Philosophia Scientiæ

Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

25-2 | 2021

Mathématique et philosophie leibniziennes à la
lumière des manuscrits inédits

Exposants et tangentes chez Leibniz à Paris, entre formes et géométrie

Exponents and Tangents in Leibniz's Work in Paris

Arilès Remaki

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/philosophiascientiae/3069>

DOI : 10.4000/philosophiascientiae.3069

ISSN : 1775-4283

Éditeur

Éditions Kimé

Édition imprimée

Date de publication : 25 mai 2021

Pagination : 95-132

ISBN : 978-2-38072-015-0

ISSN : 1281-2463

Référence électronique

Arilès Remaki, « Exposants et tangentes chez Leibniz à Paris, entre formes et géométrie », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 25-2 | 2021, mis en ligne le 25 mai 2021, consulté le 26 novembre 2021. URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/3069> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.3069>

Tous droits réservés

Exposants et tangentes chez Leibniz à Paris, entre formes et géométrie

Arilès Remaki

Laboratoire SPHERE, UMR 7219,
Université de Paris – CNRS, Paris (France)

Résumé : L'œuvre mathématique de Leibniz a ceci d'intéressant qu'au travers des innombrables manuscrits de travail dont nous disposons dans ses archives à Hanovre, le philosophe nous a confié le matériel nécessaire pour rétablir ses divers cheminements de recherche ainsi que ses méthodes de découvertes à l'origine de ses créations mathématiques. L'exemple des exposants que nous allons traiter permet d'éclairer utilement la façon dont Leibniz apprend les mathématiques et change progressivement de posture et de démarche. Ainsi, dans sa première année parisienne, la primauté est-elle donnée aux relations tabulaires, plutôt qu'aux formes et aux similitudes. Ces enjeux épistémologiques expliquent la manière dont Leibniz généralise partiellement la notion d'exposant.

Abstract: The interesting thing about Leibniz's mathematical work is that the countless working manuscripts in his archives in Hanover provide us with the material necessary to re-establish the various research paths and methods of discovery at the origin of his mathematical creations. As an example this article will tackle the notion of exponents, shedding useful light on the way Leibniz learned mathematics and gradually changed his attitude and manners. Thereby, during his first year in Paris, he focused on tabular relationships rather than forms and similarities. These epistemological issues explain the way Leibniz partially generalized the notion of the exponent.

1 Introduction

La première apparition du terme « exposant » chez Leibniz, dans un emploi mathématique, se trouve dans la *Dissertatio de arte combinatoria* en 1666

[A VI, 1, 162–230]. Dans le nombre de combinaisons de k choses choisies parmi n données, l'exposant désigne, pour Leibniz, le nombre de choses choisies k . Lors de sa première année à Paris, à la fin de l'année 1672, Leibniz rédige une lettre qu'il destine à Jean Gallois, qui dirige alors *Le Journal des sçavans*. Dans cette lettre, Leibniz emploie à nouveau le terme « exposant » qui désigne cette fois-ci le nombre de réplifications dans les ordres numériques. Ainsi, l'exposant de la progression naturelle est 2 et celui de la progression des nombres triangulaires est 3. Dans le même temps, Leibniz entreprend ses premiers travaux d'arithmétique et d'algèbre. On y trouve un usage classique des exposants comme paramètres des puissances. L'exposant reste donc lié à un processus discret et combinatoire, à savoir le dénombrement.

Mais alors, comment Leibniz en est-il venu à considérer des exposants qui ne sont pas des entiers ? Une monographie complète sur la question des exposants chez Leibniz aurait à s'appuyer sur un corpus extrêmement volumineux et largement inédit¹. Le présent article ne peut pas couvrir un tel matériau. Cela étant, une partie importante de cette histoire s'est naturellement jouée durant le séjour du jeune philosophe à Paris, entre 1672 et 1676, car c'est durant ces courtes années qu'il s'adonne de façon sérieuse à l'apprentissage des mathématiques. Nous allons donc nous restreindre à la période parisienne. Nous excluons de notre analyse le développement des équations exponentielles ainsi que la conceptualisation des exposants caractéristiques, auxquels Leibniz se consacre pourtant déjà dès la fin du séjour parisien. Ces deux thématiques n'ont pas encore été suffisamment explorées, et de futures contributions y trouveraient un objet idoine.

L'idée d'exposants non-entiers apparaît pour la première fois durant l'été 1673, au sein de travaux consacrés à des calculs de quadratures qui constitueront le terreau du calcul infinitésimal leibnizien. L'étude de ces documents enrichit notre connaissance de cette période parisienne, durant laquelle Leibniz accède aux ouvrages classiques de géométrie et d'analyse de son époque. La posture d'apprenant qu'on y découvre donne une image significativement différente de celle du mathématicien accompli qui quitte la capitale française. Mettre en avant cette période particulière de sa carrière de mathématicien permet d'éviter nombre d'écueils commis par certains commentateurs, qui consistent à croire que Leibniz a découvert les mathématiques avec la même tournure d'esprit que celle qu'on lui connaîtra dans les temps de ses grands projets de caractéristiques, au tournant des années 1680. C'est le cas de l'interprétation formaliste de Michel Serfati, que nous développerons dans la première partie de cet article.

Dans un deuxième temps, nous ferons l'analyse d'un groupe de textes écrits en 1673, au sein desquels les intuitions du jeune Leibniz sont encore profondément enracinées dans la géométrie. Son approche combinatoire, certes présente et importante, reste pourtant largement tournée vers l'utilisation des tables. La notion de forme ne constitue pas encore le cœur de cette

1. Cf. sources en annexes.

science des combinaisons. Néanmoins, ces textes nous permettront de souligner quelques ingrédients déjà présents et propices à la mise en place d'une forme exponentielle.

2 Méthode et état de l'art

2.1 Préambule méthodologique

Opérations interdites

On dit parfois qu'une certaine opération est *interdite*. Que signifie cette expression pour les historiens des mathématiques ?

Prenons pour exemple la multiplication de deux grandeurs, une opération interdite pour les Grecs de l'Antiquité. En effet, la multiplication de a par b correspond à la collection d'autant de copies de b qu'il y a d'unités dans a . Il faut donc que a soit un composé d'unités, et donc un nombre, pour que cette opération ait du sens. Néanmoins, les Grecs disposent bel et bien d'un outil pour parler de produits de grandeurs, à savoir le rectangle ab . L'usage qu'on en trouve au sein du livre II des *Éléments* ne relève certes pas de l'algèbre, contrairement à ce qu'avaient souligné certains auteurs arabes. Mais ce n'est pas non plus un pur instrument de la géométrie, au sens où l'objectif des différentes propositions n'est pas tant d'établir une liste de propriétés des rectangles que de fournir une galerie d'outils utiles à la manipulation des grandeurs. Ainsi, la réalité de cette « algèbre grecque » se situe dans un entre-deux difficile à saisir. Dire qu'elle n'existe pas nous pousse à mettre de côté de nombreuses connaissances et sources historiques. Mais dire simplement qu'elle existe « autrement » nous contraint à tordre tellement le concept d'algèbre qu'il finit par perdre son sens. En réalité, nous avons déjà franchi la limite imposée par la rigueur historiographique lorsque nous disions du rectangle qu'il permet aux Grecs de parler de produits de grandeurs. En employant ce vocabulaire, nous projetons implicitement l'idée que le rectangle euclidien se trouve sur une longue route historique qui mène inéluctablement vers notre concept moderne de multiplication. Ainsi, l'interdiction devient en réalité une incomplétude. C'est un manque théorique que l'histoire aura pour rôle de combler progressivement. Bien qu'on puisse le décrire et en avoir conscience, il reste néanmoins en nous une part irréductible de cet écueil téléologique, contraint par la nécessité que nous avons d'appliquer des analogies et des cadres conceptuels modernes aux sources que nous souhaitons comprendre, étymologiquement prendre avec nous.

L'un des principaux aspects de cette contagion minimale qui existe à l'interface entre l'historien et ses sources est donc d'ordre linguistique. L'évolution du concept est ainsi conçue dans le sillage de sa dénomination. De ce point de vue, l'œuvre de Leibniz est fascinante. En prêtant attention

au choix des mots dans son corpus mathématique, on constate qu'un même mot peut désigner des objets radicalement différents, et qu'un même objet peut recevoir plusieurs noms. La continuité d'un mot ou d'un concept, chez Leibniz, fait émerger la notion de forme, capitale pour sa philosophie. Deux objets distincts ayant des formes semblables sont en réalité deux aspects d'une même chose plus générale.

La même variété dans n'importe quel genre de monde n'est pas autre chose que la même essence rapportée de diverses manières, comme si l'on regarde la même ville depuis différents endroits².
[A VI, 3, 523]

La similitude des formes est déterminée par la conformation des diverses relations qu'elles mettent en jeu : deux formes sont semblables lorsqu'on ne peut les discerner qu'en les mettant en co-présence.

L'exemple des exposants illustre à merveille nos propos méthodologiques liminaires. D'abord, la problématique posée par l'exponentiation est très proche de celle de la multiplication, évoquée ci-dessus. L'exposant désigne un nombre dans la puissance, à savoir le nombre de facteurs identiques qu'elle contient. Le sujet de l'exposant laisse donc une large ouverture aux discours sur les opérations interdites ou manques théoriques. Ces manques peuvent être divers, comme l'absence d'outil conceptuel permettant l'avancée, à l'image des obstacles épistémologiques bachelardiens, des barrières idéologiques qui interdisent de concevoir hors d'un certain système de valeurs ou simplement le manque de courage, qui donne alors l'occasion de mettre en avant les grandes figures de l'histoire qui ont su franchir le pas. En outre, le choix du mot « exposant » que nous faisons n'est pas neutre et traduit d'une part notre point de vue vis-à-vis des textes du passé, à savoir qu'on cherche principalement à expliquer comment Leibniz a conceptualisé cette notation surélevée, introduite par Descartes. D'autre part, il marque les choix de vocabulaire du jeune Leibniz durant le séjour parisien.

Formes et formules

Nous allons donner ici une présentation de l'extension de l'exposant dans un cadre moderne, tel qu'on peut l'enseigner aujourd'hui en premier cycle universitaire. L'extension du domaine d'une opération, ou d'une fonction, met en jeu ce principe cher à Leibniz, à savoir la similitude formelle. Considérons d'abord l'égalité suivante :

$$e^x = \exp(x)$$

Ici, l'exponentielle prend deux formes. La première emprunte l'écriture des puissances et signifie qu'on multiplie la quantité e autant de fois qu'il y a

2. « Varietas eadem in quolibet genere mundi, nec est quicquam aliud, quam eadem essentia diversimode relata, ut si urbem eandem ex diversis locis aspicias. »

d'unités dans x . La seconde forme est celle de la fonction solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

En tant que fonction continue et même lisse³, la fonction exponentielle prend un sens en supposant x égal à n'importe quelle grandeur réelle. À l'inverse, dans la première expression e^x , la quantité x doit être un nombre entier pour qu'il soit un composé d'unités. En allant plus loin, on peut écrire :

$$\exp(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

Dans cette troisième écriture, c'est la quantité x qui est multipliée n fois, n étant un entier. Ainsi, cette nouvelle forme trouve du sens pour n'importe quelle quantité susceptible d'être multipliée⁴, c'est-à-dire des grandeurs complexes, des quaternions ou même des matrices.

Ces différentes formes sont des objets *a priori* distincts. En les identifiant à un unique objet, on fait de ces écritures des facettes d'un concept unique qui donne du sens à des formulations qui, au départ, n'en avaient aucun. Ainsi peut-on écrire e^A pour une matrice A qui n'est pas un composé d'unités. Le fait que ces formes soient égales sur un sous-domaine n'est pas suffisant pour justifier l'identification du concept sous-jacent qu'est l'exponentielle. En effet, il existe un très grand nombre de fonctions lisses qui interpolent les exposants entiers. L'identification se fonde sur le maintien d'une certaine propriété mathématique qui constitue l'identité propre au concept sous-jacent. Ainsi, si deux objets définis sur des domaines distincts respectent cependant cette même propriété, on choisit de les identifier et de les considérer comme une certaine forme d'une structure plus générale. Pour l'exponentielle, on peut considérer par exemple sa propriété logarithmique :

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

Cette propriété peut être démontrée pour les trois formes de façon indépendante, en ne se fondant que sur les définitions de celles-ci. De fait, on pourrait choisir une autre propriété fondamentale, comme le fait que l'exponentielle est invariante par l'intégration, ou la différentiation. Ainsi, seule la suite géométrique double pourrait être considérée comme exponentielle, puisqu'elle

3. Une fonction lisse est une fonction dite de classe C^∞ , c'est-à-dire qu'elle est dérivable un nombre quelconque de fois.

4. L'écriture a^b réclame en fait que cette multiplication respecte l'associativité des puissances, c'est-à-dire que l'ordre de composition des a entre eux n'intervienne pas. Cette propriété n'est cependant pas nécessaire pour définir la deuxième puissance a^2 .

vérifie :

$$1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n \quad \text{et} \quad 2^{n+1} - 2^n = 2^n$$

Ces constructions sont donc soumises à l'arbitraire des choix de mathématiciens. Ces choix sont dictés par des impératifs pratiques, des traditions institutionnelles ou sociales, ou encore des agendas philosophiques ou idéologiques.

2.2 L'exposant newtonien

Peu de commentateurs ont pris jusqu'ici l'exposant comme objet central d'une analyse historiographique et philosophique des textes leibniziens. Michel Serfati y consacre un chapitre ou un long développement dans plusieurs de ses livres [Serfati 2005, 323–379], [Serfati 2018, 19–29], [Serfati 2002, 271–318]. Il montre comment la notion d'exponentielle que développe Leibniz dans ses écrits mathématiques rompt de façon radicale avec les conceptions antérieures. En considérant des exposants inconnus, Leibniz fait naître des équations d'un genre tout à fait nouveau, étrangères aux anciennes catégories cartésiennes dépendantes du degré maximal en jeu. Leibniz doit développer de toutes nouvelles techniques pour réduire ou résoudre ces questions qui quittent la juridiction de l'algèbre pour gagner le domaine de la transcendance. Pour Serfati, l'enjeu se trouve dans la manière dont Leibniz a pu s'octroyer le droit de placer une inconnue dans l'exposant. Selon lui, c'est en voyant Newton placer des fractions et des racines en lieu et place d'exposants cartésiens que cette idée novatrice d'exposants variables et inconnus a pu germer dans l'esprit de Leibniz.

Epistola prior

Pour Michel Serfati, ce passage des puissances entières aux puissances fractionnaires est essentiel. En effet, il nécessite de considérer un objet, la fraction, dans une position qui n'a de sens que pour un nombre entier naturel. Selon Serfati, c'est la correspondance avec Newton au milieu de l'année 1676 qui joue un rôle absolument moteur dans l'évolution de la pensée du jeune Leibniz sur la nature, l'écriture et la fonction des exposants⁵. Dans la première lettre de Newton, nommée pour cette raison l'*Epistola prior*, Newton introduit des exposants fractionnaires :

5. La première lettre, qu'on nomme « *Epistola prior* », se trouve dans A III, 1, n° 88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 juin 1676 (n° 5 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg le 5 août 1676). La seconde lettre, qu'on nomme « *Epistola posterior* », se trouve dans A III, 2, n° 38, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz du 24 octobre 1676.

Tels sont les fondements de ces réductions, mais les extractions de racines multiples peuvent être abrégées au moyen de ce théorème :

- $(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \dots$
- où $P + PQ$ désigne une quantité dont on doit chercher la racine ou encore si l'on veut la dimension, ou la racine de la dimension⁶. [A III, 1, 535]

$$\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \dots$$

Manuscripts de Newton – MS Add.3977 fol. 25

Selon Serfati, le geste accompli ici par Newton, qui consiste à introduire une fraction à la place de l'exposant cartésien, est non seulement révolutionnaire pour l'époque mais entraîne un véritable tournant chez Leibniz dans sa symbolique et dans sa pratique de l'analyse :

Le point crucial pour nous est en vérité ici tout autre : à l'époque de Leibniz, la forme $\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}}$ était sans objet, parce que sans substance. Chacune de ses « formes » internes pouvait certes être interprétée, et d'abord $P + PQ$, qui dûment complétée par des parenthèses rondes et un « point », conduit à cette « forme » de niveau deux $(P + (P.Q))$ bien simplement interprétée si P et Q sont les signes de nombres quelconques. De même, si m et n sont les signes d'entiers, $\frac{m}{n}$ est une « forme » de niveau un, interprétée comme nombre rationnel (un *rompu* dans la terminologie newtonienne). Dûment complétée, la « forme » s'écrit donc $\overline{(P + (P.Q))}^{\frac{m}{n}}$. La question qui demeure alors, seule mais majeure, est l'absence de signification de l'assembleur de niveau le plus élevé, le « blanc exponentiel ». Ainsi la procédure, qui pouvait bien être conçue, ne pouvait-elle cependant se dérouler et produire une substance. Rien dans l'expérience préalable de Leibniz à cette époque, ni dans la définition cartésienne des exponentielles – la seule évidemment qu'il eût connu – ne pouvait lui laisser pressentir quelle signification Newton pouvait bien apporter à des « formes » comme $3^{\frac{1}{2}}$ ou $(x+3)^{\frac{1}{2}}$ ou bien $5^{\frac{2}{3}}$, ou bien encore $(\sqrt{2})^{-\frac{6}{7}}$. [Serfati 2005, 327]

6. « Hæc sunt fundamenta harum reductionum ; sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc theorema : $\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc.}$ ubi $P + PQ$ significat quantitatem, cujus radix vel etiam dimensio quævis vel radix dimensionis investiganda est. » – *Nota Bene* : Les éditeurs de l'*Akademie* ont transcrit $\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}}$ au lieu de $\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}}$, alors que la fraction est bel et bien surélevée sur le manuscrit. Comme cette surélévation a son importance dans l'analyse de Serfati, cette remarque nous a paru utile.

Il est intéressant de noter que Serfati insiste sur le fait que Leibniz reçoit les exposants newtoniens comme de nouvelles formes. C'est cet aspect formel qui se serait imposé en premier à Leibniz.

Notes marginales de Leibniz

Les notes marginales que Leibniz a laissées concernant cette lettre s'attardent assez longuement sur cette expression algébrique, ce qui est un bon signe de l'importance qu'a pu donner le jeune philosophe à cette écriture que lui proposait Newton. Mais ces notes montrent que l'intérêt que Leibniz porte à cette formule est radicalement différent de ce que Serfati présente.

En développant la formule de Newton, Leibniz remarque qu'elle peut être factorisée :

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q + \frac{m-n}{2n} \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q^2 + \frac{m-2n}{3n} \frac{m-n}{2n} \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q^3 + \dots$$

$$\downarrow$$

$$P^{\frac{m}{n}} (1 + Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{m}{n} Q + \frac{m-n}{2n} \frac{m}{n} Q^2 + \frac{m-2n}{3n} \frac{m-n}{2n} \frac{m}{n} Q^3 + \dots \right)$$

Et ainsi Leibniz remarque :

Après la division de la série par $P^{\frac{m}{n}}$, le reste est rationnel ; et même $P^{\frac{m}{n}}$ disparaît tout à fait ou bien P lui-même. Pour cette raison, il peut toujours arriver commodément que P est 1 ; $P^{\frac{m}{n}}$ sera aussi 1. [A III, 1, 555]⁷

Cette remarque peut expliquer pourquoi Newton choisit de développer $P+PQ$, qui n'est pas homogène, au lieu du binôme simple et homogène $P+Q$. En effet, le développement de $P+Q$ donne lieu à des exposants négatifs :

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \frac{m}{n} \frac{m-n}{n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 + \frac{m}{n} \frac{m-n}{n} \frac{m-2n}{n} P^{\frac{m-3n}{n}} Q^3 + \dots$$

Pour pouvoir garder les exposants positifs qui intéressent Newton⁸, il a fallu remplacer Q par PQ dans le binôme pour rendre les exposants de la variable P constants dans le développement et les empêcher de décroître à l'infini, inéluctablement dans les négatifs.

7. « Divisa serie per $P^{\frac{m}{n}}$ reliquum rationale ; imo prorsus evanescet $P^{\frac{m}{n}}$ vel ipsa P . Hinc semper fieri potest commode, ut P sit 1 ; erit $P^{\frac{m}{n}}$ etiam 1. »

8. La méthode de Newton, comme celle de Leibniz, se fonde notamment sur un habile mélange des apports de Mercator [Mercator 1668], Wallis [Wallis, John 1656] et Mercator ouvrant la voie au développement en série entière et Wallis à la quadrature des puissances entières.

De fait, la formule de Newton correspond, pour nos mathématiques actuelles, au développement en série entière de la formule $(1+x)^\alpha$. Cependant l'exposant n'est pas un simple symbole, c'est une fraction dont les deux membres interviennent dans la formule, c'est-à-dire que la formule est fonction de m et de n , qui jouent le rôle de variables indépendantes. En réalité, puisqu'elle correspond à notre formule actuelle qui ne dépend que de l'exposant, il s'agit d'une fonction d'une seule variable $\frac{m}{n}$. Mais, pour s'en apercevoir, il faudrait pouvoir noter la relation suivante :

$$\frac{m(m-n)(m-2n)\dots(m-(p-1)n)}{1.2\dots p.n^p} = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\dots\left(\frac{m}{n}-(p-1)\right)}{p!}$$

Or, il semble que de Newton ou de Leibniz, aucun n'ait réalisé cette propriété sur le moment. On trouve pourtant dans les notes marginales de Leibniz une remarque qui va dans ce sens :

La même quantité peut être obtenue ici par une infinité de modes, en choisissant tels ou tels m et n de sorte que $\frac{m}{n}$ reste toujours inchangée⁹. [A III, 1, 556]

Ainsi, on retrouve la relation ci-dessus en posant $m' = \frac{m}{n}$ et $n' = 1$. En effet, Leibniz écrit explicitement que m et n peuvent être des fractions :

Il se peut même que m ou n soit rompu ou irrationnel, ce qui est de grande importance, et même mieux, ce peut être une lettre (réciproquement, on peut trouver $\frac{m}{n}$ à partir de $P + PQ$, le logarithme à partir du nombre et finalement aussi le nombre à partir du logarithme, et ce par des méthodes que j'ai rapportées par ailleurs¹⁰). [A III, 1, 555–556]

Leibniz fait peut-être ici référence aux textes que nous allons développer dans la seconde partie de cet article. Mais cette relation bijective entre le nombre et son logarithme rappelle plutôt ses travaux sur les propriétés logarithmiques de l'hyperbole, qu'il démontre dans son traité sur la quadrature arithmétique du cercle, le *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolæ* [A VII, 6, n° 51], rédigé durant l'été 1676. Leibniz y donne deux développements inverses l'un de l'autre : celui du logarithme en fonction du nombre, connu depuis sa lecture de Mercator vers 1673, et le développement du nombre en fonction du logarithme, dont la découverte est alors nettement plus récente, puisqu'on en trouve la première mention dans le *Quadratura circuli et hyperbolæ arithmetica*.

9. « Eadem quantitas infinitis modis hinc haberi potest, faciendo m , n alias atque alias, eadem semper manente $\frac{m}{n}$. »

10. « Potest m vel n etiam esse fractus vel irrationalis, quod magni est momenti, quin et potest esse litera (vicissim $\frac{m}{n}$ potest inveniri ex $P + PQ$, logarithmus ex numero; denique et numerus ex logarithmo, methodis alibi a me traditis). »

Logarithmi [A VII, 6, n° 32], rédigé en juillet 1676, soit un mois après cette lettre. La première source concernant ce développement est sans doute perdue. Contrairement à ce qu'avance Michel Serfati, ce n'est pas le fait de mettre une fraction à la place de l'exposant qui constitue ici une forme de nouveauté et une source d'enthousiasme chez Leibniz. En effet, il indique que les variables m et n sont déjà considérées comme entièrement libres et peuvent elles-mêmes être interprétées comme fractionnaires ou même irrationnelles. Elles peuvent même être vues comme les variables d'une équation algébrique :

Le numérateur divisé par m serait la formule qui sert pour l'équation dont les racines sont en progression arithmétique, ayant posé m comme inconnue et $n, 1n, 2n$, etc., comme les vraies racines. À partir de là, on établira aisément la table pour poursuivre cette série jusqu'à l'infini¹¹. [A III, 1, 555]

Leibniz voit ici une nouvelle forme d'exponentiation, à deux variables. C'est la relation entre ces deux variables qui constitue pour lui une véritable avancée. En effet, en interprétant les numérateurs des coefficients comme des équations algébriques factorisées, c'est-à-dire des expressions dont on connaît explicitement les racines, Leibniz montre que cette formule exprime en elle-même les conditions d'annulation de ses propres coefficients. Ainsi, on peut lire dans la formule les conditions nécessaires et suffisantes pour que la série soit finie ou infinie :

Si $m = n$ et qu'aussi bien m que n sont entiers, la série n'ira pas jusqu'à l'infini mais un certain terme sera $= 0$, et pour cette raison, tous les suivants également¹². [A III, 1, 555–556]

Epistola posterior

Leibniz ne communique pas sur ses nouvelles approches. Dans la lettre suivante de Newton, qu'on appelle l'*Epistola posterior*, ce dernier demande clairement au jeune philosophe allemand de communiquer plus clairement sur le sujet :

Il me sera fort plaisant qu'on communique la résolution des équations affectées par la méthode de Leibniz et qu'on explique juste après comment s'y prendre lorsque les indices des puissances sont des fractions comme dans cette équation : $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$, ou des quantités sourdes comme dans celle-ci

$$- \left(x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}} \right)^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = y -$$

11. « Numerator per m divisus foret formula serviens pro æquatione, cujus radices progressionis arithmetice, posita m pro incognita et $n, 1n, 2n$, etc., pro radicibus veris. Hinc facile condetur tabula pro continuanda hac serie in infinitum. »

12. « Si $m \sqcap n$ et tam m quam n integer, series non ibit in infinitum, sed aliquis terminus fiet $\sqcap 0$, adeoque omnes quoque sequentes. »

où $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ ne désignent pas les coefficients de ce x mais les indices de ses puissances ou de ses dignités et $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ désigne l'indice de la dignité du binôme $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$.

Je crois que la chose est claire avec ma méthode, mais je l'avais décrite d'une autre manière. Mais il faut finalement poser là la limite de cette très longue lettre¹³. [A III, 2, 116]

The image shows a handwritten equation in a box: $x^{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = y$. The handwriting is in a historical style, with some corrections and a circled '3' in the denominator of the fraction.

Manuscripts de Newton – MS Add.3977 fol. 52

Serfati interprète cette nouvelle mention des exposants non entiers comme le pas décisif pour Leibniz vers l'exposant transcendant. Newton y franchirait une nouvelle barrière en plaçant des expressions irrationnelles au sein des exposants :

L'exemple de Newton – sans autre intérêt que pédagogique – est particulièrement suggestif : il contient une superposition de deux tels exposants, l'un à l'intérieur d'une forme élémentaire (le binôme), l'autre dans l'exposant du binôme. Une écriture newtonienne qui n'a certes pas dû manquer de surprendre à nouveau Leibniz. Quant à la signification de sa Forme exponentielle neuve, Newton n'en fournit cette fois aucune. Les dernières lignes sont particulièrement sibyllines : la chose, dit-il, découle à l'évidence de sa méthode et il en fera ailleurs la description¹⁴. [Serfati 1997, 328]

L'échange épistolaire qu'entretiennent Leibniz et Newton durant cette année 1676 joue un rôle majeur dans la célèbre controverse qui opposera les deux savants dans la première décennie du XVIII^e siècle. Ainsi, la place disproportionnée qu'ont ces textes chez les divers commentateurs des siècles

13. « Communicatio Resolutionis affectarum æquationum par Methodum Leibnitii pergrata erit, juxta et explicatio quomodo se gerat ubi indices potestatum sunt fractiones ut in hac æquatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}} y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$, aut surdæ quantitates ut in hac $\sqrt{x^2 + x^{\sqrt{7}}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = y$, ubi $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ non designant coefficientes ipsius x , sed indices potestatum seu dignitatum ejus et $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ indicem dignitatis binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res credo, mea methodo patet, aliter descripsissem. Sed meta tandem prolixæ huic Epistolæ ponenda est. » – *Nota Bene* : La version manuscrite Ms. add 3977 fol. 35–54 que nous avons consultée, Newton écrit « où les indices des puissances sont des fractions » (« *ubi indices potestatum sunt fractiones* ») au lieu de la version choisie par les éditeurs de l'*Akademie* « *ubi indices postulatam sunt fractiones* ». Nous rétablissons donc « puissances » dans la traduction.

14. *Nota Bene* : À la fin de la citation, Serfati traduit librement et indirectement Newton, et dit qu'il fera la description de sa méthode « ailleurs ». En réalité, Newton écrit « *aliter* », c'est-à-dire « autrement » et non « *alibi* », c'est-à-dire ailleurs.

qui suivirent explique pourquoi ils ont généralement surévalué le rôle qu'ils ont pu jouer dans l'histoire de concepts mathématiques comme les exposants¹⁵.

Ainsi, cette formule ne constitue pas pour Leibniz une révolution et nous allons montrer dans les prochaines sections qu'il élabore des conceptions et des écritures d'exposants fractionnaires et même irrationnels dès l'année 1673, soit trois ans plus tôt. Néanmoins, il convient de garder à l'esprit la problématique de la substance des termes, soulevée par Serfati, afin de mener à bien l'analyse historique de ce que sont les exposants pour Leibniz au travers des textes que nous allons étudier.

3 Exposants formels, exposants géométriques

3.1 Des quadratures de paraboloïdes

Dès les premières années de la période parisienne, Leibniz s'adonne à la lecture de *La Géométrie* de Descartes [Descartes 1659]. Il connaissait ce texte depuis l'enfance et le cite déjà au sein de sa *Dissertatio de arte combinatoria* en 1666, mais c'est à Paris qu'il entreprend de travailler réellement les outils développés par le géomètre français. En 1673, il découvre le triangle caractéristique au travers de la lecture des travaux de Pascal sur la cycloïde. À cette même période, Leibniz entame les travaux de Wallis sur la quadrature des courbes rationnelles dans son célèbre *Arithmetica infinitorum* [Wallis, John 1656]. La seconde partie de l'œuvre consacrée à la quadrature du cercle semble avoir moins retenu son attention. Dans cette situation, on trouve un important groupe de textes datant de l'été 1673 [A VII, 4, n° 37, 38, 39] consacrés à la quadrature des paraboloïdes et des hyperboloïdes, c'est-à-dire des courbes respectant des équations cartésiennes :

★ Pour les paraboloïdes : $y^n = a^{n-k} x^k$.

★ Pour les hyperboloïdes : $a^n = y^{n-k} x^k$.

Dans une démarche visiblement inspirée par Wallis, Leibniz dresse plusieurs tables permettant le calcul de ces différentes quadratures. Leibniz pose alors une question surprenante :

Il subsiste d'innombrables figures dont on peut obtenir la quadrature par cette même méthode et qui ne figurent pas dans la table précédente, comme celles dans lesquelles les exposants sont ou bien comme des nombres rompus, ou bien comme des entiers

15. La grande diffusion de ces lettres est sans doute l'une des raisons principales pour lesquelles on parle aujourd'hui de « la formule du binôme de Newton » pour désigner le développement du binôme.

ajoutés à des rompus. Par exemple : $ax^{\frac{1}{2}} = y$. Mais cela se réduit à cette équation : $\frac{ax}{2} = x^2$. Mais ce qu'il faudrait chercher plus loin à leur sujet, c'est s'il est possible qu'on ait des exposants qui soient des nombres sourds¹⁶. [A VII, 4, 611]

Cette question adopte une démarche originale par rapport à celle de Wallis. Pour la quadrature du cercle chez Wallis, ou chez Mengoli, il s'agit de trouver comment combler les espaces vides d'une table *a posteriori*. De fait, ces derniers partent tous les deux du constat que l'équation cartésienne du cercle fait intervenir des racines carrées, ce qui les pousse à chercher des quadratures pour des courbes ayant des degrés intermédiaires, en l'occurrence des moitiés de degré. Leibniz n'étudiera pas ces démonstrations avant la fin de son séjour à Paris, après qu'il aura lu le traité *Circolo* en 1676 [Mengoli 1672]. Ici, la quadrature du cercle n'est pas évoquée. Il ne s'agit pas de trouver une place dans la table pour des courbes qui ont des degrés atypiques, mais plutôt de considérer en premier lieu les places manquantes, pour se demander si elles correspondent à des degrés qu'on n'avait pas considérés jusque-là.

Méthode de quadrature

Commençons par décrire la méthode de quadrature qu'emploie Leibniz dans ces textes. Ce que nous décrivons ici découle de la démonstration que Leibniz effectue au sein de la *Pars prima – De parabolæidum quadratura* dans le *De parabolæidum et hyperbolæidum quadratura III* [A VII, 4 B, n° 39₁].

Dans la figure suivante, Leibniz montre que l'aire du triangle *AFG* vaut la moitié de celle du rectangle *WQ*. Le cœur de la démonstration repose sur le triangle caractéristique *FGY* et le fait qu'il est semblable au triangle *AMK*. Ainsi, on a :

$$\frac{FG}{YG} = \frac{AK}{AM}$$

16. « Innumeræ supersunt figuræ; eadem methodo quadrabiles, quæ in tabula præcedente non continuentur, uti, in quibus exponentes sunt ut numeri fracti, aut ut integri ad fractos, v. g. $ax^{\frac{1}{2}} = y$, sed id reducitur ad hanc æquationem : $\frac{ax}{2} = x^2$. Sed in hæ culterius inquirendum, et an exponentes surdi esse possint. »

Or AM est la hauteur du triangle AFG et $AK = WQ$. Ainsi, si l'on note a_1 l'aire du triangle AFG et a_2 celle du rectangle WQ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{FG \cdot AM}{2} \\
 &= \frac{YG \cdot AK}{2} \\
 &= \frac{YG \cdot WQ}{2} \\
 &= \frac{a_2}{2}
 \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement pour tous les points F d'abscisse D , sur la courbe comprise entre A et G , Leibniz obtient que l'aire du bas dans la figure ci-dessous est égale à la moitié de l'aire du haut. Il note z^2 l'aire du milieu, qui est la quadrature à déterminer, et b^2 l'aire du rectangle $AQGE$.

Leibniz affirme qu'il existe un rapport constant entre les abscisses de la courbe et les projetés de la tangente sur l'axe. Autrement dit, le rapport entre AE et AK est constant quel que soit le point G de la courbe. Cette propriété n'est pas démontrée par Leibniz, mais elle est selon lui vérifiée par les courbes paraboliques et hyperboliques. Il note β ce rapport. Il en déduit que ce rapport est également celui de l'aire du haut sur l'aire du milieu z^2 .¹⁷

17. Sans le dire, Leibniz applique ici le raisonnement des indivisibles de Cavalieri, dont on sait qu'il a lu les grands principes peu avant de partir pour Mayence en 1669. Ce raisonnement est très présent dans l'œuvre de Wallis.

Ainsi, il obtient la relation suivante :

$$\frac{b^2}{2} = \underbrace{z^2}_{\text{aire centrale}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{z^2}{\beta}}_{\text{aire du bas}}$$

La quadrature cherchée vaut donc :

$$z^2 = \frac{b^2}{2 + \frac{1}{\beta}}$$

Leibniz peut ainsi dresser une table des différentes quadratures de paraboloïdes selon la valeur du paramètre β . Il couple la méthode différentielle naissante qu'il a puisée chez Pascal avec des principes d'indivisibles plus classiques qu'il a pu voir chez Wallis. Il est clair que le jeune mathématicien ignore à ce moment les formules de dérivation et d'intégration des courbes paraboloïdes, à savoir :

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad \text{et} \quad d(x^n) = nx^{n-1} dx.$$

La propriété des paraboloïdes et des hyperboloïdes

Tout au long du groupe de textes consacrés à la question de la quadrature des paraboloïdes, Leibniz affirme que ces courbes respectent une propriété remarquable concernant leur tangente.

Cette propriété, déjà évoquée ci-dessus, affirme que le rapport entre la grandeur qui sépare l'abscisse d'un point du sommet de la courbe, c'est-à-dire $AX = x$ sur la figure, la grandeur qui sépare cette abscisse du point de

En réalité, Leibniz connaît la réponse à cette question, puisqu'il sait comment exprimer le rapport β en fonction des exposants présents dans la forme algébrique. De fait, Leibniz annonce que si la courbe a la forme $y^n = a^{n-k}x^k$, alors le rapport β vaut :

$$\beta = \frac{n}{k}$$

Et puisque β est le rapport des exposants de la puissance de x et y ²⁰. [A VII, 4, 599]

Ceci empêche de croire que Leibniz aurait simplement défini les courbes paraboloides ou hyperboloides comme celles qui vérifient la propriété du rapport β constant. En effet, il semble bien qu'il définisse ces courbes par leurs formes algébriques, comme nous l'avons présenté en commençant cette étude. Une question naturelle se pose alors : comment Leibniz déduit-il la propriété du rapport β constant à partir des formes algébriques ? Comme nous l'avons dit, Leibniz ne fournit aucune démonstration, ce qui nous mène vers la tâche périlleuse qu'est la reconstitution.

3.2 L'exposant plongé dans la tangente

Nous exposons plusieurs méthodes qui permettent de retrouver la propriété du rapport β constant à partir de l'équation de la courbe. Comme Leibniz n'en donne aucune, il est très vraisemblable qu'il n'ait tout simplement pas de démonstrations à sa disposition. Néanmoins, cette propriété n'est pas naturelle et requiert tout de même une certaine méthode de découverte. Il est possible qu'il tire cette propriété d'une source textuelle ou orale, mais d'une part il ne la fournit pas, et d'autre part le rapport que cette propriété établit entre exposants et tangentes est assez novateur.

La première méthode, assez élémentaire, est construite sur le triangle caractéristique. Le triangle caractéristique est semblable au triangle AYB , et on a :

$$\frac{y}{x+t} = \frac{dy}{dx}$$

Or, en différenciant la forme du paraboloïde $y^n = a^{n-k}x^k$, on obtient $ny^{n-1}dy = a^{n-k}kx^{k-1}dx$ et donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ka^{n-k}x^{k-1}}{ny^{n-1}}$$

figuram, etsi paraboloeidum forma enuntiari non possit. » – *Nota Bene* : Dans le groupe de textes, Leibniz réalise plusieurs fois le même diagramme, mais le nom des lettres change. Pour simplifier la compréhension du lecteur, nous changeons le nom des points dans la traduction pour qu'ils correspondent à la figure que nous donnons, qui est la première que réalise Leibniz.

20. « Et quia β est ratio exponentium potestatis x et y . »

On peut alors retrouver la valeur de β :

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{x+t}{x} \\
 &= \frac{x+t}{y} \frac{y}{x} \\
 &= \frac{ny^{n-1}}{ka^{n-k}x^{k-1}} \frac{y}{x} \\
 &= \frac{n}{k} \frac{y^n}{a^{n-k}x^k} \\
 &= \frac{n}{k}
 \end{aligned}$$

Nul doute que c'est cette méthode qu'utilisera Leibniz dès la fin des années 1670, lorsque son calcul différentiel aura vraiment pris forme. Mais ici, Leibniz ne maîtrise sans doute pas la formule classique $d(x^n) = nx^{n-1}dx$. Premièrement, s'il disposait de cette démonstration, il l'aurait sûrement introduite, étant donné le caractère apodictique de sa démarche dans ces textes. Deuxièmement, s'il possédait la formule des différences et des sommes, il aurait résolu par cette voie le problème de quadrature sans avoir à passer par la méthode géométrique de transmutation, c'est-à-dire par le calcul de l'aire formée par les tangentes.

La méthode de Descartes

En réalité, il tire sans doute cette propriété de la règle de Hudde, sur laquelle il travaille à cette même époque. Dans ce contexte lié au triangle caractéristique, il est assez naturel que ce soit la méthode des tangentes qui intéresse le plus le jeune Leibniz au sein du volume cartésien.

Dans *La Géométrie*, Descartes a l'idée d'utiliser le cercle tangent pour caractériser d , paramètre de la normale à la courbe. L'intersection entre la courbe et le cercle est une solution double, puisqu'en déplaçant le cercle de façon infinitésimale, la tangente se transforme en double intersection. Ainsi, Descartes montre que l'équation du cercle a une racine double, si l'on considère que les abscisses et les ordonnées respectent également la relation imposée par la courbe. En plus de ce raisonnement d'analyse infinitésimale, Descartes se propose de distinguer l'abscisse inconnue x de sa valeur une fois connue e . On obtient :

$$y^2 + d^2 - r^2 = (x - e)^2 z$$

La quantité z est le polynôme en x quotient de la division par $(x - e)^2$. Pour exprimer l'inconnue d en fonction de l'inconnue x , on pose $v = XC = x + d$.

Ainsi, si $y^n = a^{n-k}x^k$, on pose une nouvelle variable $u = x^{\frac{1}{n}}$. Comme u est la nouvelle inconnue dont dépend désormais le polynôme, on ne peut plus dire que x soit racine double mais seulement que u est racine double. Ainsi, on ne factorise pas le polynôme de l'équation par le facteur $(u^n - e)^2$ de degré $2n$ mais seulement par $(u - f)^2$, f étant la quantité connue de u . On obtient alors l'équation :

$$a^{2-\frac{2k}{n}}u^{2k} + (v - u^n)^2 - r^2 = (u - f)^2z$$

avec $z = \alpha_0 + \alpha_1u + \alpha_2u^2 + \cdots + \alpha_{2n-3}u^{2n-3} + u^{2n-2}$

En développant l'expression $(u - f)^2z$, on obtient une expression polynomiale dont on peut identifier les coefficients. En identifiant les coefficients des degrés supérieurs à 2, on obtient les coefficients de z . Puis en identifiant celui du degré 1, on trouve la valeur de v , que l'on cherche. L'identification de la constante donne la valeur de r^2 qui n'est pas nécessaire. On obtient donc :

$$\star \alpha_0 = (2n - 1)f^{2n-2} + a^{2-\frac{2k}{n}}(2k - 1)f^{2k-2} - 2v(n - 1)f^{n-2}$$

$$\star \alpha_1 = (2n - 2)f^{2n-3} + a^{2-\frac{2k}{n}}(2k - 2)f^{2k-3} - 2v(n - 2)f^{n-3}$$

En identifiant le premier degré, on obtient $2f\alpha_0 = f^2\alpha_1$, ce qui permet d'obtenir la valeur de v :

$$v = f^n + \frac{k}{n}a^{2-\frac{2k}{n}}f^{2k-n}$$

Or f est la valeur connue de u . Donc $f^n = x$. On peut donc écrire :

$$v = x + \frac{k}{n}\frac{y^2}{x}$$

Or, d'après la figure, y est la moyenne proportionnelle de d et $x + t$. En effet, les triangle ABY et AYC' sont semblables, donc :

$$\frac{x+t}{y} = \frac{y}{d}$$

Nous avons, dès lors, les éléments suffisants pour déterminer β .

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{x+t}{x} \\ &= \frac{x+t}{y} \frac{y}{x} \\ &= \frac{y}{d} \frac{y}{x} \\ &= \frac{y^2}{(v-x)x} \\ &= \frac{n}{k}\end{aligned}$$

La méthode de Descartes se généralise sans problème tant que $k = 1$. En effet, Descartes choisit y comme variable, et le changement de variable passant par une racine que nous avons dû opérer n'est pas nécessaire. Ce changement de variable $x = u^n$ constitue un ajout anachronique qui donne à la méthode cartésienne le pouvoir de calculer les tangentes pour toutes les courbes paraboloides que Leibniz considère. Sans cet ajout, il faut se restreindre au cas $k = 1$ et éliminer x au lieu de y . Descartes n'applique d'ailleurs cette méthode que dans le cas très simple de la parabole, à savoir quand $n = 2$ et $k = 1$.

La règle de Hudde

Leibniz étudie la méthode de Descartes peu avant le groupe de textes sur les paraboloides, dans un texte intitulé *De tangentium methodo* [A VII, 4 B, n° 35]. Il donne explicitement sa référence, à savoir la page 41 de l'édition latine de *La Géométrie*. Leibniz fait également référence à la règle de Hudde, reconnue comme une simplification de la méthode de tangente de Descartes. En effet, Hudde montre qu'il suffit de multiplier terme à terme le polynôme par une suite arithmétique pour obtenir le résultat. De fait, multiplions terme à terme le polynôme de notre équation par une suite arithmétique de raison l .

$$(2nl).u^{2n} + (2kl).a^{2-\frac{2k}{n}}u^{2k} - (nl).2vu^n + (0l).(v^2 - r^2) = 0$$

La résolution de cette équation donne immédiatement la valeur de v :

$$v = u^n + \frac{k}{n}a^{2-\frac{2k}{n}}u^{2k-n} = x + \frac{k}{n}\frac{y^2}{x}$$

On retrouve β par le même raisonnement que précédemment. Dans le *De tangentium methodo*, Leibniz souhaite montrer que, dans le cas de l'ellipse, la méthode de Descartes est plus adéquate que celle de Hudde, contrairement aux apparences :

Je pense donc qu'il nous faut recourir à la méthode de Descartes des deux racines égales, plutôt qu'à celle de Hudde²¹. [A VII, 4, 590]

L'ellipse n'est pas une courbe parabolôide et le rapport β n'est pas constant. Pour notre question, il suffit de voir ce que Leibniz dit très brièvement de la règle de Hudde.

Pour trouver les tangentes ou les perpendiculaires des courbes, il me semble que la méthode de Hudde est la plus commode. En effet, ayant trouvé le carré de la perpendiculaire CY , et ayant éliminé l'une des deux indéterminées, à savoir l'abscisse x , AX , ou l'ordonnée y , AY , à partir d'une équation, comme dicté par Descartes, puis à l'aide d'une équation exprimant la nature d'une certaine courbe, de façon à ce qu'il reste une seule des deux indéterminées, par exemple l'abscisse x , ceci étant fait, je dis que Hudde, pour chaque terme, multiplie par l'exposant de x les termes de l'équation ainsi produite. Et c'est pourquoi on élimine les termes dans lesquels n'apparaît aucun x . L'équation ainsi engendrée donnera la perpendiculaire²². [A VII, 4, 585]

Ainsi, la méthode de Hudde est la plus simple pour Leibniz, quand il s'agit de déterminer des tangentes. Il dit explicitement que cette méthode consiste à multiplier les termes par leurs propres exposants. Or Hudde n'emploie pas ce vocabulaire. Il se contente de parler de suite arithmétique :

Premièrement, si dans l'équation proposée, il existe deux racines égales, je la multiplie par la progression arithmétique de mon choix, à savoir le premier terme de l'équation par le premier de

21. « Ergo nos ad Cartesii methodum duarum radicum æqualium, potius quam Huddenianam, recurrere debere arbitror. »

22. « Ad tangentes vel perpendiculares curvarum inveniendas, mihi commodissima Huddenii ratio videtur, nimirum ille invento quadrato perpendicularis PC ; atque altero indeterminatarum y . AM abscissæ, vel x . CM applicatæ, ex æ quatione, ut a Cartesio præ scriptum est, ope æquationis cuiusdam naturam curvæ exprimentis eliminato; ita ut altera indeterminatarum, v. g. abscissa y . tantum restet; hoc inquam facto Huddenius æ quationis inde productæ terminos multiplicat per exponentem ipsius y in unoquoque termino repertæ. Atque ideo termini in quibus nulla est y abiciuntur. Inde orta æquatio perpendicularem dabit. » – *Nota Bene* : Pour simplifier la compréhension du lecteur, nous changeons le nom des points dans la traduction pour qu'ils correspondent à la figure que nous donnons, qui est la première que réalise Descartes.

la progression, le second terme de l'équation par le second de la progression et ainsi de suite. Et le produit ainsi obtenu sera égal à 0²³. [Descartes 1659, 433]

Pourtant, dans ses exemples, Hudde considère majoritairement la progression arithmétique naturelle, et ses termes sont alors formellement identiques aux exposants. Certes, sa proposition est plus générale puisque la règle fonctionne de fait avec n'importe quelle progression arithmétique, dont la progression arithmétique naturelle. Mais le fait que Hudde ne parle jamais d'exposants dit quelque chose de sa conception des puissances. Il est possible que pour lui, la lecture de Leibniz n'ait pas de sens, ou manque franchement de rigueur. Un exposant n'a pas la même nature qu'un simple facteur. Le passage que fait Leibniz du statut de l'un au statut de l'autre n'est pas un acte anodin. Ce transfert ouvre une porte immense pour Leibniz.

La preuve de Hudde

La propriété des paraboloïdes et des hyperboloïdes a donc sans nul doute été vérifiée par Leibniz sur des cas simples, à partir de la méthode de Hudde, puis induite sur la classe générale de ces courbes. Évidemment, la méthode de Hudde se traduit aujourd'hui par le fait qu'une racine double est encore la racine du polynôme dérivé. En effet, la construction de Hudde, à savoir multiplier l'équation terme à terme par une progression arithmétique, produit le polynôme dérivé de l'équation, multiplié ou divisé par une certaine puissance de l'indéterminée. Mais si la méthode de Descartes traduit explicitement un raisonnement infinitésimal, ce n'est pas le cas de la méthode de Hudde. On ne trouve pas de méthode d'invention dans l'édition latine de *La Géométrie*. Néanmoins, la démonstration que donne Hudde reste éclairante quant au rôle que cette règle a pu jouer chez le jeune Leibniz.

Hudde développe sa démonstration pour le degré 5, mais nous l'adaptions au cas général. Il débute par le polynôme factorisé :

$$(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)(x - \alpha)^2$$

Le développement du polynôme donne :

$$\begin{array}{ccccccc} x^{n+2} & - & 2\alpha x^{n+1} & + & \alpha^2 x^n & & \\ & & a_{n-1} x^{n+1} & - & 2\alpha a_{n-1} x^n & + & \alpha^2 a_{n-1} x^{n-1} \\ & & & & \ddots & & \ddots \\ & & & & a_1 x^3 & - & 2\alpha a_1 x^2 & + & \alpha^2 a_1 x \\ & & & & & & a_0 x^2 & - & 2\alpha a_0 x & + & \alpha^2 a_0 \end{array}$$

23. « Primo si in Proposita æquatione duæ æquales radices existant, multiplico eam paer Arithmeticam Progressionem pro libitu assumptam : nimirum, 1^{um} terminum æquationis per 1^{um} terminum progressionis, 2^{dum} terminum æquationis per 2^{dum} terminum progressionis, & sic deinceps ; & Productum, quod inde sit, erit $\propto 0$. »

Si $x = \alpha$, alors on obtient, pour la ligne k , l'équation suivante : $\alpha^{k+2} - 2\alpha^{k+2} + \alpha^{k+2} = \alpha^{k+2}(1 - 2 + 1)$. Hudde remarque alors qu'une suite arithmétique est toujours annulée par la suite de coefficients 1, -2 , 1 :

$$1.b + (-2).(b + c) + 1.(b + 2c) = 0$$

Ainsi, en multipliant chaque colonne par un terme d'une suite arithmétique, Hudde explique que l'équation s'annule toujours lorsque $x = \alpha$. Il suffit alors de décaler à chaque ligne les rangs de la progression arithmétique de sorte que tous les termes d'une même puissance soient multipliés par un même terme de la suite :

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{b}.1x^{n+2} & (\mathbf{b} + \mathbf{c}).(-2)\alpha x^{n+1} & (\mathbf{b} + 2\mathbf{c}).1\alpha^2 x^n & \\
 & (\mathbf{b} + \mathbf{c}).1a_{n-1}x^{n+1} & (\mathbf{b} + 2\mathbf{c}).(-2)\alpha a_{n-1}x^n & (\mathbf{b} + 3\mathbf{c}).1\alpha^2 a_{n-1}x^{n-1} \\
 & \ddots & \ddots & \ddots \\
 (\mathbf{b} + (\mathbf{n} - 1)\mathbf{c}).1a_1x^3 & (\mathbf{b} + \mathbf{n}\mathbf{c}).(-2)\alpha a_1x^2 & (\mathbf{b} + (\mathbf{n} + 1)\mathbf{c}).1\alpha^2 a_1x & \\
 & (\mathbf{b} + \mathbf{n}\mathbf{c}).1a_0x^2 & (\mathbf{b} + (\mathbf{n} + 1)\mathbf{c}).(-2)\alpha a_0x & (\mathbf{b} + (\mathbf{n} + 2)\mathbf{c}).1\alpha^2 a_0
 \end{array}$$

Différences finies

La preuve de Hudde relève à première vue de la synthèse, car les termes de cette suite arithmétique ne sont pas construits par le raisonnement mais trouvés *ex nihilo* comme solution adaptée aux coefficients 1 ; -2 ; 1. Pourtant, ce choix trouve son sens dans la théorie des différences finies de Leibniz.

Nous présentons ici un modèle moderne de la théorie des différences finies dont Leibniz élabore les premiers germes au cours de son séjour parisien, puis qu'il expose dans sa forme définitive à la fin de sa vie dans son traité *Historia et origo calculi differentialis*. Considérons la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_0, a_1, a_2, \dots$ et l'application $\mathcal{F}$ sur les suites qui consiste à décaler les progressions d'un rang :

$$\mathcal{F}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

En appliquant $\mathcal{F}$ plusieurs fois de suite, on décale d'autant les termes de la progression. Comme $\mathcal{F}$ est une application linéaire, on peut appliquer un polynôme en $\mathcal{F}$ à une suite a :

$$b_0 Id + b_1 \mathcal{F} + b_2 \mathcal{F}^2 + \dots + b_p \mathcal{F}^p = (b_0 + b_1 X + \dots + b_p X^p)(\mathcal{F})$$

On voit que la différence entre deux termes d'une suite $a_n - a_{n+1}$ revient à appliquer le polynôme $1 - X$ en $\mathcal{F}$ sur la suite a :

$$((1 - X)(\mathcal{F})(a))_n = a_n - a_{n+1}$$

On comprend ainsi que les différences successives correspondent aux puissances $(1 - X)^p$ et les sommes successives sont représentées par les inverses de ces puissances. Considérons leurs développements :

$$(1 - X)^p = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} (-1)^k X^k$$

$$\frac{1}{(1 - X)^p} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{p+k}{k} X^k$$

Ainsi, les suites finies de coefficients binomiaux $\binom{p}{k}$ sont les caractéristiques des différences et les suites infinies des ordres numériques $\binom{p+k}{k} = \binom{p+k}{p}$ sont les caractéristiques des sommes. Le produit des deux développements montre que la multiplication alternée et terme à terme des coefficients binomiaux par les ordres numériques s'annule :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{p+k}{j+k} = 0$$

La règle de Hudde s'appuie sur cette propriété conférée aux nombres combinatoires par les sommes et les différences. Dans la généralisation qu'il propose pour les racines triples, quadruples, etc., Hudde explique qu'il faut appliquer successivement des progressions arithmétiques, ce qui revient à générer des combinaisons d'ordres numériques. Ainsi, contrairement à la méthode cartésienne, fondée sur le calcul infinitésimal, la méthode de Hudde fonctionne sur le calcul différentiel. Bien que plongé dans l'étude des relations qu'entretiennent sommes et différences, Leibniz n'a alors pas acquis la maturité nécessaire, en 1673, pour voir dans la règle de Hudde la conséquence d'un calcul de différence.

3.3 Wallis et la tabulation, un obstacle au transfert

L'*Arithmetica infinitorum* de John Wallis constitue assurément une source majeure de Leibniz à cette époque [Wallis, John 1656]. Cette inspiration montre que la démarche combinatoire leibnizienne n'est pas entièrement fondée sur le calcul formel et les jeux d'écritures algébriques, mais qu'elle s'est tournée très tôt vers la combinatoire des tables.

L'*Arithmetica infinitorum* de Wallis

John Wallis publie en 1656 un traité majeur qu'il intitule « L'Arithmétique des infinis » (« *Arithmetica infinitorum* »). Ce texte, très célèbre, obtient un rapide succès dans tous les milieux savants européens. Puis lu, étudié et commenté par de nombreux auteurs des siècles suivants, il connaît une longue et considérable

postérité. Comme nombre des ouvrages de mathématiques qui ont marqué cette période, c'est un texte qui traite de quadratures. Le livre se découpe en deux parties, cf. [Panza 2004, 333–367].

La première partie est consacrée à la recherche d'un algorithme propre à fournir la quadrature d'une certaine classe de courbes géométriques simples, constituée par généralisation des conditions qui caractérisent une parabole ou une hyperbole ; la deuxième partie vise une extension de cet algorithme propre à fournir la quadrature du cercle. Les termes « algorithme de quadrature » et « quadrature du cercle » ne doivent pas être entendus ici selon leur signification moderne. [Panza 2004, 333]

Nous allons nous intéresser à la première partie que l'on décrit généralement, en guise de simplification dans notre langage contemporain, comme s'attachant au calcul des intégrales suivantes :

$$\int_0^x t^n dt = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

En réalité, décrire plus fidèlement la nature de l'opération dont Wallis souhaite donner la recette n'est pas chose aisée car le mathématicien britannique fonde sa méthode sur un parallèle subtil entre arithmétique et géométrie, ce qui explique par ailleurs le titre qu'il donne à son livre. Son approche, qui mêle inductions, heuristique et intuitions géométriques, rend complexe, pour le lecteur moderne, l'interprétation des processus de calcul qu'il met en place sur les objets de son traité qui sont, *in fine*, des courbes et des surfaces.

Si l'on considère une série infinie de quantités partant du point, c'est-à-dire de 0, et croissant continûment selon une raison quelconque, d'une puissance simple ou bien composée de simples, alors, le rapport du tout à la série ayant autant de termes et tous égaux au terme maximal de la première, ce rapport sera celui de l'unité à l'indice de cette puissance, augmenté d'une unité²⁴. [Wallis, John 1656, Proposition 64, 52]

De fait, Wallis établit par induction l'égalité suivante :

$$\frac{1^a + 2^a + 3^a + 4^a + \cdots + \infty^a}{\infty^a + \infty^a + \infty^a + \infty^a + \cdots + \infty^a} = \frac{1}{1+a}$$

La suite de la proposition traite de la question de la nature de ces indices qui nous intéresse particulièrement ici :

24. « Si intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu 0 inchoatarum, & continue crescentium pro ratione cujuscunq; potestatis, sive simplicis sive ex simplicibus compositæ; erit totius ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ est Unitatis ad Indicem istius potestatis unitate auctum. »

Je pose que les indices des primaires, des secondaires, des ternaires, des quaternaires, etc. (c'est-à-dire de la puissance latérale, carrée, cube, bicarrée, etc.) sont 1, 2, 3, 4, etc., et ceux des sous-secondaires, sous-ternaires, sous-quaternaires, etc. (c'est-à-dire des racines carrées, cubiques, bicarrées, etc., des primaires ou proportionnels de façon arithmétique) sont $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Je produis l'indice composé de n'importe quelle puissance composée à partir des indices des composants²⁵. [Wallis, John 1656, Proposition 64, 52]

Wallis pose donc des indices pour les degrés dits simples, à savoir les degrés entiers et sous-entiers correspondant aux puissances entières et aux racines entières de la puissance de degré 1. Puis il rapporte que les indices des puissances composées sont composés des indices des composants. En d'autres termes, la composition des degrés se traduit dans la composition des indices. Wallis donne l'exemple de l'indice de la puissance cube (indice 3) de la racine (indice $\frac{1}{2}$) du quintuple (indice 5) dont l'indice est par suite : $3 \times \frac{1}{2} \times 5 = \frac{15}{2}$. Par la donnée de ces simples et de ces règles de composition, il est clair qu'on ne peut pas considérer autre chose que des indices rationnels. Pourtant, Wallis explicite à la fin de la proposition le fait que l'indice n'est pas nécessairement un nombre entier ou un rapport de nombres entiers, comme c'est pourtant le cas de tous les indices qu'il considère dans ce livre :

Si l'indice est supposé irrationnel, comme par exemple $\sqrt{3}$, alors le rapport sera comme celui de 1 à $1 + \sqrt{3}$.²⁶ [Wallis, John 1656, Proposition 64, 53]

La méthode de Wallis se fonde sur une induction. Pour tout indice entier a , il montre que son calcul arithmétique de quadrature opère le transfert de a depuis le statut d'exposant vers celui de quotient. Une fois déterminée la place formelle de a au sein du quotient, l'affirmation de Wallis concernant les indices irrationnels est peu coûteuse.

Comme nous l'avons vu, ce n'est pas exactement cette démarche que Leibniz entreprend au sein du groupe de textes sur les paraboloides. L'extension que propose Leibniz est plus lourde de conséquences, puisqu'en considérant le rapport β comme irrationnel, Leibniz sait qu'il désigne des courbes parfaitement possibles et facilement constructibles, pour peu qu'on puisse générer ce rapport. Il faut donc que ces puissances irrationnelles ne soient pas de simples jeux d'écriture mais définissent une relation concrète

25. « Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quatranorum, &c. (sive potestatis Lateralis, Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) indicem statuo 1, 2, 3, 4, &c. subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. (sive Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c. primanorum, sive arithmetice proportionalium) indicem statuo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c. Potestatis cujusvis compositæ indicem facio ex componentium indicibus compositum. »

26. « Sin Index supponatur irrationalis, puta $\sqrt{3}$; erit ratio, ut 1 ad $1 + \sqrt{3}$. »

entre des quantités. Au contraire, chez Wallis, considérer un indice irrationnel ne l'engage pas directement à concevoir une courbe qui y serait associée. L'originalité de Wallis réside dans cette rupture qu'il établit entre les courbes et leurs degrés, les premières étant l'expression d'une pure géométrie tandis que les derniers relèvent de procédures arithmétiques. Une même courbe peut correspondre à différents degrés selon la situation géométrique, par exemple la parabole peut correspondre aux indices 2 et $\frac{1}{2}$. Mais inversement, un même indice peut correspondre à plusieurs courbes différentes. Par exemple, l'indice 1 correspond à la rectification de la spirale, la quadrature de la droite et la cubature du parabolôide de révolution. Finalement, Wallis réduit les problèmes de quadrature géométrique à des indices numériques dont les relations peuvent être capturées par des tables à double entrée qui présentent dans le même temps une classification des problèmes et une combinatoire d'opérations qui lient ces indices entre eux. Ce dernier aspect a visiblement inspiré le jeune Leibniz dans ses travaux sur les parabolôides.

Les tables de parabolôides

Dans sa dédicace, Wallis rapporte que la méthode d'interpolation s'est imposée à lui, par nécessité. Cherchant certaines raisons, certains indices, il est devenu nécessaire de combler des trous au sein des progressions et même de créer de nouvelles progressions composites.

J'en vins à croire que la raison ainsi cherchée était telle qu'elle n'était explicable ni par de vrais nombres ni même par des racines sourdes. J'ai de fait découvert un certain nombre de progressions numériques pour lesquelles, entre certains termes donnés, il en fallait interposer un autre pour que je sois en mesure d'exprimer la raison cherchée. Or, ces progressions sont telles qu'elles ne peuvent selon moi être appelées ni arithmétiques (où les incréments sont continuellement égaux) ni géométriques (où les nombres continuellement multipliés sont égaux), mais elles sont de telle sorte que les multiplicateurs continus ont des proportions arithmétiques, et c'est pourquoi elles sont dès lors bien plus composées que les géométriques. D'ailleurs, dans les progressions géométriques (où les multiplicateurs sont continuellement égaux), s'il arrive parfois qu'il soit possible (comme par exemple dans 1, 4, 16, 64, etc.) que les termes à interpoler à la moyenne entre chacun des termes soient exprimables par des nombres, ce ne serait pas, en revanche, le cas pour toutes (pensons à 1, 2, 4, 8, etc.), mais il serait nécessaire que nous indiquions de quelque manière que ce soit un nombre impossible, (pensons à $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, etc.²⁷). [Wallis, John 1656, 6^e page]

27. « *Eo devotum erat ut crederem rationem illam quæ quærebatur ejusmodi esse quæ nec veris numeris, nec quidem radicibus surdis esset explicabilis. Numerorum*

Leibniz entreprend lui aussi de dresser des tables à partir des résultats obtenus par sa méthode de quadrature. Pour rappel, si le paraboloïde possède un rapport β , la quadrature est donnée par la formule :

$$z^2 = \frac{b^2}{2 + \frac{1}{\beta}}$$

Cette table est constituée de quatre colonnes. Dans la première, on trouve les formes algébriques des paraboloïdes, classées selon une méthode combinatoire, c'est-à-dire la bipartition de l'exposant n de y . La deuxième colonne indique les rapports β associés à chaque formule. La ligne qui relie les rapports entre eux forme trois suites :

- * $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \text{etc.}$
- * $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \text{etc.}$
- * $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \text{etc.}$

Ces suites rappellent la définition des indices simples et composés chez Wallis.

Manuscripts de Leibniz – LH XXXV, 2, 1 fol. 95 v

enim progressionē aliquot inveni inter quarum datos terminos alius erat interpolandus, ut rationem quæsitam valeam exprimere. Eas autem progressionē tales esse ut nec Arithmeticae dici possint (ubi augmenta continua sunt æqualia,) nec Geometricæ (ubi numeri continue multiplicantes sunt æquales,) sed tales quæ continuos multiplicatores habeant arithmetice proportionales, adeoq; magis adhuc sint compositæ quam Geometricæ. Si autem in Geometrica progressionē, (sive continui multiplicatores sunt æquales,) quamvis aliquando fieri possit (verbi gratia, in 1, 4, 16, 64, &c.) ut interpolandi termini illius mediū sint numeris explicabiles, neq; item in omnibus (puta in 1, 2, 4, 8, &c.) id fieri possit sed necesse sit ut numerum impossibilem utcunq; indicemus, (puta $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, &c.) » – *Nota Bene* : Une partie endommagée de l'édition rend la transcription difficile.

La troisième colonne donne une nomenclature des différents paraboloïdes, fondée sur la composition des puissances. Là encore, la démarche s'inspire visiblement de Wallis. Pour finir, la dernière colonne donne les quadratures en fonction de b^2 . Au lieu de toutes les placer sur une même colonne, Leibniz étale les quadratures sur l'axe horizontal pour mettre en évidence des progressions. Cette opération est caractéristique de sa méthode combinatoire. L'objectif de la table n'est pas seulement de lister, mais de mettre en évidence des relations de progression qui permettent de compléter la table sans le moindre calcul extérieur, à partir d'un petit nombre de valeurs initiales. Cette démarche n'est pas simplement plus pratique ou plus efficace. Par le biais des relations au sein de la table, Leibniz a à cœur de saisir les relations qu'entretiennent les objets eux-mêmes. Ce processus peut être un des facteurs qui expliquent que Leibniz ne cherche pas à combler les trous dans la table, comme le fait Wallis. En effet, rajouter des termes intermédiaires entre deux termes successifs d'une progression tend à briser la relation que cette progression avait révélée. La table demeure un objet purement discret.

Comme nous l'avons évoqué, Leibniz éprouve des difficultés concernant la possibilité même d'écrire formellement des puissances irrationnelles :

À cette étape, il nous apparaît déjà qu'il y a une infinité d'autres figures dont on peut obtenir la quadrature par la même méthode que dans notre problème, bien qu'elles ne soient pas contenues dans la table des paraboloïdes, de quelque manière qu'on la poursuive. De sorte que la produite AK serait à l'abscisse AD ce qu'est un nombre entier est à un sourd, ou un sourd à un entier, ou encore un sourd à un sourd. En effet, si l'on pose que AK est à AD , ce que par exemple 1 est à $\sqrt{6} - 1$, la figure des paraboloïdes étant tirée des principes de la règle apportée, donnerait cette équation : $y^{\sqrt{6}} = ax^{\sqrt{6}-1}$, où x et y sont élevés à certaines dimensions imaginaires, telles que les puissances intermédiaires que l'on peut imaginer entre le carré et le cube, entre le cube et le carré-carré et autres. Je ne pense d'ailleurs pas que l'on puisse ramener ces formules au langage commun²⁸. [A VII, 4, 627]

Le transfert de l'exposant, impliqué par la règle de Hudde, est certes entamé, mais il n'est pas encore entièrement accompli. En effet, pour pouvoir

28. « Hinc iam illud apparet infinitas esse alias figuras, quæ eadem problematis nostri methodo quadrari possint, quanquam tabula parabolœidum utcunque continuata non contineantur, ut si producta AK , sit ad abscissam AD , ut numerus integer ad surdum, vel ut surdum ad integrum, vel surdus ad surdum. Nam si ponatur AK ad AD , exempli gratia, ut 1 ad $Rq6$. — 1. figura parabolœidum more ex regulæ allatæ præceptis tractata daret hanc æquationem : $y^{Rq6} = ax^{Rq6-1}$, ubi y et x ad dimensiones quasdam imaginarias, quales inter quadratum et cubum, cubum et quadrato-quadratum, aliasque potestates mediæ fingi possunt, ascendunt. Quas vero formulas ad communem enuntiandi rationem revocare, non adeo expeditum opinor futurum est. »

donner du sens à l'expression $a^{\sqrt{2}}$ à partir d'un rapport β irrationnel, il faut pouvoir considérer la forme comme primordiale. Il est nécessaire de postuler *a priori* qu'un paraboloïde se caractérise avant tout par sa forme y^a pour en déduire que si cet exposant a se trouve projeté dans un rapport β irrationnel, alors cet exposant a est irrationnel. Cette primauté donnée à la forme n'est pas encore réellement assurée au début du séjour parisien. L'écriture surélevée, à la Descartes, implique l'existence d'un certain degré spatial, qui devient imaginaire lorsqu'on parle d'exposant non-entier. Le même problème se pose pour les exposants fractionnaires ou les exposants irrationnels. Cette citation est la copie d'un passage raturé dans le même manuscrit. Ce passage permet de mieux comprendre en quoi les exposants irrationnels constituent un cas particulier pour Leibniz.

Et il n'est de fait pas possible d'expliciter des puissances dont les exposants seraient des nombres sourds, par exemple $y^{\sqrt{6}} = ax^{\sqrt{6}-1}$, et ce à moins que d'aventure on trouve une méthode pour lever l'irrationalité, ce qui arriverait en multipliant par lui-même $ax^{\sqrt{6}-1}$ autant de fois qu'il y a d'unités dans $\sqrt{6}$, on obtiendrait y^6 , mais l'autre membre de l'équation resterait dès lors entravé, puisque l'on aurait $y^6 = a^{\sqrt{6}}x^{6-\sqrt{6}}$.²⁹ [A VII, 4, 625]

C'est bien l'irrationalité de l'exposant que Leibniz pointe du doigt. Cette irrationalité s'implémente dans la forme, puisqu'il ne trouve pas d'opération rationnelle pour éliminer la racine dans l'exposant. Pourtant, dès la fin de l'année 1674, Leibniz se consacre à l'étude de la théorie des équations algébriques. La notion de forme prendra alors progressivement le pas sur la définition géométrique.

Tables continues et transfert algébrique

Leibniz franchit ces deux obstacles dans un texte de 1675, *De intercalatione numerorum combinatoriorum. De formulis omnium dimensionum ex artis combinatoriæ principijs*³⁰, plus d'un an avant la correspondance avec Newton sur les exposants fractionnaires. Dans ce texte, Leibniz se demande comment donner une expression littérale aux coefficients du triangle arithmétique. Notons que dans ce problème, l'exposant correspond au n de $\binom{n}{k}$ et non plus au k comme c'était le cas dans la *Dissertatio de arte combinatoria* :

29. « Neque potestates enuntiari possunt, quarum exponentes sint numeri surdi, v.g. $y^{Rq6} = ax^{Rq6-1}$, nisi quis forte methodum inveniatur, tollendi irrationalitatem, quod fieret ducendo ipsum ax^{Rq6-1} toties in se, quot in Rq 6 sunt unitates, fieret y^6 , sed altera æquationis pars non ideo statim ab æquatione liberata foret cum fiat $y^6 = a^{Rq6}x^{6-Rq6}$. »

30. LKK, n° 6, *De intercalatione numerorum combinatoriorum. De formulis omnium dimensionum ex artis combinatoriæ principijs*, janvier 1675.

Posons déjà une quantité y ayant pour exposant z , et qu'il faille développer, c'est-à-dire qu'on a $y = x + b$. Comment développerons-nous de façon générale y^z ? Les plus savants géomètres ont déjà découvert depuis quelques temps les nombres qu'ils appellent « figurés », $1, 2, 1; 1, 3, 3, 1$, etc., et ainsi $(x+b)^4 = 1x^4 + 4x^3b^1 + 6x^2b^2 + 4x^1b^3 + 1b^{431}$. [LKK, n° 6, *De intercalatione numerorum combinatoriorum. De formulis omnium dimensionum ex artis combinatoriæ principijs*, janvier 1675, p. 16]

Au travers de cette question, Leibniz pose la question du transfert de l'exposant. Mais ce transfert est un transfert formel. Il s'accomplit dans la formule. Leibniz l'écrit explicitement :

Dès lors si l'exposant de la dimension n'est pas 4 mais pour prendre un exemple universel, z , il faut expliquer la raison pour laquelle on exhibe les autres nombres transversaux à partir de la donnée z . Par exemple, comment on trouve 28, 56, 70 à partir de la donnée 8 ou bien 36, 84, 126 à partir de la donnée 9; et de même pour les autres³². [LKK, n° 6, janvier 1675, p. 17]

Il s'agit de retrouver l'exposant au cœur des coefficients du binôme. Le développement du binôme permet de déplacer l'exposant vers les coefficients de la formule. Comme ces coefficients sont des facteurs homogènes de l'expression algébrique, l'opération que Leibniz met en valeur est très loin d'être anodine : il s'agit de transformer la nature et la fonction de l'exposant pour lui donner une place homogène aux autres quantités, et ainsi permettre d'« intégrer les exposants dans le calcul³³ ». Dans cette seconde voie de transfert, Leibniz doit pouvoir donner un sens à des coefficients binomiaux irrationnels pour pouvoir donner un sens à l'exposant irrationnel d'un binôme. Contrairement à la méthode de la tangente, la complétion de la table s'avère nécessaire pour pouvoir accomplir cette tâche, parce que c'est avant tout une table, en l'occurrence le Triangle Arithmétique, qui engendre les coefficients binomiaux, tandis que le rapport β est une construction géométrique.

C'est ainsi que Leibniz évoque les tables continues :

Or, j'appelle combinatoire la figure dont la courbe traverse aux extrémités de toutes les droites des nombres combinatoires,

31. « Ponamus jam quantitatem y exponente z affectam esse explicandam sive esse $y \sqcap x + b$. quo modo generaliter explicabimus : y^z ? jam repertum est dudum a doctissimis Geometris numeros quos vocant Figuratos, 1.2.1 1.3.3.1, etc. itaque $x + b,^4 \sqcap 1x^4 + 4x^3b^1 + 6x^2b^2 + 4x^1b^3 + 1b^4$. »

32. « Jam si dimensionis exponens non sit 4, sed universalis exempli causa z , explicanda ratio est, per quam ex data z exhibeantur cæteri numeri transversales, nempe quomodo ex data 8, inveniuntur 28, 56, 70 et ex data 9 inveniuntur 36, 84, 126 et ita in cæteris. »

33. Cf. [A VII, 5, 261] : « calculos in quos exponentes ingrediuntur ».

selon les ordres numériques des représentants quand on applique indéfiniment une continue interpolation. Si l'on comprend l'interpolation comme résolue jusqu'à l'infini, et qu'on rend les figures combinatoires géométriques (en effet, elles ne sont jusqu'ici qu'arithmétiques), elles dégénèrent : les triangulaires en parabole, les pyramidaux en parabolôide cubique simple, et les autres en parabolôide simples de degrés supérieurs³⁴. [LKK, n° 6, janvier 1675, p. 31]

Leibniz ne fait pas référence à Wallis, pourtant l'inspiration est claire. Comme dans l'*Arithmetica infinitorum*, le jeune philosophe souhaite construire le pont qui relie l'arithmétique et la géométrie. Ce pont se précise entre une combinatoire discrète générée par le binôme et la géométrie continue des paraboles et autres parabolôides, dont il avait pressenti deux ans plus tôt qu'ils pouvaient être la voie vers les exposants généraux. Un certain projet semble se dessiner au travers de cet extrait : celui de voir dans cette table des lignes combinatoires, généralisation continue du triangle arithmétique, le fondement universel de l'analyse et de l'arithmétique. Un objet général qui sous-tend les mécanismes du discret comme du continu, de l'algébrique comme du transcendant.

4 Conclusion

Cette étude a montré que la position de Leibniz ne se trouve pas nécessairement là où l'on peut s'y attendre. Par la propriété sur le rapport β , tirée probablement de la règle analytique de Hudde, Leibniz établit un des premiers ponts différentiels entre algèbre et géométrie. C'est par ce pont que le transfert de l'exposant peut s'opérer, délaissant sa nature combinatoire d'indice de dénombrement pour trouver le statut géométrique d'un rapport de grandeurs. Il dispose donc, à première vue, des outils nécessaires pour concevoir un exposant irrationnel général. Pourtant le jeune philosophe n'est pas convaincu par ces expressions formelles, car elles n'ont pas d'applicabilité. De fait, la preuve présentée est purement géométrique et infinitésimale. En y plaquant le résultat formel de Hudde, Leibniz obtient des tables quasi-muettes qui se contentent d'exhiber des relations linéaires entre les aires des courbes mais ne permettent aucunement de créer une manipulation opératoire sur les exposants, à l'image de ce que pourraient faire des formules comme $d(x^n) = nx^{n-1}dx$. Le transfert de l'exposant s'effectue directement dans le

34. « Figuram autem combinatoriam voco, cujus curva transit per extremitates omnium rectarum numeros combinatorios, secundum ordines numericos repræsentantium adhibita interpolatione indefinite continuata. Si interpolatio in infinitum absolvi intelligatur, et Figuræ combinatoriæ reddantur Geometricæ (hactenus enim non nisi Arithmetici sunt), degenerabunt in : Triangulares in parabolam ; pyramidales in parabolæ idem cubicam simplicem ; et ceteræ in parabolœides simplices altiores. »

cadre formel de l'expression algébrique. Mais ce n'est pas grâce à la formule de dérivation que Leibniz opère finalement ce transfert formel, mais plutôt au moyen du développement du binôme, plus d'un an avant que la formule générale ne lui soit communiquée par Newton. Serfati montre les profonds changements que revêt cette invention. Cependant, la découverte des exposants généraux n'est pas la conséquence du seul désir de faire dire plus à des notations en plaçant dans un signe un objet qu'il ne devrait par principe pas désigner. Cette découverte s'est faite en plusieurs étapes distinctes. Leibniz a d'abord généralisé le rapport β formellement semblable aux exposants. Puis, une fois convaincu par le développement du binôme, l'aspect opératoire qui en découle et que cette similitude caractérise l'exponentiation, alors seulement a-t-il pu concevoir les puissances irrationnelles. Ces opérations sont rendues possibles par la pratique des tables. L'*ars combinatoria* que pratique Leibniz pour les mathématiques ne se porte pas de prime abord sur la manipulation des caractères. Cet aspect vient dans un second temps après la première démarche combinatoire qui a véritablement convaincu Leibniz de sa fécondité, à savoir la manipulation des tables. Ce sont ces tables qui constituent le véritable outil d'invention.

Cette étude des premiers travaux de Leibniz révèle également une tension qui parcourt toute la carrière tant philosophique que mathématique du célèbre savant : le lien entre le continu et le discret. Certes, dans une démarche qui se donne pour but de généraliser des exposants entiers à des exposants variables, un tel lien s'engage naturellement. Mais il y a quelque chose de plus profond qui se joue dans ces premiers travaux. Leibniz découvre progressivement que ce lien n'est pas tant celui de l'approximation que celui de l'analogie :

Ces deux théorèmes ont ceci d'exemplaire qu'ils sont tous deux également valides dans chacun des deux calculs différentiels, numérique comme infinitésimal³⁵. [Leibniz & Gerhardt 1846, 6]

Ce parallèle que Leibniz évoque dans son célèbre *Historia et origo calculi differentialis* de 1714 se révèle déjà au travers des textes que nous avons étudiés, dans lesquels il s'agit de prolonger non seulement les substances, mais aussi les relations et les structures, par analogie.

Abréviations des sources principales

- A : Akademie Verlag, *Gottfried Wilhelm Leibniz, Sämtliche Schriften und Briefe*
- LKK : *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*, éd. E. Knobloch, *Studia Leibnitiana Supplementa*. Bd. XVI., Wiesbaden, 1976

35. « Quæ bina theorematum id habent egregium, ut æque locum habeant in utroque Calculo Differentiali, tam Numerico, quam Infinitesimali »

- LH : *Leibniz Handschrift*, Index du manuscrit et pagination dans le dépôt d'archive à la Bibliothèque de Hanovre.

Corpus leibnizien sur la thématique des exposants

Sources éditées

- A II, 1, n° 109 : Lettre à Jean Gallois (fin 1672)
- A III, 1, n° 88 : Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus, n° 5 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg (5.08.1676)
- A III, 1, n° 88 : Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus, n° 6 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg (08.1676)
- A III, 2, n° 38 : Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz (24.10.1676)
- A III, 2, n° 54 : Lettre à H. Oldenburg (01.07.1677)
- A III, 2, n° 346 : Lettre à C. Huygens (18.09.1679)
- A III, 4, n° 72 : Lettre de Leibniz pour les *Acta Eruditorum* (17.10.1684)
- A III, 4, n° 283 : Lettre à C. Huygens (13.10.1690)
- A III, 6, n° 113 : Lettre à Jean Bernoulli (16.05.1695)
- A III, 6, n° 133 : Lettre de Jean Bernoulli (18.06.1695)
- A VI, 1, n° 8 : *Dissertatio de arte combinatoria* (03.1666)
- A VII, 1, n° 31, *Tentamen primum dans in subseptione polygonorum regularium circulo inscriptorum* (fin 1672/début 1673)
- A VII, 3, n° 3 : *De numeris combinatoriis* (1672)
- A VII, 3, n° 57₂ : *Arithmetica infinitorum et interpolationum* (04.1676)
- A VII, 4, n° 39₁ : *Pars prima – De parabolæidum quadratura* dans le *De parabolæidum* et *Hyperbolæidum quadratura* III (1673)
- A VII, 5, n° 37 : *Logarithmi in hyperbola demonstrati* (24.10.1675)
- A VII, 5, n° 88 : *De exponentibus et indicibus ad quadraturas applicatis* (06.1676)
- A VII, 6, n° 1 : *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (04.1676)
- A VII, 6, n° 13 : *Aus und zu Mengolis Circulo* (1673 et 1676)
- A VII, 6, n° 32 : *Quadratura circuli et hyperbolæ arithmetica. Logarithmi* (07.1676)

- A VI, 6, n° 51 : *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et Hyperbolæ* (1676)
- LKK, n° 6, *De intercalatione numerorum combinatoriorum. De formulis omnium dimensionum ex artis combinatoriæ principiis*, (01.1675)
- G. W. Leibniz, *Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire, et le nouveau calcul des transcendentes dans le Journal des Sçavans*, N.34 (30.10.1694)
- G. W. Leibniz, *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum; et de Lege homogeneorum transcendentali* dans *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum*, Berlin, 1710
- G. W. Leibniz, *Historia et origo calculi differentialis*, éd. Gerhardt, Hahn, 1846

Sources inédites

- ★ LH XXXV, 1, 14 fol. 88 : De exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate (02.1677)
- ★ LH XXXV, 2, 1 fol. 43 : Sans titre, sur la série exponentielle (06.1676)
- ★ LH XXXV, 2, 1 fol. 68–69 – De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I. (03.1679)
- ★ LH XXXV, 2, 1 fol. 70–71 – Cyclometria tentata, primum per intercalationes, inde per polygona Expressio eius per logarithmum. Demonstratio impossibilitatis specialis tentata per series convergentes. Scheda II. (03.1679)
- ★ LH XXXV, 2, 1 fol. 72–73 – Cyclometria tentata, primum per intercalationes, inde per polygona expressionem per logarithmos, specialis impossibilitatis demonstratio tentata per convergentes series. Scheda III. (03.1679)
- ★ LH XXXV, 2, 1 fol. 74–75 : Pars 2 Excerptorum ex Circulo Mengoli, et ad eum annotatorum (04.1676)
- ★ LH XXXV, 2, 1 fol. 76 : Wallisii problema interpolandi pro quadratura Circuli (1676)
- ★ LH XXXV, 2, 1 fol. 78 : Sans titre, sur l'interpolation de Mengoli (30.03.1679)

- ★ LH XXXV, 2, 1 fol. 269–270 : Consultatio de perficienda Geometria. An scilicet, et qualis Circuli et Hyperbolae Qvadratura, Angulique et Rationis sectio Universalis sperari aut expeti debeatve. (01.1675)
- ★ LH XXXV, 2, 1 fol. 273 : De Geometrica descriptione figurarum transcendentium qvadratricium (01.1675)
- ★ LH XXXV, 3A, 34 fol. 5 : De formulis omnium dimensionum (02.1675)
- ★ LH XXXV, 5, 13 fol. 1–2 : Aequationes transcendentes exponentiales (02.1677)
- ★ LH XXXV, 5, 13 fol. 3–4 : Quaererebis in hyperbola aequationem transcendentem exponentialem cuius ope tollatur incognita exponens vel saltem plures ad unam revocentur, non est absoluta (non daté)
- ★ LH XXXV, 5, 13 fol. 5 : De tangentibus seu differentiis figurarum per aequationes exponentiales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti (13.06.1677)
- ★ LH XXXV, 5, 3 fol. 8 : De modis exprimendi series, seu de earum regulis fundamentalibus (1672)
- ★ LH XXXV, 5, 14 fol. 1–2 – De Logarithmicae aequationibus et calculo curvarum transcender expressarum differentiali seu comparatione calculorum differentialis, exponentialis, replicati et infiniti (08.10.1680)
- ★ LH XXXV, 5, 14 fol. 3–4 – Scheda II. 28 Septemb. 1680. De Logarithmicae aequationibus et calculo curvarum Transcender expressarum differentiali seu comparatione calculorum differentialis, exponentialis, replicati et infiniti (08.10.1680)
- ★ LH XXXV, 5, 14 fol. 11 : Exponentes (non daté)
- ★ LH XXXV, 5, 14 fol. 13 : Logarithmi seu exponentes (non daté)
- ★ LH XXXV, 5, 14 fol. 14 : Sans titre, sur les logarithmes (non daté)
- ★ LH XXXV, 5, 15 fol. 7 : Sans titre, sur les exposants (06.05.1679)
- ★ LH XXXV, 5, 15 fol. 16 : De incognitis in exponente (23.05.1679)
- ★ LH XXXV, 5, 15 fol. 17 : Exponentes radicum Pronicarum (05.1679)
- ★ LH XXXV, 5, 15 fol. 19–20 : Tentata impossibilitas quadraturae (11.1679)
- ★ LH XXXV, 5, 15 fol. 25–26 : De calculo interpolationum; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum (30.03.1679)
- ★ LH XXXV, 5, 15 fol. 27 : Quadraturae per logarithmos (31.03.1679)
- ★ LH XXXV, 7, 1 fol. 5 : Summae Parabol[o]idum et Antiparaboloidum (non daté)
- ★ LH XXXV, 7, 1 fol. 50 : Nova methodus tractandi calculos differentiales (23.03.1679)

- ★ LH XXXV, 7, 1 fol. 54–55 – De specialis quadraturae possibilitate aut impossibilitate, Methodus hactenus notarum, per calculum communem optima (03.1679)
- ★ LH XXXV, 7, 1 fol. 60–61 – Universalissima Methodus ad tetragonismos particulares (03.1679)
- ★ LH XXXV, 7, 11 fol. 1 : De summis potentiarum inveniendis (non daté)
- ★ LH XXXV, 7, 11 fol. 2 : De summis potentiarum (non daté)
- ★ LH XXXV, 7, 11 fol. 5 : Summae serierum fractionum (non daté)
- ★ LH XXXV, 7, 11 fol. 7 : De expressione potestatum et summis reciprocorum (29.06.1678)
- ★ LH XXXV, 7, 11 fol. 9 : De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum (01.1678)
- ★ LH XXXV, 7, 11 fol. 11 : Summa ex numeris Combinatoriis per Arithmeticos divisus (non daté)
- ★ LH XXXV, 7, 11 fol. 13 : Summa huius figurae cuius momentum ex basi Logarithmica (01.1678)
- ★ LH XXXV, 7, 12 fol. 88 : De summis serierum fractionalium (non daté)
- ★ LH XXXV, 13, 2b fol. 14 – Problemata tangentium inversa (non daté)
- ★ LH XXXV, 14, 1 fol. 94–97 – De aequationibus per Logarithmos resolutis (06.1675).

Bibliographie

- DESCARTES, René [1659], *Geometria, a Renato Des Cartes*, Amsterdam : Elzevirii.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm & GERHARDT, Carl Immanuel [1846], *Historia et origo calculi differentialis*, Hannover : Hahn.
- MENGOLI, Pietro [1672], *Circolo*, Bologne : Per l'Herede del Benacci.
- MERCATOR, Nicolaus [1668], *Logarithmotechnia : sive methodus construendi logarithmos nova, accurata et facilis*, Londres : G. Godbid.
- PANZA, Marco [2004], *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666*, Paris : Albert Blanchard, chap. À l'origine de la notion de nombre transcendant : John Wallis et la quadrature du cercle, 333–367.
- SERFATI, Michel [1997], *La Constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Thèse de doctorat, Université Paris I.

- [2002], *De la méthode : Recherches en histoire et philosophie des mathématiques*, Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.
- [2005], *La Révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Paris : Pétra.
- [2018], *Leibniz and the Invention of Mathematical Transcendence*, Stuttgart : Franz Steiner Verlag.
- WALLIS, JOHN [1656], *Arithmetica Infinitorum*, Oxford : Oxonia.