Apprentissage de schémas et résolution de problèmes

Learning schemata and problem solving

Jean-Pierre Levain

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/osp/5816>

DOI : 10.4000/osp.5816

ISSN : 2104-3795

Éditeur

Institut national d'étude du travail et d'orientation professionnelle (INETOP)

Édition imprimée

Date de publication : 15 septembre 2000

ISSN : 0249-6739

Référence électronique

Jean-Pierre Levain, « Apprentissage de schémas et résolution de problèmes », *L'orientation scolaire et professionnelle* [En ligne], 29/3 | 2000, mis en ligne le 28 mai 2018, consulté le 16 décembre 2020.

URL : <http://journals.openedition.org/osp/5816> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/osp.5816>

Ce document a été généré automatiquement le 16 décembre 2020.

© Tous droits réservés

Apprentissage de schémas et résolution de problèmes

Learning schemata and problem solving

Jean-Pierre Levain

Introduction

- 1 Au cours d'un travail de recherche déjà publié (Levain, 1997), nous avons souligné qu'environ un tiers des élèves de fin de primaire et de collège (1) éprouve de grosses difficultés à comprendre et à traiter un ensemble diversifié de problèmes de proportionnalité. Ce groupe de sujets, souvent en échec, se démarque par une série de caractéristiques facilement identifiables dans le traitement des problèmes proposés :
 - un pourcentage élevé de non-réponses (42 % sur l'ensemble des problèmes) ;
 - des confusions très fréquentes entre les situations additives et multiplicatives ;
 - un fort impact des aspects sémantiques superficiels dans le choix des procédures (reconnaissance de mots inducteurs, taille des nombres en présence etc.) ;
- 2 un temps de réflexion, souvent trop court, qui ne leur permet pas toujours de se construire une véritable représentation du problème ;
- 3 un éventail de procédures qui reste généralement assez limité (ces sujets ont par exemple du mal à accepter qu'il existe plusieurs manières de résoudre un même problème ; enfin une mauvaise reconnaissance de certains invariants qui peut conduire à un décalage plus ou moins important entre la situation présentée et l'analyse qu'en fait l'élève (par exemple beaucoup d'entre eux traitent fréquemment certaines situations d'agrandissement en termes d'écarts constants).
- 4 C'est la prise en compte de ces différents observables qui va constituer le point de départ de cette nouvelle recherche dans laquelle nous nous proposons d'explorer un protocole d'aide à la résolution de problèmes arithmétiques avec des élèves des classes primaires de C.M.1 et C.M.2. Notre démarche vise à évaluer l'impact d'un travail d'apprentissage qui associe à un ensemble d'énoncés une présentation graphique des

différentes classes de problèmes tant additifs que multiplicatifs. Cette présentation¹, sous forme de « schémas de problèmes », privilégie très nettement la structure mathématique sous-jacente à l'énoncé. Elle devrait simplifier l'identification des principaux opérateurs en jeu, contribuer à améliorer le choix d'une procédure pertinente tout en facilitant éventuellement une meilleure compréhension des situations proposées.

Le concept de schéma de problèmes

- 5 Ce concept de « schéma de problèmes » est utilisé de manière relativement polysémique puisque, d'une recherche à l'autre, il peut prendre au moins trois significations différentes. Il peut, dans un premier temps, renvoyer à une typologie systématique des différentes catégories de problèmes additifs et multiplicatifs. En ce sens, le terme de schéma est assez proche des concepts de structure ou de classe de problèmes. Dans le cadre de recherches par simulation informatique, ce terme concerne plus particulièrement des schémas d'action, il se rapproche alors plutôt de la notion de procédure (Riley, Greeno, & Heller, 1983). Il peut aussi représenter à l'intérieur de ce courant des blocs de connaissances qui auraient, au sein même du programme, une fonction d'assimilation et d'organisation relationnelle des données (Kintsch & Greeno, 1985). Enfin le terme de schéma peut traduire tout simplement une représentation graphique (schéma ou dessin) qui sert de support au raisonnement de l'élève. Cette représentation peut être relativement empirique (Lewis, 1989) ou contribuer plus explicitement à l'apprentissage de certaines structures de problèmes bien identifiées (Nesher, 1988; Willis & Fuson, 1988; Fisher, 1993).

Schémas de problèmes et théorie des champs conceptuels

- 6 Dans le cadre de ce travail, nous insistons tout particulièrement sur l'importance de la diversité et du caractère réaliste des problèmes que nous proposons aux élèves. Nous pensons en effet que c'est en se confrontant à des situations nombreuses et variées que l'enfant construit de nouveaux savoirs et savoir-faire. Ces connaissances peuvent, bien entendu, être explicites, elles restent aussi, pour une bonne part, implicites tout en jouant un rôle important dans l'organisation des procédures mises en place par le sujet.
- 7 La construction du matériel expérimental ne peut cependant se limiter au choix empirique d'un ensemble de problèmes qui ne traduisent pas toujours suffisamment toute la variété et la complexité des situations réelles. C'est pourquoi, nous nous appuyons, dans ce travail, sur une catégorisation exhaustive des différentes classes de problèmes qui repose à la fois sur l'analyse des concepts mathématiques impliqués ainsi que sur l'identification des principales opérations de pensée nécessaires à la mise en relation par le sujet des données pertinentes de l'énoncé (Vergnaud, 1982, 1983). Nous citerons comme exemple pour illustrer ce dernier point les deux problèmes suivants qui, à première vue, peuvent être considérés comme isomorphes puisqu'il s'agit dans les deux cas de multiplier un nombre entier par un nombre décimal inférieur à un, alors même que la multiplication est une opération commutative.

« Un instituteur commande 38 crayons de papier. Le prix d'un crayon est de 0,6 francs. Combien l'instituteur doit-il payer ? ».

« Une ménagère achète 0,7 kilogramme de viande. Un kilogramme de viande coûte 43 francs. Combien la ménagère doit-elle payer ? ».

- 8 Le premier problème est réussi par 80 % des élèves de C.M.2, le second par seulement 48 % des mêmes élèves (Levain, 1992). Les schémas de ces deux problèmes illustrent très clairement la différence de position occupée par le nombre décimal à l'intérieur d'une structure multiplicative à quatre termes.

FIGURE 1. Schémas des problèmes n° 1 et n°2

Figure 1. Schemata of problems n°1 et 2

- 9 C'est en référence à ses premiers apprentissages des situations multiplicatives (la multiplication est fréquemment introduite comme une addition itérée) que l'élève se représente plus facilement 38 fois une somme de 0,6 franc plutôt que 0,7 fois le prix d'un kilogramme de viande.

Méthodologie et hypothèses

- 10 Notre travail d'élaboration et d'évaluation d'un protocole d'aide à la résolution de problèmes active un très grand nombre de variables didactiques, psychologiques et expérimentales que le chercheur ne peut sans doute pas maîtriser de manière exhaustive². Il importe donc de bien spécifier l'essentiel des choix méthodologiques qui président à l'élaboration de nos hypothèses.
- 11 Nous nous situons dans une perspective constructiviste liée, pour une bonne part, à la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991). Cette théorie se situe à l'interface de la psychologie cognitive, de la psychologie sociale et de la didactique. Elle analyse le développement des connaissances chez l'enfant et l'adulte sous trois aspects bien imbriqués : la catégorisation des différentes situations, la description et l'analyse des schémas mis en œuvre par le sujet, l'étude de ses principales représentations symboliques. C'est par l'intermédiaire de représentations graphiques relativement épurées (les schémas de problèmes) que nous souhaitons provoquer un travail de coordination et d'ajustement de l'ensemble des schémas mobilisés par l'élève afin qu'il les adapte progressivement de manière plus effective aux caractéristiques de la tâche.
- 12 Nous pensons que l'utilisation de schémas peut contribuer à faciliter le raisonnement du sujet. En fixant plus clairement la place de l'inconnue, les représentations graphiques utilisées condensent l'information pertinente tout en facilitant l'identification des différents opérateurs. Néanmoins, il importe de préciser que nous nous efforçons d'utiliser ces schémas comme des supports de réflexion et de discussion

entre groupes de sujets et non comme des catalogues ou des représentations plus ou moins canoniques de tel ou tel type de problèmes qu'il conviendrait d'apprendre par cœur.

- 13 La grande majorité des recherches concernant la résolution de problèmes arithmétiques se situe presque exclusivement dans le champ des problèmes additifs ou dans celui des problèmes multiplicatifs. Cette bipartition qui correspond, pour une bonne part, à une logique de recherche, ne traduit pas la réalité des apprentissages. Elle peut également, en facilitant les phénomènes d'auto-apprentissage, contribuer à biaiser la pertinence des protocoles recueillis. C'est pourquoi, nous avons décidé de mieux coordonner dans ce travail situations additives et situations multiplicatives³.
- 14 Toujours dans un souci de validité, nous souhaitons également augmenter le temps (à plus de trois mois) entre la phase d'apprentissage des schémas et l'évaluation terminale. Nous voulons en effet privilégier une véritable compréhension des situations plutôt qu'un apprentissage plus ou moins mécanique de procédures à apparier à telle ou telle classe de problèmes. Nous laissons les élèves, au cours de cette dernière étape, entièrement libres de leurs manières d'agir (au post-test, aucune consigne ne leur sera donnée concernant la nécessité d'utiliser les schémas présentés).

Présentation de l'expérience

- 15 Notre expérimentation se déroule sur deux ans, la première année nous avons proposé un ensemble de 26 problèmes additifs et multiplicatifs à 100 élèves âgés de dix ou onze ans répartis dans quatre classes primaires (deux de C.M.1 et deux de C.M.2). La figure 2 résume de manière synthétique le déroulement de l'expérience.

FIGURE 2. Déroulement de l'expérience

FIGURE 2. Course of the experiment

- 16 Nous avons construit pour le pré-test et le post-test un livret d'évaluation contenant dix-huit problèmes multiplicatifs et huit problèmes additifs (l'ensemble des problèmes est présenté en annexe de ce travail). Chaque problème est présenté sur une page du livret de manière à recueillir l'intégralité des protocoles. L'ordre de présentation des problèmes est aléatoire hormis les trois premiers qui sont toujours les plus simples de manière à ce qu'aucun élève ne soit d'emblée en échec. L'ensemble des calculs s'effectue sur le livret, les calculatrices ne sont pas autorisées⁴. Les mêmes problèmes

sont utilisés pour le pré-test et le post-test. Chacun des vingt-six problèmes est codé de la manière suivante :

- 2 points pour une réponse exacte ;
 - 1 point pour une bonne procédure accompagnée cependant d'une erreur dans le calcul d'une ou plusieurs opérations (ce qui implique que l'ensemble des opérations soit posé et effectué) ;
 - 0 point dans tous les autres cas.
- 17 La deuxième année, nous avons renouvelé l'expérimentation pratiquement à l'identique avec les cinquante élèves restants de C.M.2 (ex-C.M.1). Quelques problèmes supplémentaires seront néanmoins ajoutés au livret d'évaluation terminale.

Choix des problèmes

- 18 En ce qui concerne les situations additives, nous avons privilégié les problèmes de transformation reliant deux mesures, très utilisés dès le cours élémentaire, ainsi que les problèmes de composition entre deux transformations, beaucoup plus complexes (Vergnaud, 1982). La difficulté sera, bien entendu, très différente selon le type de nombres utilisés, la nature de l'inconnue, le caractère positif ou négatif de la transformation. Le calcul d'une transformation, connaissant une des deux transformations élémentaires et la composée reste particulièrement délicat au cycle primaire. Quelques exemples de problèmes, ainsi que leurs schémas sont illustrés à la figure 3.

FIGURE 3. Exemples de problèmes additifs

FIGURE 3. Examples of addition problems

- 19 En ce qui concerne les situations multiplicatives, nous nous sommes limités à la structure de proportion simple (Vergnaud, 1983 ; Levain, 1992). La difficulté de la tâche sera ici encore très variable selon la structure du problème, les valeurs numériques

impliquées, ainsi que la nature de l'inconnue. Quelques exemples sont illustrés à la figure 4.

FIGURE 4. Exemples de problèmes multiplicatifs

Multiplication :
Alain met 67 litres de super pour faire le plein d'essence.
Le prix d'un litre de super est de 6,25 francs.
Combien Alain doit-il payer ?

$$\begin{array}{r|l} 1 & 6,25 \\ 67 & ? \end{array}$$

Division de type 1 :
Un centre de vacances achète du jus de fruit.
47 litres de jus de fruit coûtent 319,6 francs.
Combien coûte un litre de jus de fruit ?

$$\begin{array}{r|l} 1 & ? \\ 47 & 319,6 \end{array}$$

Division de type 2 :
Une cantine achète pour 156 francs de raisin.
Un kilogramme de raisin coûte 6,5 francs.
Combien la cantine a-t-elle acheté de kilogrammes de raisin ?

$$\begin{array}{r|l} 1 & 6,5 \\ ? & 156 \end{array}$$

Quatrième proportionnelle :
5 gommes coûtent 12 francs.
Combien coûtent 9 gommes ?

$$\begin{array}{r|l} 5 & 12 \\ 9 & ? \end{array}$$

FIGURE 4. Examples of multiplication problems

Pré-test et constitution des groupes

- 20 Le pré-test s'est déroulé, pour les quatre classes, dans le courant du mois de janvier 1998. Il nous a permis de construire deux groupes expérimentaux et deux groupes contrôles (C.M.1 et C.M.2). Pour ce faire, nous avons minutieusement analysé les résultats des élèves item par item afin d'apparier les sujets sur la base de leurs réussites et échecs à chaque problème. Un élève de chaque paire constituée est affecté au groupe expérimental, l'autre au groupe contrôle. Les élèves qui ne peuvent être appariés dans de bonnes conditions participent à l'expérimentation, mais ne sont pas retenus dans cette étude. Toute absence d'un sujet à une des séances d'apprentissage entraîne l'élimination de la paire (lui et son correspondant) du tableau des résultats. Notre échantillon effectif se compose pour le pré-test de 48 élèves au C.M.1 (2 groupes de 24) et de 46 au C.M.2. Au post-test, il ne sera plus que respectivement de 42 et 40 sujets. Les résultats du pré-test sont présentés dans le tableau 1 (les notes allant de 0 à 2).

TABEAU 1. Moyenne des scores au pré-test

	CM.1	C.M.2
Groupe expérimental	0,70	1,27

Groupe contrôle	0,69	1,27
-----------------	------	------

TABLE 1. Average pre-test results

- 21 La figure 5 traduit le profil du groupe expérimental et du groupe contrôle de la classe de C.M.2. Elle illustre le travail effectué item par item, et non de manière globale, dans l'obtention de l'équivalence des groupes.

FIGURE 5. Pré-test C.M.2

FIGURE 5. Pre-test C.M.2

Présentation de la phase didactique

- 22 Le travail didactique comporte trois séquences d'un peu moins de deux heures. Afin de favoriser la discussion et l'argumentation le travail est effectué principalement par petits groupes de trois ou quatre sujets. Chaque groupe doit parvenir à un degré d'accord suffisant avant de pouvoir formuler sa réponse aux autres groupes (les échanges s'effectuant, dans un premier temps, à l'intérieur des petits groupes). Un débat collectif est par ailleurs organisé à la fin de chaque séance.
- 23 La première séance est dédiée à la présentation des différents schémas additifs et multiplicatifs. L'objectif principal est de construire pour chaque problème proposé un schéma de manière à visualiser et à faciliter la recherche des opérateurs directs et inverses tout en analysant les différentes procédures issues du travail de l'ensemble des petits groupes de trois à quatre sujets. Dans cette phase initiale, l'expérimentateur propose les différents schémas qui correspondent d'assez près à ceux qui sont présentés dans le cadre de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1982, 1983).
- 24 La deuxième séquence privilégie un travail de mise en correspondance entre schémas et énoncés. Elle se poursuit par la résolution d'une série de problèmes dans laquelle chaque petit groupe doit construire les schémas adéquats et poser les différents opérateurs pertinents. Une large place est laissée à la discussion et au débat intra et intergroupes. La figure 6 est une réduction d'un document de travail qui illustre la première partie de cette séance dans laquelle il convient de mettre en correspondance les différents schémas avec les problèmes proposés avant de les résoudre.
- 25 Dans la troisième séquence, les élèves doivent construire des énoncés de problèmes correspondants à différents schémas qui leur sont fournis. Cette séance se poursuit par un travail de résolution de problèmes puis par une discussion générale.

C.M.2	Grp expérimental	1,31	1,61	1,52
	Grp contrôle	1,29	1,57	1,49

TABLE 2. Results of the first experiment

- 28 À la lecture de ce tableau, force est de constater que le travail d'explicitation et d'apprentissage de schémas effectué pendant la phase didactique n'a pas contribué à améliorer de manière importante les performances des groupes expérimentaux par rapport à celles des groupes contrôles. L'apprentissage de schémas ne peut donc pas être considéré d'emblée comme une méthode effective d'aide à la résolution de problèmes adaptée à l'ensemble de ces élèves.
- 29 Après avoir noté qu'au C.M.2 les problèmes additifs ne sont pas nécessairement plus aisés que les multiplicatifs, il convient de remarquer que les niveaux, globalement comparables des résultats obtenus, masquent une importante diversité des réussites dans l'analyse des différents problèmes. Tout d'abord le tableau 3 souligne assez nettement cette hétérogénéité des résultats entre groupes contrôles et expérimentaux (plus particulièrement en ce qui concerne les problèmes d' 7, 9, 10, 12, 13, 15, 18, 22, 23, 24, 25 et 26).
- 30 Une analyse des différents protocoles qui sous-tendent cette hétérogénéité nous permet d'avancer quelques conclusions importantes. Grâce au travail d'apprentissage effectué, les élèves du groupe expérimental réussissent bien davantage les problèmes les plus complexes notamment les items d' 7, 16, 24, 25 et 26. Nous avons souligné en caractères gras les exemples les plus marqués qui illustrent cette diversité des résultats.

TABLEAU 3. Post-test 1998

PROBLÈMES	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5	n° 6	n° 7	n° 8		n° 9	n° 10	n° 11	n° 12	n° 13
C.M.1 grp expé.	2	1,57	1,67	1,38	0,76	1,29	0,62	1,14		0,38	0,43	0,19	0,19	0,52
C.M.1 grp cont.	2	1,76	1,67	1,19	0,86	1,33	0,19	1,29		0,71	0,67	0,05	0,19	0,81
C.M.2 gip expé.	2	1,8	1,95	1,7	1,6	1,8	1,35	1,95		1,7	1,6	1,7	1	1,7
C.M.2 grp cont.	1,95	1,9	1,85	1,65	1,6	1,7	0,85	1,95		1,8	1,5	1,65	1,4	1,65
PROBLÈMES	n° 14	n° 15	n° 16	n° 17	n° 18	n° 19	n° 20	n° 21		n° 22	n° 23	n° 24	n° 25	n° 26
C.M.1 grp expé.	0,24	1,5	1,19	0,38	0,1	1,76	1,29	1,81		0,86	1,71	0	0,86	0,29

C.M.1 cont.	grp	0,1	1	0,95	0,38	0,1	2	1,48	1,76		0,67	1,43	0	0,48	0,19
C.M.2 expé.	grp	1,55	1,8	1,65	1,45	0,7	1,95	1,8	1,85		0,6	1,45	0,5	1,4	0,95
C.M.2 cont.	grp	1,7	1,9	1,5	1,4	0,4	2	1,8	2		1,3	1,8	0,2	0,6	0,65

TABLE 3. POST-TEST 1998

- 31 Ces mêmes élèves du groupe expérimental maîtrisent bien mieux les situations de recherche d'une quatrième proportionnelle (problèmes n° 15 et 16 pour les C.M.1 et n° 16, 18 pour les C.M.2). En revanche, ils réussissent un peu moins bien les problèmes les plus simples. Ils échouent davantage dans l'exécution de certains algorithmes opératoires notamment la division entre deux nombres entiers au C.M.1 (problèmes n° 9 et 13) ; ainsi que la division lorsqu'un nombre décimal est impliqué (problème n° 10 au C.M.1, n° 12 au C.M.2). Nous constatons également chez eux une plus grande sensibilité à certains distracteurs. Par exemple au problème n° 22, le terme inducteur « diminué » a fortement entraîné une réponse automatique de soustraction chez les élèves du groupe expérimental de C.M.2 qui n'ont pas, dans leur grande majorité, représenté graphiquement ce problème parce que considéré à tort comme trop simple. Ces deux phénomènes concernant principalement le groupe expérimental du niveau C.M.2 (baisse de l'efficacité opératoire et analyse superficielle de certains problèmes « apparemment faciles ») peuvent nous amener à évoquer l'hypothèse d'une charge de travail sans doute trop conséquente. Il était peut-être trop ambitieux de demander à ces élèves de travailler simultanément la compréhension des textes, l'analyse des structures mathématiques sous-jacentes ainsi que l'exécution et le contrôle des algorithmes opératoires.

Analyse des résultats de la deuxième expérimentation

- 32 Au cours de l'année 1999, nous avons renouvelé cette expérimentation en conservant la répartition initiale entre groupe contrôle et groupe expérimental avec les anciens élèves de C.M.1, arrivés entre temps au C.M.2. Nous avons cependant jugé utile de modifier cette deuxième expérimentation sur plusieurs points importants.
- 33 Quatre problèmes sont ajoutés au post-test qui passe de vingt-six à trente. Les deux nouveaux problèmes additifs traduisent une comparaison d'état qui porte soit sur la recherche de l'état référé (n° 27), soit sur celle de l'état référent (n° 29). Les deux nouveaux problèmes multiplicatifs traduisent soit une composition de deux proportions simples (n° 28), soit une proportion double (n° 30). Ces quatre types de problèmes ne seront pas présentés dans les séances de travail didactique ; ils sont par ailleurs généralement assez peu abordés en classe. Notre objectif est ici d'analyser dans quelle mesure les sujets du groupe expérimental seront capables de modifier voire de transférer certains schémas de problèmes afin de pouvoir traiter ces situations nouvelles.

- 34 Nous avons souhaité alléger quelque peu la charge de travail des sujets tout en privilégiant les aspects de compréhension et de traitement des situations problèmes. En ce sens des calculatrices sont désormais fournies aux élèves et utilisées systématiquement au cours des trois séances didactiques et au post-test.
- 35 Les erreurs d'algorithmes opératoires étant pour l'essentiel neutralisées, les items du post-test sont évalués de manière dichotomique, en termes de réussite (1 point) ou d'échec (0 point).
- 36 Les résultats du tableau 4 traduisent, en ce sens, les fréquences de réussite du groupe expérimental et du groupe contrôle en fonction des deux catégories principales de problèmes.

TABLEAU 4. Résultats de la deuxième expérimentation

		PBS ADDITIFS	PBS MULTIPLICATIFS	ENSEMBLE
C.M.2	Grp expérimental	0,72	0,88	0,83
	Grp contrôle	0,55	0,75	0,68

TABLE 4. Results of the second experiment

- 37 À la lecture de ce tableau, les résultats du groupe expérimental apparaissent nettement supérieurs à ceux du groupe contrôle puisque sur l'ensemble des trente problèmes proposés, le pourcentage de réussite est de respectivement 83 % pour les sujets du premier groupe contre 68 % pour les élèves du second. La formation du groupe expérimental a eu également un léger effet de concentration des bons résultats (l'écart-type du groupe expérimental est de 0,38; celui du groupe contrôle de 0,48, alors même qu'ils étaient tout à fait équivalents au pré-test).
- 38 Si l'on peut supposer que les scores réalisés par les élèves à l'épreuve peuvent être ajustés par une distribution normale (ce qui pourrait être le cas pour une épreuve de 30 items), un test de comparaison de deux moyennes normales à partir de ces deux échantillons de taille 19 (test unilatéral) montre que les élèves expérimentaux sont significativement meilleurs que les élèves témoins : au seuil de 5 % (un tel test conduirait à une conclusion erronée 5 fois sur 100), la différence observée 0,145 dépasse très notablement la valeur critique qui, sous nos hypothèses, vaut 0,041.
- 39 L'écart de réussite entre nos deux groupes est de 17 % en ce qui concerne les problèmes additifs et de 13 % pour les problèmes multiplicatifs. Deux arguments peuvent être avancés pour expliquer cette différence. Le premier est technique et contribue à nuancer cet écart. Les problèmes multiplicatifs n° 1, 2 et 4 particulièrement simples sont réussis par l'ensemble des élèves des deux groupes. Seul le problème additif n° 19 est très aisé à résoudre. Le rôle de ces items n'est bien évidemment pas de discriminer les sujets mais, au contraire, de favoriser la réussite de tous afin qu'aucun élève ne soit totalement en échec. Hormis ces quatre problèmes, l'écart de réussite entre groupe expérimental et groupe contrôle est de 16 % aux quinze problèmes multiplicatifs restants et de 20 % aux neuf problèmes additifs⁶). Le deuxième élément d'explication est que l'utilisation d'un schéma s'avère particulièrement efficace vis-à-vis de certains problèmes additifs, notamment ceux de composition entre deux transformations (n°

24, 25 et 26). Le schéma condense en effet très utilement l'information pertinente et permet de calculer la transformation (ou de contrôler son calcul après coup) en testant des hypothèses concrètes concernant les états initial, intermédiaire ou final alors même que l'absence de ces valeurs contribue grandement à la difficulté de ce type de situations. La figure 7 illustre par exemple le problème n° 25 et sa représentation schématique.

- 40 Ce problème sera grandement facilité si le sujet se fixe un état initial hypothétique, par exemple 20, l'état final devenant alors 12, la transformation composée se calcule alors sans avoir à gérer de nombres relatifs (-8). Cette stratégie est utilisée de manière générale par la moitié des élèves du groupe expérimental qui réussissent au moins deux des trois problèmes n° 24, 25 ou 26.

FIGURE 7. Schéma du problème n°25

FIGURE 7. Schéma of problem n°25

- 41 Le tableau 5 souligne de manière évidente la supériorité du groupe expérimental sur le groupe contrôle pour pratiquement l'ensemble des items.

TABLEAU 5. Post-test 1999

PROBLÈMES	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5	n° 6	n° 7	n° 8	n° 9	n° 10	n° 11	n° 12	n° 13	n° 14	n° 15
Grp expé.	1	1	1	1	0,89	1	0,68	1	0,95	0,95	0,89	0,74	1	0,84	0,84
Grp cont.	1	1	0,89	1	0,68	0,95	0,42	0,84	0,84	0,84	0,68	0,42	0,89	0,84	0,63
PROBLÈMES	n° 16	n° 17	n° 18	n° 19	n° 20	n° 21	n° 22	n° 23	n° 24	n° 25	n° 26	n° 27	n° 28	n° 29	n° 30
Grp expé.	0,89	0,79	0,53	0,95	1	0,89	0,47	0,95	0,37	0,79	0,53	0,95	0,89	0,32	0,68

Grp cont.	0,63	0,63	0,58	0,95	0,89	0,95	0,37	0,58	0,11	0,32	0,16	0,79	0,79	0,37	0,37
-----------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

TABLE 5. Post-test 1999

- 42 Les sujets du groupe expérimental abordent également de manière plus efficace les situations relativement nouvelles. Les quatre derniers problèmes qui n'ont pas été abordés au cours de la phase didactique sont réussis par 71 % de ces sujets contre 58 % seulement en ce qui concerne les élèves du groupe contrôle. Le problème n° 30 est particulièrement bien maîtrisé par les élèves du groupe expérimental qui l'ont pour la plupart facilement analysé dans les termes d'une double proportionnalité : le prix du camping est proportionnel à la fois au nombre de campeurs pour une durée fixée et à la durée du séjour pour un nombre constant de campeurs.

Conclusion

- 43 Nous avons tenté, dans cette recherche, d'évaluer l'efficacité d'un protocole d'aide à la résolution de problèmes qui s'appuie sur un travail d'apprentissage et d'analyse de schémas représentant les principales classes de situations susceptibles d'être traitées à la fin du cycle primaire. Le cadre expérimental, que nous avons développé, se démarque assez largement des principales recherches effectuées dans le domaine. En ce sens, nous nous sommes tout d'abord appuyé, pour élaborer notre questionnaire, sur une typologie exhaustive des différentes classes de problèmes. Nous avons souhaité également prendre davantage en compte la complexité des apprentissages en augmentant d'une part le nombre d'items à évaluer et d'autre part en intégrant à la fois des situations additives et multiplicatives. Nous avons par ailleurs allongé l'intervalle de temps à plus de trois mois entre la phase didactique et l'évaluation terminale. Nous avons utilisé, tout au long de ce travail, les schémas comme des supports pour identifier les opérateurs pertinents et analyser la variété des procédures possibles. Nous avons enfin favorisé l'interaction entre pairs à l'intérieur de petits groupes de trois à quatre sujets. Ce choix nous a sans doute conduits à négliger deux éléments importants : d'une part les aspects de médiation entre adulte et élèves sont restés en arrière-plan, d'autre part certains facteurs de personnalités, notamment les aspects conatifs n'ont pu être analysés (impact de la motivation, de l'estime de soi, du style d'attribution causale etc.).
- 44 Les données issues de notre première expérimentation soulignent que notre méthode d'apprentissage de schémas ne constitue pas « en elle-même », et de manière générale, une aide ou une tentative de remédiation efficace aux difficultés rencontrées par certains élèves pour traiter différents problèmes d'arithmétique. Nos résultats mettent également l'accent sur l'importance et la complexité de tout un ensemble de variables psychologiques et didactiques qui interviennent tout au long du processus d'analyse, de compréhension et de résolution des situations proposées. La modification d'une seule de ces variables (la prise en charge des algorithmes opératoires par le recours systématique à des calculatrices) a profondément modifié nos résultats. Il ne nous est cependant pas possible d'inférer un lien de causalité car nous ne pouvons pas évaluer la part du travail d'élaboration et d'adaptation des schèmes effectué depuis le début de notre première expérimentation (au C.M.1), ni de l'effet différentiel du temps de maturation entre les élèves pourvus des schémas ou non.

- 45 À l'issue de ce travail, il nous semble essentiel de confronter davantage les élèves à une plus grande variété de situations problèmes en faisant varier très largement la taille et la nature des différentes valeurs numériques impliquées. En ce sens, la théorie des champs conceptuels permet sans doute de mieux systématiser ce travail de présentation. Il nous apparaît par ailleurs important d'utiliser plus fréquemment les calculatrices pour résoudre des problèmes au cycle primaire. L'apprentissage des algorithmes opératoires devant être plus largement dissocié des activités de résolution : certains élèves par exemple maîtrisent mal l'algorithme de la division tout en étant parfaitement capables de comprendre et résoudre des problèmes complexes de division avec l'aide d'une calculatrice.
- 46 À l'intérieur du cadre de travail que nous venons d'exposer, l'apprentissage et l'utilisation de schémas, comme autant de représentations graphiques isomorphes aux différentes structures de problèmes, nous semblent très utiles. Ces schémas nous apparaissent comme de formidables outils facilitant l'identification des opérateurs et l'analyse des procédures. Il convient bien évidemment de ne pas rigidifier outre mesure ces schémas qui ne traduisent qu'une modélisation de la situation parmi d'autres. Il nous semble néanmoins possible, en respectant les principales conditions didactiques exposées, d'améliorer, assez rapidement, les performances de bon nombre d'élèves.

BIBLIOGRAPHIE

- Ehrlich, S. (1990). *Sémantique et mathématique : Apprendre/Enseigner l'arithmétique simple*. Paris : Nathan.
- Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre*. Lausanne : Delachaux et Niestlé.
- Fischer, J.P. (1993). La résolution de problèmes arithmétiques verbaux : proposition pour un enseignement pro-actif. *Annales de didactique en sciences cognitives*, 5, 177-210.
- Huteau, M., Lautrey, J., Chartier, D., & Loarer, E. (1994). Apprendre à apprendre... La question de l'éducabilité cognitive. In G. Vergnaud (Éd.), *Apprentissage et didactiques, où en est-on ?* Paris : Hachette.
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- Kintsh, W., & Greeno, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, (1), 109-129.
- Levain, J.P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 139-161.
- Levain, J.P. (1997). *Faire des maths autrement*. Paris : l'Harmattan.
- Lewis, A.B. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 81, 521-531.

- Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems : theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 19-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum/Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nimier, J. (1976). *Mathématique et affectivité*. Paris : Stock.
- Riley, M.S., Greeno, J.G., & Heller, J.L.L. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New-York : Academie Press.
- Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne : Peter Lang.
- Vergnaud, G. (1983). A classification of cognitive task and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction : a cognitive perspective*. Hillsdale : Erlbaum.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). Academie Press : New York.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10, 2.3, 135-169.
- Willis, G.B., & Fuson, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, 80, 192-201.

NOTES

1. Cette étude de nature expérimentale et clinique concernait 225 élèves qui appartenaient aux classes allant du CM2 à la fin de la troisième, soit 45 élèves par niveau.
2. Nous citerons comme exemple de variables didactiques les différentes structures mathématiques des problèmes, les valeurs numériques impliquées, le domaine de référence des énoncés, l'ordre de présentation des informations. En ce qui concerne les variables psychologiques nous pensons plus particulièrement à différents facteurs de personnalité ou encore au rapport affectif que construit l'élève à l'objet mathématique. D'un point de vue expérimental certains aspects liés au type de plan utilisé, au nombre, à la complexité mais aussi à la diversité des items sélectionnés influencent de manière significative les résultats obtenus.
3. Les termes de situations additives ou multiplicatives que nous utilisons sont génériques. Ils font référence aux champs conceptuels des structures additives et multiplicatives (Vergnaud, 1982, 1983), c'est-à-dire à l'ensemble des situations qui, pour être traitées, nécessitent l'utilisation d'une ou plusieurs additions et soustractions d'une part, d'une ou plusieurs multiplications ou divisions d'autre part.
4. **Nous nous appuyons, pour justifier cette décision, sur une pré-expérience effectuée l'année précédente en CM.1 et C.M.2 avec 16 problèmes multiplicatifs, à l'issue de laquelle le groupe expérimental avait obtenu des résultats notablement supérieurs à ceux du groupe contrôle.**
5. Rappelons que l'ensemble des trente problèmes est disponible en annexe de ce travail.
6. Il est intéressant de noter que, sans prendre en compte ces quatre problèmes les plus simples, l'écart de réussite entre nos deux groupes augmentent encore puisqu'il passe de 15 % à 18 %.

RÉSUMÉS

Cet article se propose d'évaluer l'efficacité d'un protocole d'aide à la résolution de problèmes arithmétiques à la fin du cycle primaire. L'apprentissage de schémas, qui représentent les différentes structures de problèmes tant additifs que multiplicatifs, contribue-t-il à améliorer de manière notable la performance des élèves ? Nous soulignons dans ce travail la complexité de cette question tout en apportant quelques éléments de réponse significatifs.

This paper is concerned with the efficiency of a program designed to help children to solve arithmetic problems at the end of primary school. Is it helpful for these pupils to learn first schemata representing different types of addition and multiplication problems ? Does this contribute to improving appreciably their performance ? In this paper we show how difficult it is to give an answer to this question by highlighting some significant elements for finding solutions.

INDEX

Mots-clés : Résolution de problèmes, schémas, champ conceptuel, structures additives, structures multiplicatives

Keywords : Problem solving, schemata, conceptual field, additive structures, multiplicative structures

AUTEUR

JEAN-PIERRE LEVAIN

est docteur en Psychologie du développement (université Paris V) et enseignant depuis une quinzaine d'année. Il est par ailleurs chargé de cours à la faculté de psychologie et chercheur à l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Université de Franche-Comté. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, U.F.R. des Sciences et Techniques, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex. Fax : 03 81 66 62 34.