (1979). Proportional reasoning and control of variables in seven countries. In J. Lochhead & J. Clement (Eds.), *Cognitive process instruction*. Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Lebart, L., Morineau, A., & Tabard, N. (1977). *Techniques de la description statistique. Méthodes et logiciels pour l'analyse des grands tableaux*. Paris: Dunod.

- Levain, J.-P. (1996). Développement cognitif et apprentissage de la proportionnalité. *Revue Européenne de Psychologie appliquée*, 46, 131-138.
- Levain, J.-P. (1997). *Faire des maths autrement*. Paris: l'Harmattan.
- Levain, J.-P. (2006). Territoires et résolution de problèmes au collège. In Y.Alpe, P.Champollion & J.-L. Poirey (Éd.), *L'enseignement scolaire dans les milieux ruraux et montagnards*, t. 4: *Parcours scolaires et constructions de projets au collège* (pp.135-149). Besançon: Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Levain, J.-P., Le Borgne, P., & Simard, A. (2007, 29 et 30 décembre). Territoires et résolution de problèmes au collège. Communication présentée au Colloque international «Éducation et territoires: contextes, organisations et trajectoires scolaires». Observatoire de l'école rurale, Digne-les-Bains, France.
- Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J.Hiebert & M.Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.19-40). VA: National Council of Teachers of Mathematics. Hillsdale, N.J.: Erlbaum/Reston.
- Roux, M. (1985). *Algorithme de classification*. Paris: Masson.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J.Hiebert & M.Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161). VA: National Council of Teachers of Mathematics. Hillsdale, N.J.: Erlbaum/Reston.
- Vergnaud, G. (1990). Catégories logiques et invariants opératoires. *Archives de Psychologie*, 145-149.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2.3), 135-169.
- Weil-Barais, A. (2004). Apprendre les nombres et les opérations. In A.Weil-Barais (Éd.), *Les apprentissages scolaires* (pp.136-173). Rosny-sous-Bois: Bréal.

NOTES

1. L'Observatoire de l'école rurale est un programme de recherche mené avec cinq IUFM dans six départements (Ain, Ardèche, Haute-Saône, Haute-Loire, Alpes-de-Haute-Provence, Drôme). Son projet est d'analyser les parcours des élèves sur la durée (et pas d'en donner une photographie à un moment donné). Des élèves de CM₂ seront suivis jusqu'à la fin de la seconde, donc au moment où l'orientation professionnelle se dessine.
2. La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1988, 1990, 1991) se situe à l'interface de la psychologie cognitive de la psychologie sociale et de la didactique. Elle permet l'étude des représentations et des conceptualisations construites par l'enfant et l'adolescent sur une large période. La proportionnalité fait partie du champ conceptuel des structures multiplicatives; c'est-à-dire: «l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications et divisions et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations» (Vergnaud, 1990, p.147).
3. Sans toutefois relever d'une catégorisation ambition réussite.
4. Le questionnaire se présente sous la forme d'un livret (format A4, un problème par page). Les problèmes présentés sont des réductions des originaux.
5. Le rapport interne se calcule entre la longueur et la largeur d'un même rectangle. Le rapport externe correspond au rapport d'agrandissement et se calcule ici à partir des longueurs respectives des deux rectangles.

6. La définition commune du mot échelle renforce éventuellement cette interprétation.
  7. Ce logiciel est développé par le laboratoire MTI@SHS de l'université de Franche-Comté.
  8. «Par quel nombre faut-il multiplier la hauteur de cette petite boîte pour obtenir la hauteur de l'immeuble?»
  9. Il s'agit, rappelons-le, d'un établissement plutôt «difficile», situé dans les quartiers périphériques et accueillant une part importante d'élèves en difficulté.
-

RÉSUMÉS

Les recherches menées par l'Observatoire de l'école rurale ont mis en évidence une « relative dégradation » des trajectoires scolaires des élèves des collèges ruraux comparés à ceux des établissements urbains ou périurbains. Nous abordons cette question, sous l'angle de la psychologie cognitive, en focalisant notre recherche sur la résolution de problèmes à l'intérieur du champ conceptuel de la proportionnalité et des problèmes d'agrandissement et d'échelle.

L'exploitation d'un questionnaire, constitué de 19 problèmes proposés aux élèves de quatre établissements scolaires appartenant à des zones sociogéographiques contrastées (périphérie urbaine, milieu rural sous faible influence urbaine, milieu rural isolé, pôle rural), permet de vérifier si la position géographique du collège a une incidence sur la structure des réussites et des échecs ainsi que sur les niveaux de conceptualisation qui en découlent.

Le traitement des données par une analyse factorielle des correspondances et par une classification ascendante hiérarchique permet de mettre en évidence des sous-groupes d'élèves qui se caractérisent par des niveaux contrastés de conceptualisation du domaine. L'objet de notre recherche concerne à la fois la description des caractéristiques cognitives de ces sous-groupes ainsi que l'analyse de leur composition et de leur répartition au sein des différents collèges.

The various research studies led within the framework of the Observatory of Rural School established a “relative degradation” of the school trajectories of pupils attending rural schools. We approach this question by focusing on problem solving inside a well bounded conceptual field (proportionality) through the concepts of increase and scale.

The exploitation of a questionnaire composed of 19 problems proposed to the pupils of four geographically well differentiated schools (a school situated in an urban suburb, one in a rural area under weak urban influence, the other one in an isolated rural area, finally the last one definitely set in a rural setting) allows to check if the geographical position has an incidence on the structure of success and failure as well as on the levels of conceptualization which ensues from it.

The data processing by a factorial analysis of correspondences and by a hierarchical ascending classification gives classes of problems and sub-groups of pupils. These groups are characterized by very contrasting levels in the field of conceptualization. The object of our research concerns the composition of these various groups as well as their distribution within the various schools.

INDEX

Mots-clés : Agrandissement, Conceptualisation, Échelle, Proportionnalité, Résolution de problèmes, Territoire

Keywords : Conceptualization, Enlargement, Problem solving, Proportionality, Scale, Territory

AUTEURS

JEAN-PIERRE LEVAIN

Jean-Pierre Levain est docteur en psychologie du développement de l'université Paris V. Après avoir été psychologue clinicien puis enseignant pendant une vingtaine d'année, il est aujourd'hui Maître de conférences à l'IUFM de Franche-Comté et membre du Laboratoire de Psychologie EA 3188 de l'université de Franche-Comté. Thèmes de recherche: résolution de problèmes, conceptualisation, analyse des pratiques enseignantes. Courriel: jean-pierre.levain@fcomte.iufm.fr

PHILIPPE LE BORGNE

Philippe Le Borgne est docteur en mathématiques de l'université de Reims. Maître de conférences à l'IUFM de Franche-Comté, il y assume la responsabilité de Directeur Adjoint chargé des dossiers Recherche, Culture et Relations Internationales. Ses travaux le conduisent à participer à de nombreux projets de recherche en didactique des mathématiques dans le cadre du Laboratoire de Didactique des Mathématiques EA 1547 de Paris VII. Thèmes de recherche: didactique des mathématiques, approche instrumentale, étude des pratiques enseignantes, usage des technologies. Courriel: philippe.leborgne@fcomte.iufm.fr

ARNAUD SIMARD

Arnaud Simard est docteur en mathématiques de l'Université de Franche-Comté. Maître de conférences à l'IUFM de Franche-Comté depuis 2002 et membre du Laboratoire de Mathématiques UMR 6623 de l'université de Franche-Comté, il est également co-responsable de la Commission Permanente des IREM pour l'École Élémentaire (COPIRELEM). Thèmes de recherche: résolution de problèmes, schémas, rôle de l'enseignant, modélisation. Courriel: arnaud.simard@fcomte.iufm.fr