Philosophia Scientiae

Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

25-1 | 2021

The Peano School: Logic, Epistemology and Didactics

Dedekinds *Sätze* und Peanos *Axiomata*

Reinhard Kahle

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2846>

DOI : 10.4000/philosophiascientiae.2846

ISSN : 1775-4283

Éditeur

Éditions Kimé

Édition imprimée

Date de publication : 25 février 2021

Pagination : 69-93

ISBN : 978-2-38072-000-6

ISSN : 1281-2463

Référence électronique

Reinhard Kahle, « Dedekinds *Sätze* und Peanos *Axiomata* », *Philosophia Scientiae* [En ligne], 25-1 | 2021, mis en ligne le 01 mars 2021, consulté le 03 novembre 2021. URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2846> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.2846>

Tous droits réservés

Dedekinds *Sätze* und Peanos *Axiomata*

Reinhard Kahle

Universität Tübingen (Deutschland) und
CMA, FCT, Universidade Nova de Lisboa (Portugal)

Résumé: Dans cet article nous entendons comprendre comment l'arithmétique de Peano a atteint la place qu'elle occupe aujourd'hui en mathématiques. Nous comparons tout d'abord les approches de Peano et de Dedekind, avant de mettre en avant le rôle de Hilbert et Bernays dans les développements ultérieurs de l'arithmétique de Peano.

Abstract: In this paper, we discuss the question how Peano's Arithmetic reached the place it occupies today in Mathematics. We compare Peano's approach with Dedekind's account of the subject. Then we highlight the role of Hilbert and Bernays in subsequent developments.

Propositiones, quae logicae operationibus a caeteris deducuntur,
sunt *theoremata*; quae vero non, *axiomata* vocavi.

[Peano 1889, iv]

1 Einleitung

Die *Peano-Arithmetik* ist die heute allgemein anerkannte axiomatische Grundlage der Arithmetik. Dabei handelt es sich allerdings nicht um die Originalformulierung von Peano [Peano 1889], sondern um eine Variante, die vor allem den metamathematischen Resultaten von Kurt Gödel Rechnung trägt. Modern gesprochen arbeitet Peano bei der Formulierung des Induktionsaxioms in einer *Logik zweiter Stufe*. Da eine solche Logik aber, wie wir aus Gödels Resultaten wissen, nicht (rekursiv) axiomatisierbar ist, ist es für den mathematischen Beweisbegriff geboten, sich auf die Logik erster Stufe zu beschränken. Damit müssen aber zumindest die elementaren zahlentheoretischen Funktionen der Addition und Multiplikation axiomatisch

hinzugenommen werden (während sie in Peanos Originalansatz noch definitiv eingeführt werden konnten).

In diesem Artikel wollen wir der Frage nachgehen, wie die Peano-Arithmetik ihre aktuelle Form erhielt und wie sie ihren Platz in der heutigen Mathematik gewinnen konnte. Auf der Basis der historischen Entwicklung zeichnen wir dabei die theoretisch notwendig gewordenen Modifikationen nach und betonen die Abgrenzung zu Dedekind, der kurz vor Peano in der Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen?* [Dedekind 1888] eine Begründung der Arithmetik vorgelegt hat, die Peano erst kurz vor der Veröffentlichung seiner Axiome vorlag.¹

Diese Verbindung zu Dedekind wird von einigen Autoren dazu benutzt, statt von den *Peano-Axiomen* von den *Dedekind-Peano-Axiomen* zu sprechen.² Tatsächlich muß man Dedekind zugestehen, daß er die *mathematischen* Sachverhalte, die den Axiomen zugrundeliegen, wohl sehr viel tiefer erkannt hatte als Peano. Wir wollen aber dafür argumentieren, daß es Peanos Verdienst ist, die Auszeichnung der charakterisierenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen in *Axiomen* herausgestellt zu haben, während Dedekind dezidiert diese „Axiome“ auf tiefliegende logische Prinzipien zurückführen wollte, so daß jene bei ihm zu *Sätzen* wurden.

Insofern wäre es wohl historisch angebracht, von den *Dedekind-Peano-Eigenschaften* der natürlichen Zahlen zu sprechen. Wenn man aber die spezifische Auszeichnung von *Axiomen* vor Augen hat, muß man die Bezeichnung *Peano-Axiome* nicht kritisieren. Dabei ist es nicht von Belang, ob man *Axiom* im traditionellen Sinne als *intuitiv wahre Aussage* versteht oder doch nur im modernen Sinne als *unbewiesene, an den Anfang einer Untersuchung gestellte, nicht hinterfragte Voraussetzung*; beide Lesarten sind mit Peanos Darstellung verträglich.

Eine eingehende Untersuchung der Geschichte der mathematischen Induktion findet man bei [Felgner 2012]. Wir setzen hier erst bei Dedekind und Peano an und betrachten vor allem die Unterschiede zwischen ihren Ansätzen. Anschließend beleuchten wir das weitere Schicksal der Peano-Axiome, insbesondere bei Hilbert und Bernays. Letztere können wohl dafür verantwortlich gemacht werden, daß die Peano-Arithmetik ihren heutigen ausgezeichneten Status gewinnen konnte.

1. Für die retrospektive Frage, wie Peano zu seinen Axiomen kam, können wir auf die detaillierte Ausarbeitung von Segre verweisen [Segre 1994], die sich bei der Beurteilung des Verhältnisses von Peano zu Dedekind wesentlich mit unserer Sichtweise deckt.

2. Siehe z.B. bei [Sieg & Morris 2018, B.2], aber auch schon, als „PEANO-DEDEKIND“, bei [Weyl 1928, 86]. Tapp schreibt: „In der historisch informierten Literatur hat sich daher auch schon eingebürgert, diese Axiome nach Dedekind und Peano zu benennen“ [Tapp 2013, 88].

2 Dedekind (zum ersten)

Richard Dedekind (1831–1916) veröffentlichte 1888 seine berühmte Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Dort wird in §6 die „Reihe der natürlichen Zahlen“ als „einfach unendliches System“ eingeführt. Wir wollen hier nicht näher auf die spezifische Terminologie von Dedekind eingehen, an die sich unmittelbar die Frage nach seiner Eingruppierung in die verschiedenen modernen mathematikphilosophischen Positionen anschließen würde.³ Der Begriff „System“ steht aber im Prinzip für das, was wir heute „Menge“ nennen.⁴ Es gibt noch weitere, auch notationelle Eigenheiten, die sich nicht weiter durchgesetzt haben. So entspricht „³“ der heutigen Teilmengenrelation „ $\subseteq$ “ und durch die durch den Index 0 bezeichnete Funktion erhält man aus der Menge A die „Kette des Systems A “ [Dedekind 1888, §44].⁵ Schließlich ist φ die Nachfolgerfunktion, die aber nicht nur auf einzelnen Zahlen, sondern allgemein auf Mengen operiert. Die Einführung der natürlichen Zahlen wird dann wie folgt gegeben:

71. *Erklärung.* Ein System N heißt *einfach unendlich*, wenn es eine solche ähnliche Abbildung φ von N in sich selbst gibt, daß N als Kette (44) eines Elementes erscheint, welches nicht in $\varphi(N)$ enthalten ist. Wir nennen dies Element, das wir im folgenden durch das Symbol 1 bezeichnen wollen, das *Grundelement* von N und sagen zugleich, das einfach unendliche System N sei durch diese Abbildung φ *geordnet*. Behalten wir die früheren bequemen Bezeichnungen für die Bilder und Ketten bei (§4), so besteht mithin das Wesen eines einfach unendlichen Systems N in der Existenz einer Abbildung φ von N und eines Elements 1, die den folgenden Bedingungen α , β , γ , δ genügen:

α . $N' \supset N$.

β . $N = 1_0$.

γ . Das Element 1 ist nicht in N' enthalten.

δ . Die Abbildung φ ist ähnlich.

3. Siehe dazu das Ende von §7 unten, insbesondere Fußnote 22.

4. Dedekind erwähnt zwar Bolzano und Cantor kurz in der Vorrede in Bezug auf seine Endlichkeitsdefinition, bedient sich aber nicht deren Namen *Menge* oder *Mannigfaltigkeit*.

5. Der Begriff der *Kette* wird gut in Zermelos Würdigung der Dedekindschen Arbeit erläutert, die er für Landaus Nachruf auf Dedekind verfaßt hat:

Bei jeder Abbildung eines Systems S auf einen (echten oder unechten) Teil S' von S gibt es „Ketten“, d. h. Teilsysteme K , welche gleichfalls in sich selbst abgebildet werden, und jeder beliebige Teil A von S läßt sich zu einer kleinsten Kette A_0 ergänzen, welche als Durchschnitt aller A umfassenden Ketten einfach als „die Kette von A “ bezeichnet wird. [Zermelo 2010, 298]

Die Rolle von φ als Nachfolgerfunktion und die damit einhergehende Einführung der $'$ -Notation⁶ wird wenig später wie folgt erläutert:

[U]nter $a, b \dots m, n \dots$ [werden] stets Elemente von N , also Zahlen, unter $A, B, C \dots$ Teile [modern gesprochen: Teilmengen] von N , unter $a', b' \dots m', n' \dots A', B', C' \dots$ die entsprechenden Bilder verstanden [...], welche durch die ordnende Abbildung φ erzeugt werden und stets wieder Element oder Teile von N sind; das Bild n' einer Zahl n wird auch die auf n folgende Zahl genannt.

Damit kann Dedekind nun den folgenden Satz *beweisen*:

80. *Satz der vollständigen Induktion* (Schluß von n auf n'). Um zu beweisen, daß ein Satz für alle Zahlen n einer Kette m_0 gilt, genügt zu zeigen,

ρ . daß er für $n = m$ gilt, und

σ . daß aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl n der Kette m_0 stets seine Gültigkeit auch für die folgende Zahl n' folgt.

3 Peano (zum ersten)

Giuseppe Peano (1858–1932) veröffentlichte [Peano 1889] seine Schrift *Arithmetices principia nova methodo exposita*. Abbildung 1 zeigt, wie die Axiome für die Arithmetik in §1 vorgestellt werden.

Zwei Jahre später legte Peano eine modifizierte Version vor (die in Abbildung 2 wiedergegeben ist und in der u.a. die sich auf die Gleichheit beziehenden Axiome nicht mehr zur Arithmetik gerechnet werden) [Peano 1891, 84].⁷

Gegenüber Dedekind fällt bei Peanos Darstellungen sofort auf, daß dieser sich einer formalen Notation bedient, die der heute geläufigen schon sehr nahe kommt. Diese Einführung formaler Notation war eine der Hauptmotivationen von Peano, und seine Verdienste um die moderne logico-mathematische Notation sind allgemein bekannt und müssen hier nicht gesondert gewürdigt werden.⁸

Den für uns wichtigen sachlichen Unterschied — die Einführung der arithmetischen Eigenschaften statt ihrer Herleitung aus übergeordneten Prinzipien — spricht Peano selbst aus:

6. Diese Notation hat sich bis heute gehalten; siehe dazu auch Fußnote 19.

7. Für eingehende Beschreibung der Entwicklung von Peanos Zahlbegriff, auch über die natürlichen Zahlen hinaus, siehe [Kennedy 1974b].

8. Siehe z.B. [Grattan-Guinness 2011], der weiter auf [Grattan-Guinness 2000, Kap. 2, 4 und 5] verweist, wobei das Kapitel 5 *Peano: the Formulary of Mathematics* besonders hervorzuheben ist.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus)*.

- $\succ 1 \succ$ *unitas.*
 $\succ a + 1 \succ$ *sequens a , sive a plus 1.*
 $\succ = \succ$ *est aequalis. Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.*

Axiomata.

1. $1 \in N$.
2. $a \in N \cdot \supset \cdot a = a$.
3. $a, b, c \in N \cdot \supset \cdot a = b \cdot = \cdot b = a$.
4. $a, b \in N \cdot \supset \cdot a = b \cdot b = c \cdot \supset \cdot a = c$.
5. $a = b \cdot b \in N \cdot \supset \cdot a \in N$.
6. $a \in N \cdot \supset \cdot a + 1 \in N$.
7. $a, b \in N \cdot \supset \cdot a = b \cdot = \cdot a + 1 = b + 1$.
8. $a \in N \cdot \supset \cdot a + 1 - = 1$.
9. $k \in K \cdot \therefore 1 \in k \cdot \therefore x \in N \cdot x \in k \cdot \supset \cdot x + 1 \in k \cdot \supset \cdot N \supset k$.

Abbildung 1

Fra quanto precede, e quanto dice il DEDEKIND, vi ha una contraddizione apparente, che conviene subito rilevare. Qui non si difinisce il numero, ma se ne enunciano le proprietà fondamentali. Invece il DEDEKIND definisce il numero, e precisamente chiama numero ciò che soddisfa alle condizioni predette. Evidentemente le due cose coincidono.⁹ [Peano 1891, 88]

9. „Wie Dedekind bemerkt, enthält das Vorhergehende einen scheinbaren [terminologischen] Widerspruch, den man sofort feststellen sollte. Hier wird nicht die Zahl definiert, sondern es werden ihre grundlegenden Eigenschaften formuliert. Dedekind hingegen definiert die Zahl; genauer [gesagt] nennt er Zahl, was die vorgenannten Bedingungen erfüllt. Offensichtlich stimmen die beiden Dinge überein.“ [Übersetzung von Peter Schuster].

Abbildung 2

4 Peano und Dedekind

In der Literatur ist es eine wiederkehrende Diskussion, ob:¹⁰

- Peano durch „[d]as Studium des Dedekindschen Essays auf eine Liste von ein paar Axiomen“ geführt wurde,¹¹ oder:
- Peano „unabhängig und in völliger Unkenntnis der Dedekindschen Veröffentlichung zu seiner Analysis der natürlichen Zahlen gekommen war“.¹²

Die Priorität von Dedekind ist unbestritten, und Peano schreibt selbst, daß ihm Dedekinds Arbeit vorlag.¹³

Ob Peano seine Axiome aus dem Studium der Dedekindschen Arbeit gewann oder schon vorher unabhängig gefunden hatte, ist wohl auch deshalb kontrovers, weil er sich selbst dazu widersprüchlich geäußert hat. Eine Bemerkung von Peano kann leicht als Argument für die erste Sichtweise gelesen werden (auch wenn sie eine unabhängige Entdeckung nicht ausschließt):

10. Siehe auch [Segre 1994, 292, für weitere Zitate insbesondere Fußnote 21]; die Liste ließe sich inzwischen weiter verlängern.

11. So [Felgner 2012, 41]. In ähnlicher Weise auch [van Heijenoort 1967, 83], u.a.

12. So sein Biograph [Kennedy 1974a, 15], aber auch [von Plato 2019] u.a.

13. „Utilius quoque mihi fuit recens scriptum: R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen*; Braunschweig, 1888, in quo quaestiones, quae ad numerorum fundamenta pertinent, acute examinantur“ [Peano 1889, v].

Le proposizioni primitive che precedono sono dovute al DEDEKIND, [Dedekind 1888, n. 71]; [...].¹⁴ [Peano 1891, 86]

Später hat Peano explizit die zweite Auffassung zu Protokoll gegeben:

La composizione del mio lavoro a. 1889 fu ancora indipendente dallo scritto menzionato del Dedekind ; prima della stampa, ebbi la prova morale dell'indipendenza delle proposizioni primitive da cui io partivo, nella loro coincidenza sostanziale colle definizioni del Dedekind.¹⁵ [Peano, 1896–1899 1898, 243]

Für eine unabhängige Entdeckung der charakterisierenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen seitens Peano spricht aus unserer Sicht, daß sich seine Axiome nicht unmittelbar mit denen von Dedekind identifizieren lassen. Die notwendige „Übersetzung“ bedarf eines gewissen Aufwandes.¹⁶ Hätte Peano diesen Aufwand vor der Niederschrift seiner Arbeit betrieben, denn hätte er sich wahrscheinlich auch des komfortablen Rekursionstheorems von Dedekind bedient.

Letztlich ist es müßig, ohne zusätzlich Quellen über den genauen historischen Hergang zu spekulieren.¹⁷ Und für die uns interessierende Frage des Unterschieds, ob die charakterisierenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen als Axiome oder Sätze aufgefaßt wurden, spielt es keine Rolle, ob Peano bei der Formulierung direkt auf Dedekind zurückgriff oder nicht; der Unterschied der Auffassungen besteht unabhängig davon.

5 Dedekind (zum zweiten)

Bei Dedekind werden die charakteristischen Eigenschaften der natürlichen Zahlen nicht axiomatisch gegeben, sondern ergeben sich definitorisch innerhalb seiner informellen Mengenlehre. Tatsächlich verfolgt er ein *logizistisches Programm* für die Arithmetik, wobei die — nicht formal eingeführte — Mengenlehre als Teil der Logik betrachtet wird. Der Dedekindsche Logizismus wird von ihm in den Eröffnungsworten des Vorworts eindeutig zum Ausdruck gebracht:

14. „Die vorhergehenden grundlegenden Sätze sind Dedekind zuzuschreiben [...]“. [Übersetzung von Peter Schuster].

15. „Die Erstellung meiner Arbeit von 1889 war noch unabhängig von der von Dedekind erwähnten Schrift; vor Drucklegung hatte ich den moralischen Beweis, daß die grundlegenden Sätze, von denen ich ausging, unabhängig waren, in ihrer wesentlichen Übereinstimmung mit Dedekinds Definitionen.“

16. Tapp gibt eine solche in zwei Zwischenschritten, die aus unserer Sicht — und entgegen der Intention des Autors — die *Unähnlichkeit* der beiden Formulierungen deutlich hervortreten lassen [Tapp 2013, 87].

17. Segre bezeichnet die Frage nach der Priorität als „hoary and unimportant“ [Segre 1994, 292].

Was beweisbar ist, soll in den Wissenschaften nicht ohne Beweis geglaubt werden. So einleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei der Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Teils der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt, auch nach den neuesten Darstellungen noch keineswegs als erfüllt anzusehen. [Ich [nenne] die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik [...]. [Dedekind 1932, 335]

Die Idee eines rein axiomatischen Aufbaus der natürlichen Zahlen, wie er von Peano gegeben wird, ist mit diesem Anliegen unverträglich.

Wie gesagt, kommt der Logizismus Dedekinds in einem mengentheoretischen Gewand daher. Wir müssen hier nicht der Frage nachgehen, ob Dedekinds Mengenlehre tatsächlich einen rein logischen Charakter hat; Hilbert wird dies später verneinen (siehe unten § 9). Als viel schlimmer hat sich herausgestellt, daß diese Mengenlehre im Prinzip den bekannten mengentheoretischen Paradoxien, wie z. B. Russells Paradoxon, ausgesetzt ist. Dedekind ist sich dieser Problematik in den 1890er Jahren bewußt geworden und hat lange mit der Herausgabe der dritten Auflage gezögert; als er dieser 1911 schließlich zustimmte, schrieb er im Vorwort:

Als ich vor etwa acht Jahren aufgefordert wurde, die damals schon vergriffene zweite Auflage dieser Schrift durch eine dritte zu ersetzen, trug ich Bedenken, darauf einzugehen, weil inzwischen sich Zweifel an der Sicherheit wichtiger Grundlagen meiner Auffassung geltend gemacht hatten. Die Bedeutung und teilweise Berechtigung dieser Zweifel erkenne ich auch heute nicht. Aber mein Vertrauen in die innere Harmonie unserer Logik ist dadurch nicht erschüttert; ich glaube, daß eine strenge Untersuchung der Schöpferkraft des Geistes, aus bestimmten Elementen ein neues Bestimmtes, ihr System zu erschaffen, das notwendig von jedem dieser Elemente verschieden ist, gewiß dazu führen wird, die Grundlagen meiner Schrift einwandfrei zu gestalten. [Dedekind 1932, 343]

Aus moderner Perspektive läßt sich dazu sagen, daß Dedekind insoweit Recht hat, als sich die „Grundlagen“ — vor allem aber auch die mathematischen Resultate — seiner Schrift innerhalb einer axiomatischen Mengenlehre, wie z. B. der von Zermelo, einwandfrei entwickeln lassen. Die logizistische Grundüberzeugung Dedekinds, nach der die Logik alleine (wie sie auch immer genau abgegrenzt sein sollte) als Grundlage seiner Resultate dienen kann, ist aber nicht mehr zu retten.

6 Peano (zum zweiten)

Peanos Ansatz, die Arithmetik auf — modern gesprochen — *nicht-logische Axiome* aufzubauen, ist grundlagentheoretisch unproblematisch und hat sich, der Idee nach, heute durchgesetzt.

Allerdings darf man nicht übersehen, daß auch Peanos Axiomatisierung, so wie sie von ihm 1889 und 1891 gegeben wurde, eine problematische Mengenlehre zugrunde liegt. Axiom 9 (1889) bzw. Axiom 5 (1891) benutzt, so wie es formuliert ist, mit K offensichtlich eine Allmenge. Da Peano keine formalen Mengenbildungsoperationen angibt, kann man ihm wohl nicht direkt einen Widerspruch durch die Formalisierung des Cantorschen Paradoxons über die Menge aller Mengen nachweisen; aber eine genaue Abgrenzung der Formelklasse, für die vollständige Induktion zur Verfügung steht, bleibt zumindest offen. Wie auch immer die genaue Abgrenzung der Eigenschaften auszusehen hat, sie erlaubt zumindest *zweistufige* Eigenschaften, so daß sich die arithmetischen Operationen der Addition und Multiplikation definieren lassen.¹⁸

Im Gegensatz zu Dedekind war sich Peano aber des nicht-logischen Charakters seiner Axiome bewußt, was durch die Einführung der Symbole N , 1 , und $a + 1$ (bzw. $a +$)¹⁹ in den *Explicationes* (1889) bzw. den vorangestellten Sätzen (1891) deutlich wird. Diese sind nicht, wie bei Dedekind, durch Definitionen in einer übergeordneten Theorie gegeben. Die Notwendigkeit einer solchen Hinzunahme nicht-logischer Zeichen spricht Peano explizit aus:

18. Dabei kann sich Peano auf Graßmann stützen:

In arithmeticae demonstrationibus usus sum libro: H. GRASSMANN,
Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1891. [Peano 1889, v]

19. Das Problem der Bezeichnung der Nachfolgerfunktion und deren Kollision mit der (zweistelligen) Addition wurde von Bernays zum Ausdruck gebracht:

Der Fortschreitungsprozeß pflegt in der Mathematik durch „+1“ angegeben zu werden. Diese Bezeichnungsweise hat jedoch den Mangel, daß der begriffliche Unterschied zwischen der Auffassung von „ $a + 1$ “ als der auf a folgenden Zahl und andererseits der Summe von a und 1 nicht zur Darstellung gelangt. [Hilbert & Bernays 1934, 219, Fußnote 1]

Bernays bedient sich daher der auch schon bei Dedekind verwendeten Schreibweise a' für den Nachfolger von a .

Leonard Nelson zum Beispiel hat den begrifflichen Unterschied bei der unterschiedlichen Verwendung des $+$ Zeichens nicht gesehen:

Hieran scheitert z.B. auch der Versuch, das oben genannte GRASSMANNsche Axiom als Definition der Addition aufzufassen. [... wir müßten,] um den Sinn des $+$ Zeichens auf der linken Seite der Gleichung durch die rechte Seite zu erklären, bereits die Bedeutung kennen [...], die es auf der rechten Seite hat [...]. [Nelson 1905-1906, 43]

Puto vero his tantum logicae signis propositiones cuiuslibet scientiae exprimi posse, *dummodo adiungantur signa quae entia huius scientias representant*. [Peano 1889, v, unsere Hervorhebung]

7 Dedekind (zum dritten)

Wenn wir bis hierher die Verdienste Peanos für die Herausarbeitung der Axiome der Arithmetik als nicht-logische Komponenten gegenüber Dedekind hervorgehoben haben, müssen wir aber noch hinzufügen, daß die *mathematische* Analyse der Grundlagen der Arithmetik bei Dedekind sehr viel tiefer geht als bei Peano.

Zuerst hat Dedekind ein allgemeines Rekursionsschema zur Einführung von Funktionen bewiesen, das bei Peano fehlt [Dedekind 1888, Satz 126].²⁰

Darüberhinaus beweist Dedekind die *Kategorizität* seiner Charakterisierung:

132. *Satz.* Alle einfach unendlichen Systeme sind der Zahlenreihe N und folglich (nach 33) auch einander ähnlich.
[Dedekind 1932, 376]

Dieses Resultat kann vielleicht als das mathematisch tiefste der Dedekindschen Abhandlung betrachtet werden. Es hat so keine Entsprechung bei Peano (der dazu überhaupt erst eine Theorie der Semantik seines Axiomensystems hätte entwickeln müssen) und sein Fehlen hat zu einem aus unserer Sicht tiefgreifenden Mißverständnis des axiomatischen Ansatzes bei Russell geführt (siehe unten § 8).

Schließlich hatte Dedekind aber auch die Notwendigkeit der zweitstufigen Formulierung der vollständigen Induktion erfaßt, wie aus den Ausführungen in seinem Brief an Keferstein deutlich wird.²¹ Dabei hatte er insbesondere schon die Konstruktion von heute sogenannten *Nichtstandardmodellen* der (erststufigen) Peano-Arithmetik vor Augen [siehe Kahle 2017]. Bei Peano finden sich keine Anhaltspunkte, daß er bei der Formulierung seiner Axiome vergleichbare Analysen vorgenommen haben könnte.

Felgner rekonstruiert Dedekinds Vorgehensweise in algebraischer Begrifflichkeit:

20. Van Heijenoort schreibt dazu in seiner Einführung zur englischen Übersetzung von [Peano 1889]:

[Peano] proves for addition a theorem [...] and a similar theorem [...] for multiplication; but these theorems are far from having the same effect as Dedekind's Theorem 126. [van Heijenoort 1967, 84]

21. Dieser Brief findet sich in englischer Übersetzung in der Textsammlung von van Heijenoort [van Heijenoort 1967]; eine kritische Edition wurde von Tapp [Tapp 2017] besorgt.

[Die Grundidee des Beweises von Dedekind] kommt aus der Algebra. Wenn Φ eine Eigenschaft ist, die der Zahl 0 zukommt und mit einer Zahl n auch ihrem Nachfolger $n + 1$, dann ist die Menge $E = \{n; n \in \mathbb{N} \ \& \ \Phi(n)\}$ unter der Nachfolger-Operation abgeschlossen und ist also (algebraisch gesehen) eine Substruktur der Halbgruppe $\langle \mathbb{N}, \nu \rangle$, wenn ν die 1-stellige Nachfolger-Funktion ist: $\nu(x) = x + 1$. Um $E = \mathbb{N}$ zu beweisen, muß man also „nur“ zeigen, daß $E = \mathbb{N}$ überhaupt keine echten Substrukturen, die die 0 enthalten, besitzt. (Aus algebraischer Sicht ist dies genau die Aussage des Prinzips der vollständigen Induktion.) [Felgner 2012, 38f]

Vor diesem Hintergrund ist man geneigt, Dedekinds Analyse weniger dem Logizismus zuzurechnen, als vielmehr dem *Strukturalismus*. Der Strukturalismus, wie er in der Mathematik vor allem durch Bourbaki propagiert wurde, hat seine Grundlagen ohne Zweifel in Dedekinds algebraischen Arbeiten, die später von Emmy Noether weiter entwickelt wurden. Insbesondere Sieg weist darauf hin, daß auch schon Dedekinds Behandlung der Arithmetik in diesem Kontext gesehen werden muß [Sieg & Morris 2018].²²

8 Russell, Couturat, nochmal Russell und auch Gödel

Peanos axiomatischer Ansatz wurde natürlich von ihm selbst und seiner Schule weitergeführt.²³

Wie sich die Peano-Arithmetik zur heutigen Standardtheorie entwickeln konnte, scheint aber eine vergleichsweise unklare Geschichte zu sein.

Oft wurden Peanos Axiome als eine Art *Lemmata* behandelt, die zwar die charakteristischen Eigenschaften der natürlichen Zahlen durchaus erschöpfend zusammenstellen, aber eben nicht den Charakter von eigenständigen Axiomen haben, sondern letztlich für passend definierte logische Ausdrücke *bewiesen* werden sollen. Dieses Verständnis entspricht im wesentlichen dem von Dedekind, allerdings wird — Russell folgend — häufig auf Freges Definition der

22. Es ließe sich hier noch eine eingehende Debatte um das Verständnis von Dedekinds Ansatz anschließen, auf die wir verzichten müssen. Einen guten Überblick zum aktuellen Stand der Diskussion gibt [Reck 2017]. Für die Beziehung von Dedekind zu Peano können wir noch spezifisch auf [Ferreirós in Vorbereitung] verweisen, der auch die beiden zentralen Artikel in einen historischen Vergleich zueinander gesetzt hat [Ferreirós 2005].

23. Dabei kam Peano auch z. B. zur Überzeugung, daß es besser sei, die Zahlenreihe mit 0 statt mit 1 beginnen zu lassen. Als Beispiel für weitergehende Arbeiten können wir auch auf [Padoa 1902] verweisen.

Zahlen zurückgegriffen.²⁴ Bei diesen *logizistischen* Ansätzen sehen die Autoren insbesondere die Mengenlehre, sofern sie von ihr Gebrauch machen, als einen Teil der Logik an.

Eine erste derartige Behandlung der Peano-Axiome findet sich in Russells *The Principles of Mathematics* [Russell 1903]. Dort wird Peanos Axiomatik in Kapitel XIV äußerst kritisch behandelt. Russell gibt zwar die Peano-Axiome an, hat aber das erklärte Ziel, die nicht-logischen Zeichen durch logisch definierte zu ersetzen. Unter Benutzung der Zahldefinition von Frege will er gezeigt haben, daß für diese Zahlen die „Axiome“ erfüllt sind und kommt zur Konklusion:

There is, therefore, from the mathematical standpoint, no need whatever of new indefinables or indemonstrables in the whole of Arithmetic and Analysis. [Russell 1903, § 123]

Der Titel unserer Arbeit könnte aber von Russell übernommen sein, wenn er schreibt:

Dedekind *proves* mathematical induction, while Peano regards it as an axiom. [Russell 1903, § 241]

Im anschließenden Satz bescheinigt er deshalb Dedekind „an apparent superiority“. Heute sehen wir das genau umgekehrt.

Couturat hatte es sich in seinem Buch *Les Principes des mathématiques* [Couturat 1905] zur Aufgabe gemacht, eine Darstellung von Russells *Principles* zu geben, die dann um „eine Analyse der meisten Arbeiten der mathematischen Zeitgenossen bezüglich derselben Frage“ [Couturat 1908, viii] erweitert wurde. In Kapitel II, § B werden Peanos Axiome zur Einführung der natürlichen Zahlen als eine „sog. *Definition mittels Postulaten*“ vorgestellt. Doch der Status dieser Art der Definition wird im Zusammenhang mit der von [Padoa 1902] vorgenommenen Reduktion der nicht-logischen Konstanten ausdrücklich in Zweifel gezogen:

Diese Vervollkommnung der Grundlagen der Arithmetik hat gleichwohl keine so grundlegende Bedeutung, wie man glauben könnte. Sie hätte sie sicherlich, wenn man kein anderes Mittel zur Begründung der Arithmetik besäße als ihre Stützung durch irgend welche Grundbegriffe und Postulate; sie hat jene Bedeutung nicht mehr, sobald man das eine oder andere System von Postulaten aus einer ausdrücklichen Definition der ganzen Zahl herleiten kann, wie dies H. Russell gezeigt hat. Denn dann sind weder die Grundbegriffe wahrhaftig undefinierbar, noch die Grundsätze unbeweisbar, und infolgedessen hat es keine so große Bedeutung mehr, daß ihre Anzahl auf ein Minimum reduziert werde. [Couturat 1908, 60]

24. Eine eingehende Behandlung der Einflüsse Freges kann hier nicht gegeben werden, wir können aber auf [Gillies 1982] verweisen.

Anschließend wird die Russell zugerechnete und auf Frege zurückgehende Definition der Zahlen in mengentheoretischer Sprache gegeben mit der Konklusion:

Diese Definition setzt, wie man sieht, den Sinn fest, den man den drei undefinierbaren Symbolen beizulegen hat und zwar in rein logischen Ausdrücken. Nunmehr hört die Definition der ganzen Zahlen auf, an drei von den logischen Konstanten unabhängige Grundbegriffe gebunden zu sein; sie reduziert sich auf eine Nominaldefinition, die keine anderen undefinierbaren Begriffe außer den logischen Konstanten enthält. Dadurch ist die Anknüpfung der Arithmetik an die Logik vollendet ohne *Hinzunahme* irgend eines neuen Grundbegriffes. [Couturat 1908, 62]

In der *Introduction to Mathematical Philosophy* von 1919 hat Russell Peano eine positivere Darstellung zukommen lassen als noch 1903. Bei der Einführung der natürlichen Zahlen schreibt er:

Having reduced all traditional pure mathematics to the theory of the natural numbers, the next step in logical analysis was to reduce this theory itself to the smallest set of premises and undefined terms from which it could be derived. This work was accomplished by Peano. [Russell 1919, 5]

Nach einer eingehenden Behandlung der Peanoschen Axiome bleibt er aber bei seiner kritischen Haltung, daß die nicht-logischen Symbole noch auf der Grundlage des Fregeschen Zahlbegriffs durch definierte „logische“ Ausdrücke ersetzt werden können, so daß die Axiome zu beweisbaren Sätzen werden:

It is time now to turn to the considerations which make it necessary to advance beyond the standpoint of Peano, who represents the last perfection of the “arithmetisation” of mathematics, to that of Frege, who first succeeded in “logicising” mathematics, *i.e.*, in reducing to logic the arithmetical notions which his predecessors had shown to be sufficient for mathematics. [Russell 1919, 6f.]

Diese Sichtweise konnte sich sogar noch bis zu Kurt Gödel halten. Als er 1931 seine epochale Arbeit zur prinzipiellen Unvollständigkeit rekursiver Axiomatisierungen der Arithmetik veröffentlichte, bezog er sich formal auf Whitehead und Russells *Principia Mathematica* [Whitehead & Russell 1910-1913] aber mit Rückgriff auf Peano:

P ist im wesentlichen das System, welches man erhält, wenn man die Peanoschen Axiome mit der Logik der PM^{16} überbaut. [Gödel 1931, 176]

Die Fußnote 16 zur Logik der *Principia Mathematica* stellt dann aber klar, daß auch Gödel eine logizistische Einführung der Zahlen für ausreichend hält:

Die Hinzufügung der Peanoschen Axiome [...] dien[t] lediglich zur Vereinfachung des Beweises und [ist] prinzipiell entbehrlich.

Bei Russell (und mit ihm auch Couturat) ist noch interessant, daß er Peano dafür kritisiert, daß dessen Axiome unterschiedliche Interpretationen zulassen.²⁵ Wenn Russell eine solche Kritik auch auf Dedekind ausdehnt [Russell 1903, chap. XXX], zeigt das in erster Linie, daß er die tiefere Bedeutung von Dedekinds Kategorizitätsresultat nicht adäquat erfaßt hat.

Hier kann man durchaus ein grundsätzliches philosophisches Problem im Verständnis der natürlichen Zahlen sehen, das bis heute nachwirkt. Carl Siegel hatte im Vorwort zu seiner deutschen Übersetzung von [Couturat 1905] zur Unterscheidung von Arithmetik (als einer auf die Logik zu gründende Theorie) zur Geometrie (als einer nicht-logischer Elemente bedürftigen Theorie) bemerkt:

Die Axiome der Arithmetik lassen sich von den rein logischen Grundsätzen herleiten, die der Geometrie dagegen nicht. Die Tatsache, daß es nur *eine* Arithmetik, aber *mehrere* (logisch gleich mögliche) Geometrien gibt, beweist das eben Gesagte schlagend. [Couturat 1908, vi]

Unser modernes Verständnis einer Axiomatik läßt zumindest im Prinzip immer unterschiedliche Interpretationen zu. Dieses Verständnis wurde ganz wesentlich von Hilbert geprägt, der es von der Geometrie auf beliebige Axiomensysteme ausgedehnt hat. Und dabei läßt sich unmittelbar auf Peanos Axiomatisierung zurückgreifen, auch wenn das bei Hilbert nicht explizit herausgestellt ist.

9 Hilbert

David Hilbert (1862–1943) hat zusammen mit seiner Schule in den 1920er Jahren die mathematische Logik im wesentlichen so herausgearbeitet, wie wir sie heute kennen.²⁶ Ausgehend von seiner bahnbrechenden Neuaxiomatisierung

25. 1919 hat er das in den folgenden Worten ausgedrückt:

In Peano's system there is nothing to enable us to distinguish between these different interpretations of his primitive ideas. [...]

This point, that „0“ and „number“ and „successor“ cannot be defined by means of Peano's five axioms, but must be independently understood, is important. We want our numbers not merely to verify mathematical formulæ, but to apply in the right way to common objects. [Russell 1919, 9]

Besonders der letzte Satz steht der späteren Hilbertschen Auffassung entgegen, die sich in gewissem Sinne in der Mathematik durchgesetzt hat.

26. Im Prinzip kamen später lediglich die Beschränkung auf Logik erster Stufe, vor allem von Skolem gefordert, hinzu [siehe Moore 1988] sowie der scharf abgegrenzte

der euklidischen Geometrie hat er nach der Reduktion dieser auf die Arithmetik — und wir müssen hinzusetzen: Arithmetik zweiter Stufe, was für Hilbert seinerzeit eine natürliche Auffassung war — erkannt, daß eben diese Arithmetik einer Axiomatisierung bedarf. Eine solche Axiomatisierung gibt zu neuen grundagentheoretischen Fragestellungen Anlaß. Die wichtigste dieser Fragestellungen war das *zweite Hilbertsche Problem* in der berühmten Liste von Problemen, die Hilbert auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Paris vorgestellt hat; weitere Fragestellungen wurden in dem programmatischen Vortrag *Axiomatisches Denken* [Hilbert 1918] aufgeworfen, den Hilbert 1917 vor der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft hielt. Die Durchdringung des hinter diesen Fragestellungen liegenden logischen und mathematischen Feldes, das nicht zuletzt durch die Hilbertsche Beweistheorie abgegrenzt werden kann, hat schließlich zu unserem modernen Verständnis von mathematischer Logik geführt.²⁷

Das zweite Hilbertsche Problem trägt den Titel *Die Widerspruchlosigkeit der arithmetischen Axiome*, wobei es aber ausdrücklich um die Konsistenz einer Axiomatik der *reellen* Zahlen geht (da, wie gesagt, Hilbert die Arithmetik zweistufig aufgefaßt hat). Eine solche Axiomatik hatte Hilbert im Jahr zuvor in seinem Aufsatz *Über den Zahlbegriff* [Hilbert 1900] gegeben. Dabei ging es ihm neben der konkreten Axiomatik auch darum, die axiomatische Methode als solche (und in ihrem modernen Verständnis) der von ihm sogenannten genetischen Methode²⁸ gegenüberzustellen. Er schreibt:

Meine Meinung ist diese: *Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug.* [Hilbert 1900, 181]

Dem Beispiel seiner Axiomatisierung der Geometrie folgend beginnt er anschließend die Auflistung seiner Axiome mit den Worten:

Begriff einer Semantik, eingeführt von Tarski. Bei Hilbert selbst darf man die heute übliche Beschränkung auf Logik erster Stufe aber noch nicht voraussetzen, siehe [Kahle 2019].

27. Man muß sich darüber im Klaren sein, daß Hilbert eine wechselvolle Entwicklung durchgemacht hat, bevor er zu der schließlich in [Hilbert & Bernays 1934, 1939] niedergelegten Form der Beweistheorie kam. Hier ist nicht der Platz, diese Entwicklungen detaillierter nachzuzeichnen, wir können aber auf entsprechenden Arbeiten von Sieg verweisen [Sieg 1999, 2013].

28. „Ausgehend von dem Begriff der Zahl 1, denkt man sich gewöhnlich durch den Prozeß des Zählens zunächst die weiteren ganzen rationalen positiven Zahlen 2, 3, 4, ... entstanden und ihre Rechengesetze entwickelt; sodann gelangt man durch die Forderung der allgemeinen Ausführung der Subtraktion zur negativen Zahl; [usw. bis zu den reellen Zahlen als Schnitt oder Fundamentalarreihe]. Wir können diese Methode der Einführung des Zahlbegriffs die *genetische Methode* nennen, weil der allgemeinste Begriff der reellen Zahl durch sukzessive Erweiterung des einfachen Zahlbegriffs *erzeugt* wird.“ [Hilbert 1900, 180].

Wir denken ein System von Dingen; wir nennen diese Dinge Zahlen und bezeichnen sie mit $a, b, c, \dots$. Wir denken diese Zahlen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die folgenden Axiome geschieht. [Hilbert 1900, 181]

Jetzt folgen nicht die Peanoschen Axiome für die Arithmetik der natürlichen Zahlen, sondern eine Axiomatik für die reellen Zahlen. Mit den reellen Zahlen hatte Hilbert einen sehr viel problematischeren Gegenstandsbereich vor sich, als wenn man nur die natürlichen Zahlen betrachtet. Insbesondere ergibt sich dabei schon die Frage nach dem Status aktual unendlicher Mengen; zudem führt Hilbert auch sein umstrittenes *Axiom der Vollständigkeit* ein. Allerdings bedurfte es der Resultate von Kurt Gödel, um formal zu zeigen, daß die reellen Zahlen — in einer erststufigen Axiomatisierung — prinzipiell nicht auf die natürlichen Zahlen zurückführbar sind, bzw. daß eine zweitstufige „Axiomatisierung“ bereits für den rein logischen Teil nicht mehr rekursiv sein kann.

Wenn man vom Vollständigkeitsaxiom absieht, ist die Charakteristik der Hilbertschen Axiomatik aber kaum von der Peanos zu unterscheiden. Insbesondere erlauben Hilberts Ausführungen keinesfalls, ihn hier in eine Reihe mit Dedekind, Frege, Russell und Couturat zu stellen, soweit man deren logizistischen Anspruch, die Zahlen durch logische Definitionen einzuführen, herausstellt.

In seinem Beitrag zum Internationalen Mathematikerkongreß 1904 in Heidelberg (*Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, [Hilbert 1905]) hat Hilbert eine erste rudimentäre Idee seiner später entwickelten Beweistheorie gegeben. Dabei werden Frege und Dedekind kurz behandelt²⁹ und auch Cantor, dessen Mengenlehre aber auch nicht ausreichende Sicherheit gewährte.³⁰ Der Logizismus, wie er sich 1904 darstellte, wird schließlich explizit verworfen, wenn Hilbert schreibt:

Man bezeichnet wohl die Arithmetik als einen Teil der Logik und setzt meist bei der Begründung der Arithmetik die hergebrachten logischen Grundbegriffe voraus. Allein bei aufmerksamer Betrachtung werden wir gewahr, daß bei der hergebrachten Darstellung der Logik gewisse arithmetische Grundbegriffe, z. B. der Begriff der Menge, zum Teil auch der Begriff der

29. Freges Ansatz wird dabei wegen der Russellschen Antinomie verworfen; ebenso Dedekind „wegen des unvermeidlichen Widerspruchs des [bei ihm] zur Verwendung kommenden Begriffs der Gesamtheit aller Dinge“ [Hilbert 1905, 249].

30. „G. CANTOR hat den genannten Widerspruch [bei Dedekind] empfunden und diesem Empfinden dadurch Ausdruck verliehen, daß er ‚konsistente‘ und ‚nichtkonsistente‘ Mengen unterscheidet. Indem er aber, meiner Meinung nach, für diese Unterscheidung kein scharfes Kriterium aufstellt, muß ich seine Auffassung über diesen Punkt als eine solche bezeichnen, die dem *subjektiven* Ermessen noch Spielraum läßt und daher keine objektive Sicherheit gewährt“ [Hilbert 1905, 249].

Zahl, insbesondere der Anzahl, bereits zur Verwendung kommen.
[Hilbert 1905, 250]

Hilbert hat den 1904 skizzierten Ansatz zur Beweistheorie erst einmal beiseitegelegt (wohl auf Grund der Kritik Poincaré's an der vermeintlichen Zirkularität einer beweistheoretischen Begründung der Induktion).³¹ Stattdessen trat er nach der Veröffentlichung der *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell [Whitehead & Russell 1910-1913] selbst in eine „logizistische Phase“ ein.³² Dabei wurden die *Principia Mathematica* einer eingehenden Prüfung unterzogen, insbesondere in der Dissertation seines Doktoranden Heinrich Behmann. Letztlich sah er aber auch Whitehead und Russells Ansatz als gescheitert an und drückte das 1920 in einer seiner Vorlesungen deutlich aus [Hilbert 1920, 33].³³

Das Ziel, die Mengenlehre und damit die gebräuchlichen Methoden der Analysis auf die Logik zurückzuführen, ist heute nicht erreicht und ist vielleicht überhaupt nicht erreichbar.

Dennoch — und das durchaus überraschend — findet sich im Lehrbuch von Hilbert und Ackermann *Grundlagen der theoretischen Logik* eine Einführung des Zahlbegriffs auf der Grundlage der Fregeschen Definition und eine eindeutige Übernahme des Russellschen Standpunkts von 1903/1919, wobei lediglich das Unendlichkeitsaxiom bemängelt wird:

Von besonderem Interesse ist auch, wie unter Zugrundelegung der logischen Einführung des Anzahlbegriffs und allerdings wesentlichlicher Benutzung des genannten Axioms der Unendlichkeit die zahlentheoretischen Axiome zu logischen, beweisbaren Sätzen werden. [Hilbert & Ackermann 1928, 88]

In einer Fußnote wird dabei auf die deutsche Übersetzung von Russells *Einführung in die mathematische Logik* [Russell 1923] verwiesen. Die zahlentheoretischen Axiome werden von Hilbert und Ackermann aber überhaupt

31. Hier sollten wir bemerken, daß es neben der logizistischen und der (später so charakterisierten) formalistischen Auffassung der Induktion im Rahmen einer Axiomatik noch die auf (Kronecker und) Poincaré zurückgehende und durch Brouwer und Weyl aufgegriffene heute *intuitionistisch* zu nennende Auffassung der Induktion als Prinzip des „inhaltlichen *mathematischen* Denkens“ [Weyl 1928, 86] gibt. Diese Auffassung steht der Hilbertschen nicht notwendig entgegen; sie wird von ihm in der Beweistheorie sogar ausdrücklich als Grundlage des *metamathematischen* Schließens herangezogen. Eine eingehende Auseinandersetzung mit diesem Problemkreis, der keinen unmittelbaren Bezug zu Dedekind und Peano mehr hat, geht aber über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

32. Siehe [Kahle 2013] und auch z. B. [Tapp 2013, § 4.1.4 Hilberts Logizismus].

33. Das Zitat findet sich veröffentlicht in [Hilbert 2013, 363]. In einem Vortrag, den Hilbert 1927 in Hamburg hielt, gibt er seinen inzwischen verabsolutierten Anti-Logizismus wie folgt wieder:

Die Mathematik wie jede andere Wissenschaft kann nie durch Logik allein begründet werden. [Hilbert 1928, 65]

nicht angegeben und dementsprechend fehlt auch jeglicher Hinweis auf Peano.³⁴

Tatsächlich finden sich in Hilberts Veröffentlichungen³⁵ keine expliziten Referenzen auf Peanos Axiomatisierung der natürlichen Zahlen.³⁶ Es gibt aber einen — für uns zentralen — Verweis auf Peano in einer unveröffentlichten Mitschrift zu der 1917 von Hilbert gehaltenen Vorlesung über *Mengenlehre*:

Peano [konnte] die bei Dedekind verborgenen Axiome ans Licht ziehen und an die Spitze seiner Begründung der Theorie der ganzen Zahlen stellen. [...]

Die ganzen Zahlen nehmen also tatsächlich in der Mathematik eine Sonderstellung ein; und wenn wir die Axiome derselben noch weiter begründen wollen durch Zurückführung auf die Gesetze der Logik selbst, so stehen wir vor einem der schwierigsten Probleme der Mathematik überhaupt.

Wenn wir uns also jetzt auf den Peanoschen Standpunkt stellen, d. h. wenn wir Axiome der Arithmetik aufstellen, aber d. h. auf eine weitere Zurückführung derselben verzichten und die gewöhnlichen Gesetze der Logik ungeprüft übernehmen, so müssen wir uns bewusst sein, dass wir dadurch die Schwierigkeiten einer ersten philosophisch-erkenntnistheoretischen Begründung nicht überwunden, sondern nur kurz abgeschnitten haben. [Hilbert 1917, 145f.], zitiert nach [Hilbert 2013, 33f., Fußnoten 5 und 6]

Hilbert kritisiert hier im Jahr 1917 Peanos Standpunkt dahingehend, daß die „philosophisch-erkenntnistheoretischen Begründung“ lediglich „abgeschnitten“ worden sei. Nachdem sich Hilbert aber spätestens seit 1920 zu einer Aufgabe des logizistischen Programms genötigt sah, ist es genau dieses „Abschneiden“ der — überzogenen oder zumindest nicht erfüllbaren — philosophischen Begründungsansprüche, das der Axiomatik in der Mathematik zu ihrem durchgreifenden Erfolg verholfen hat.

34. Erst in der vierten Auflage von [Hilbert & Ackermann 1958] hat Ackermann die Peano-Axiome explizit diskutiert, dann aber schon mit dem erststufigen Induktionsschema (womit sie als Beispiel einer nicht mehr endlich axiomatisierten Theorie dienen). Auch wird auf die Notwendigkeit hingewiesen, „noch rekursive Definitionen für zahlentheoretische Funktionen“ hinzunehmen zu müssen. Die Fregesche Anzahldefinition und der Hinweis, daß sich damit „die zahlentheoretischen Axiome [...] logisch beweisen lassen“, wurden aber beibehalten [Hilbert & Ackermann 1958, 152].

35. Das unten noch zu nennende zweibändige Werk *Grundlagen der Mathematik* [Hilbert & Bernays 1934, 1939] muß man natürlich Bernays alleine zurechnen.

36. Man kann dafür beispielsweise den Fundstellen des Namens PEANO im Namensverzeichnis von [Hilbert 2013] nachgehen.

10 Bernays

Wenn wir Hilbert als Wegbereiter der heute dominierenden, anti-logizistischen Auffassung der Peanoschen Axiome, die diese unbewiesen an den Anfang der Arithmetik stellt, betrachten dürfen, so liegt das nicht an einer einzelnen Bemerkung in einem unveröffentlichten Vorlesungsmanuskript. Er verdankt diese Stellung wohl vor allem den Ausführungen von Paul Bernays (1888–1977), durch den das moderne Verständnis in dem zusammen mit Hilbert herausgegebenen zweibändigen Werk *Grundlagen der Mathematik* [Hilbert & Bernays 1934, 1939] detailliert entwickelt und bekannt gemacht wurde.

In §6 des ersten Bandes, das den Titel *Widerspruchsfreiheit unendlicher Individuenbereiche. Anfänge der Zahlentheorie* trägt, verweist Bernays schon im Titel von Abschnitt a) 3. auf Peano: *Übergang zu Axiomen ohne gebundene Variablen unter Verschärfung der Existenzaxiome: das Symbol 0; Ziffern im neuen Sinne; PEANOSCHE Axiome; Zusammenstellung der erhaltenen Axiome*. Die (technisch sehr detaillierte) Darstellung von Bernays steht, wie aus dem Titel des Paragraphen hervorgeht, unter der Zielsetzung, Widerspruchsfreiheitsbeweise zu führen. Und diese sollen, auch nach der Veröffentlichung von Gödels Unvollständigkeitssätzen, im Rahmen der Hilbertschen Beweistheorie geführt werden und dementsprechend *nicht* durch logizistische Interpretationen der Zahlentheorie erbracht werden. Wenn man sich die anti-logizistischen Bemerkungen von Hilbert von 1904 in Erinnerung ruft und wenn man die Erkenntnisse, insbesondere die Gödelschen Resultate, der sich in den folgenden 30 Jahren rasant entwickelnden mathematischen Logik vor Augen hält, würden sowohl eine mengentheoretische Interpretation als auch die Benutzung zweistufiger Logik nicht mehr den grundlagentheoretischen Ansprüchen für einen Widerspruchsfreiheitsbeweis genügen. Insofern kann Bernays gar nicht anders, als eine Axiomatik mit Hilfe von nicht-logischen Zeichen, wie Peano sie gegeben hatte, an den Anfang zu stellen. Er tut dies zuerst nur für die Peano-Axiome ohne Induktion [Hilbert & Bernays 1934, 219]. Anschließend wird die vollständige Induktion separat eingeführt und detailliert erörtert. Dabei wird klar herausgestellt, daß sie „von Aussagen der Theorie handelt“ [Hilbert & Bernays 1934, 265], was in Bernays’ Kontext an dieser Stelle eine Beschränkung auf Formeln der Logik erster Stufe beinhaltet. Bernays legt dann in §7 *Die rekursiven Definitionen* dar, daß die Peanoschen Axiome für 0 und Nachfolger „keineswegs ausreich[en], um die üblichen Begriffsbildungen der Zahlentheorie zur Darstellung zu bringen“ [Hilbert & Bernays 1934, 286]. Es folgt eine Zwischenstation, wo die Rekursionsgleichungen für die Addition zu den Peano-Axiomen mit erststufiger Induktion hinzugenommen werden und das Ergebnis von Presburger zur Vollständigkeit dieser Theorie ausgeführt wird. Mit dem Axiomensystem (Z) haben wir schließlich die moderne Darstellung der erststufigen Peano-Arithmetik vor uns, wie sie — unter Auslassung der

beiden ersten Gleichheitsaxiome — heute allgemein bekannt ist [Hilbert & Bernays 1934, 371]:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a, \\ a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)), \\ a' \neq 0, \\ a + 0 = a, \\ a + b' = (a + b)', \\ a \cdot 0 = 0, \\ a \cdot b' = a \cdot b + a, \\ A(0) \ \& \ (x) (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(a). \end{array} \right. \quad (Z)$$

Zu dieser einerseits im Induktionsschema gegenüber der Originalformulierung Peanos beschränkten, andererseits um die Addition und Multiplikation erweiterten Axiomatisierung bemerkt Bernays:

Außerdem hat [die in diesem Kapitel diskutierte Methode für Widerspruchsfreiheitsbeweise] auch den Nachweis ermöglicht, daß das Axiomensystem PEANOS bei Zugrundelegung des Prädikatenkalküls und der Gleichheitsaxiome noch nicht zum Aufbau der Zahlentheorie ausreicht, daß vielmehr die Hinzufügung der Rekursionsgleichungen für die Addition und Multiplikation zu diesem Axiomensystem eine wesentliche Erweiterung bedeutet, durch welche erst der Reichtum der zahlentheoretischen Beziehungen zustande kommt. [Hilbert & Bernays 1934, 373]

Wir können nicht sicher sein, ob Bernays der erste war, der die erststufige Peano-Arithmetik unter Einschluß der definierenden Axiome von Addition und Multiplikation herausgearbeitet hat.³⁷ Die Geschichte der Rekursion ist lang und verwickelt und wird von von Plato geschildert [von Plato 2017]. Man kann dabei z. B. Skolem herausstellen, der bedeutende Beiträge zur Entwicklung der elementaren Rekursionstheorie geliefert hatte und zudem als entschiedener

37. Von Plato hat im Bernays-Nachlaß, der an der ETH Zürich aufbewahrt wird, ein stenographisches Manuskript zu Bernays' Vortrag *Die Rekursion als Grundlage der Zahlentheorie*, den er am 21. Februar 1928 in Göttingen gehalten hat, ausfindig machen können. Die Transkription dieses Manuskripts, die mir von Maria Hämeen-Anttila und Jan von Plato freundlicherweise angeboten wurde, zeigt, daß sich Bernays schon zu dieser Zeit eingehend mit der hier zur Diskussion stehenden Fragestellung beschäftigte, auch wenn er damals — aus der Perspektive der Rekursion heraus — noch nicht die in *Z* zusammengestellten Axiome behandelte.

Verfechter der (ausschließlichen) Verwendung von Logik erster Stufe in der Formalisierung der Mathematik gilt. Aber seine Arbeiten zur Rekursivität von Addition und Multiplikation schließen nicht die Induktion als formales Axiom bzw. Axiomenschema ein. Die (erststufige) Peano-Arithmetik ist in der Form, wie wir sie heute kennen, allem Anschein nach von Bernays in seinem System *Z* zum ersten Mal niedergelegt worden.

11 Konklusion

Zusammenfassend würden wir die Situation bezüglich der historischen Beiträge zur Axiomatisierung der Arithmetik wie folgt beschreiben:

1. DEDEKIND hatte von einem mathematischen Standpunkt aus die charakterisierenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen am besten erfaßt; seine Behandlung leidet aber darunter, daß er sie im Rahmen eines logizistischen Programms durchführt, die diese Eigenschaften nicht axiomatisch an den Anfang der Theorie stellt, sondern sie als *Sätze* aus einer übergeordneten (und später als problematisch erkannten) Mengenlehre, die er als einen Teil der Logik auffaßt, herzuleiten versucht.
2. PEANO erreicht zwar nicht die mathematische Tiefe von Dedekind bei der Behandlung der Arithmetik. Die Isolierung der charakterisierenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen *als Axiome* stellt aber einen konzeptionellen Gewinn dar, der allerdings erst durch die weitere Entwicklung der mathematischen Logik erkennbar wurde.
3. HILBERT hatte richtig erkannt, daß eine logizistische Begründung der arithmetischen Axiome letztlich unergiebig ist, womit neben dem Ansatz von Dedekind auch die Ansätze von Frege und Russell zum Scheitern verurteilt sind. Das liegt nicht zuletzt daran, daß sich die Mengenlehre nicht, wie von Dedekind und anderen vorausgesetzt, als Teil der Logik erweisen ließ. Vor diesem Hintergrund läßt sich — in Einklang mit Hilberts allgemein propagierter *axiomatischen Methode* — der Status der Peano-Axiome als *nicht-logische Axiome* erkennen.
4. BERNAYS, im Wissen um die den logischen Formalismen durch die Gödelschen Resultate gesetzten Grenzen, arbeitete schließlich die *erststufige* Peano-Arithmetik heraus, wie wir sie heute kennen und schätzen.

Danksagung

Diese Arbeit wurde u.a. von der Udo Keller-Stiftung und der Portugiesischen Forschungsgemeinschaft FCT über das *Centro de Matemática e Aplicações*, UID/MAT/00297/2020, gefördert. Ich danke Peter Schuster, Verona, für die Übersetzung der italienischen Zitate von Peano.

Literaturverzeichnis

- COUTURAT, Louis [1905], *Les Principes des mathématiques*, Paris: Alcan, deutsche Übersetzung [Couturat 1908].
- [1908], *Die philosophischen Prinzipien der Mathematik*, Leipzig: Klinkhardt, deutsche Übersetzung von [Couturat 1905] durch C. Siegel.
- DEDEKIND, Richard [1888], *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig: Vieweg, 1. Auflage; Nachdruck der 3. Auflage in [Dedekind 1932, 335–391].
- [1932], *Gesammelte Werke*, Bd. III, Braunschweig: Vieweg, herausgegeben von R. Fricke, E. Noether und Ø. Ore.
- FELGNER, Ulrich [2012], Das Induktions-Prinzip, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 114, 23–45, doi:10.1365/s13291-011-0032-9.
- FERREIRÓS, José [2005], Richard Dedekind (1888) and Giuseppe Peano (1889), booklets on the foundations of arithmetic, in: *Landmark Writings in Western Mathematics, 1640-1940*, herausgegeben von I. Grattan-Guinness, Amsterdam: Elsevier, Kap. 47, 613–626, doi:10.1016/B978-044450871-3/50128-5.
- [in Vorbereitung], The two sides of modern axiomatics: Dedekind and Peano, Hilbert and Bourbaki, in: *Axiomatic Thinking*, herausgegeben von F. Ferreira, R. Kahle & G. Sommaruga, Springer.
- GILLIES, Donald A. [1982], *Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic*, Assen: Van Gorcum.
- GÖDEL, Kurt [1931], Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 173–198, doi:10.1007/bf01700692.
- GRATTAN-GUINNESS, Ivor [2000], *The Search for Mathematical Roots, 1870–1940*, Princeton: Princeton University Press.
- [2011], Giuseppe Peano: A revolutionary in symbolic logic?, in: *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic*, herausgegeben von F. Skof, Milan: Springer, 135–141, doi:10.1007/978-88-470-1836-5_7.
- HILBERT, David [1900], Über den Zahlbegriff, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8, 180–184.
- [1905], Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, in: *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, herausgegeben von A. Krazzer, Leipzig: Teubner, 174–185, doi:10.11588/heidok.00016037.

- [1917], Mengenlehre, Vorlesung Sommersemester 1917, Ausarbeitung (Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen).
 - [1918], Axiomatisches Denken, *Mathematische Annalen*, 78(3–4), 405–415, doi:10.1007/978-3-662-38452-7_10.
 - [1920], Probleme der mathematischen Logik, Vorlesung Sommersemester 1920 (Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen), veröffentlicht in [Hilbert 2013, 342–371].
 - [1928], Die Grundlagen der Mathematik, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6(1–2), 65–85, doi:10.1007/BF02940602.
 - [2013], *Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917–1933, David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Mathematics and Physics, 1891–1933*, Bd. 3, herausgegeben von Ewald, W. und Sieg, W., Berlin; Heidelberg: Springer.
- HILBERT, David & ACKERMANN, Wilhelm [1928], *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin; Heidelberg: Springer.
- [1958], *Grundzüge der theoretischen Logik, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Bd. XXVII, Berlin; Heidelberg: Springer, 4. Aufl.
- HILBERT, David & BERNAYS, Paul [1934], *Grundlagen der Mathematik I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Bd. XL, Berlin; Heidelberg: Springer, 2. Auflage 1968.
- [1939], *Grundlagen der Mathematik II, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Bd. L, Berlin; Heidelberg: Springer, 2. Auflage 1970.
- KAHLE, Reinhard [2013], David Hilbert and the *Principia Mathematica*, in: *The Palgrave Centenary Companion to Principia Mathematica*, herausgegeben von N. Griffin & B. Linsky, London: Palgrave Macmillan, 21–34, doi:10.1057/9781137344632_2.
- [2017], Von Dedekind zu Zermelo versus Peano zu Gödel, *Mathematische Semesterberichte*, 64(2), 159–167, doi:10.1007/s00591-017-0193-4.
 - [2019], Is there a “Hilbert Thesis”?, *Studia Logica*, 107(1), 145–165, doi:10.1007/s11225-017-9776-2.
- KENNEDY, Hubert C. [1974a], *Giuseppe Peano, Beihefte zur Zeitschrift “Elemente der Mathematik”*, Bd. 14, Basel: Birkhäuser, Nachdruck: Peremptory Publications, San Francisco, 2002.

- [1974b], Peano's concept of number, *Historia Mathematica*, 1, 387–408, doi:10.1016/0315-0860(74)90031-7.
- MOORE, Gregory H. [1988], The emergence of first-order logic, in: *History and Philosophy of Modern Mathematics*, herausgegeben von W. Aspray & P. Kitcher, Minneapolis: University of Minnesota Press, *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Bd. XI, 95–135.
- NELSON, Leonard [1905-1906], Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit, *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, Neue Folge, Band I, Heft 2 und 3, 373–430, nachgedruckt in: L. Nelson, Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik, Meiner, 1994, 6–54; die Seitenangabe folgt diesem Nachdruck.
- PADOA, Alessandro [1902], Théorie des nombres entiers absolus, *Rivista di Matematica*, VIII, 45–54.
- PEANO, Giuseppe [1889], *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, Augustae Taurinorum: Bocca, nachgedruckt in [Peano 1957-1959, Bd. II, 1958, 20–55].
- [1891], Sul concetto di numero, *Rivista di Matematica*, I, 87–102, wiederabgedruckt in [Peano 1957-1959, Bd. III, 1959, 80–109].
- [1896–1899 (1898)], Sul § 2 del formulario, t. II: Aritmetica, *Rivista di Matematica*, VI, 75–89, wiederabgedruckt in [Peano 1957-1959, Bd. III, 1959, 232–248].
- [1957-1959], *Opere Scelte*, Rome: Cremonese.
- VON PLATO, Jan [2017], *The Great Formal Machinery Works: Theories of Deduction and Computation at the Origins of the Digital Age*, Princeton: Princeton University Press.
- [2019], What are the axioms for numbers and who invented them?, in: *Philosophy of Logic and Mathematics*, herausgegeben von G. M. Mras, P. Weingartner & B. Ritter, Berlin; Boston: de Gruyter, *Publications of the Austrian Ludwig Wittgenstein Society – New Series*, Bd. 27, 343–356, doi:10.1515/9783110657883-020.
- RECK, Erich [2017], Dedekind's contributions to the foundations of mathematics, in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, herausgegeben von E.N. Zalta, Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2017 Aufl.
URL <https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/dedekind-foundations/>
- RUSSELL, Bertrand [1903], *The Principles of Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press.

- [1919], *Introduction to Mathematical Philosophy*, London: Allen & Unwin, deutsche Übersetzung [Russell 1923].
- [1923], *Einführung in die mathematische Philosophie*, München: Drei Masken Verlag, deutsche Übersetzung von [Russell 1919].
- SEGRE, Michael [1994], Peano's axioms in their historical context, *Archive for History of Exact Sciences*, 48, 201–342, doi:10.1007/BF00375085.
- SIEG, Wilfried [1999], Hilbert's programs: 1917–1922, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 5(1), 1–44, doi:10.2307/421139.
- [2013], *Hilbert's Programs and Beyond*, Oxford: Oxford University Press.
- SIEG, Wilfried & MORRIS, Rebecca [2018], Dedekind's structuralism: Creating concepts and deriving theorems, in: *Logic, Philosophy of Mathematics, and their History*, herausgegeben von E. H. Reck, London: College Publications, *Tributes*, Bd. 36, 251–301.
- TAPP, Christian [2013], *An den Grenzen des Unendlichen*, Mathematik im Kontext, Berlin; Heidelberg: Springer.
- [2017], Richard Dedekind: Brief an Keferstein, in: *In Memoriam Richard Dedekind (1831–1916). Number Theory – Algebra – Set Theory – History – Philosophy*, herausgegeben von K. Scheel, Th. Sonar & P. Ullrich, Münster: WTM Verlag, Schriften zur Geschichte der Mathematik und ihrer Didaktik, 205–211.
- VAN HEIJENOORT, Jean (Hg.) [1967], *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge: Harvard University Press.
- WEYL, Hermann [1928], Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6(1/2), 86–88, doi:10.1007/978-3-663-16102-8_2.
- WHITEHEAD, Alfred North & RUSSELL, Bertrand [1910–1913], *Principia Mathematica*, Cambridge: Cambridge University Press, 1. Aufl., 3 Bände. Zweite Auflage 1925–1927.
- ZERMELO, Ernst [2010], *Collected Works – Gesammelte Werke*, Bd. 1, Berlin: Springer, herausgegeben von H.-D. Ebbinghaus und A. Kanamori.