



Philosophia Scientiæ

Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

8-2 | 2004

Logique & théorie des jeux

Heuristique formelle et logiques modales non-normales

Laurent Keiff



Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/562>

DOI : [10.4000/philosophiascientiae.562](https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.562)

ISSN : 1775-4283

Éditeur

Éditions Kimé

Édition imprimée

Date de publication : 1 octobre 2004

Pagination : 39-57

ISBN : 2-84174-352-7

ISSN : 1281-2463

Référence électronique

Laurent Keiff, « Heuristique formelle et logiques modales non-normales », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 8-2 | 2004, mis en ligne le 15 juin 2011, consulté le 15 janvier 2021. URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/562> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.562>

Tous droits réservés

Heuristique formelle et logiques modales non-normales

Laurent Keiff
Université de Lille 3

Résumé : Nous présentons ici une version modale des dialogues de recherche de conditions (SSD) que nous avons introduits dans [Rahman & Keiff 2004]. La sémantique utilisée correspond à celle des systèmes modaux non normaux.

Abstract: We present here a modal version of the structure seeking dialogues (SSD) that were introduced in [Rahman & Keiff 2004]. For this purpose, we use a semantics that corresponds to the semantics of non normal modal systems.

Ce travail se situe dans la perspective de l'approche dialogique de la logique, telle qu'on la trouve présentée dans [Lorenzen & Lorenz 1978], [Rahman 1993], [Rahman & Rückert 2001a], [Rahman & Keiff 2004]. Les SSD (*Structure Seeking Dialogues*) sont une forme heuristique de dialogue, dans laquelle une formule donnée génère les conditions structurelles de sa propre validité. Ce type de dialogue est conçu comme un cas d'application du *leitmotiv* pluraliste pragmatique, selon lequel c'est le contexte qui détermine la logique adéquate.

Il était d'autre part important de montrer la connexion très forte qui existe entre la notion même de SSD, et les dialogues modaux non-normaux introduits par Rahman dans ce même volume. Nous donnons donc ici un système de règles engendrant les dialogues SSD adéquats, exprimés dans le langage de la dialogique modale non normale.

Dans la première section, nous motiverons notre travail. La seconde section introduit un langage modal hybride (dans le style de [Blackburn 2001a]). La section 3 introduit la notion de dialogique modale non normale, dans l'interprétation donnée par [Rahman 2004]. La section 4 est consacrée au système SSD modal non normal.

1 Motivation

Les SSD, dans la forme élaborée ici, ont pour objet d'étudier dynamiquement comment on peut déterminer une structure (ou plus précisément une classe de structures) dans laquelle une formule donnée est valide. On peut donc les concevoir comme capturant une forme de raisonnement abductif, en ce sens qu'ils permettent d'étendre une théorie (ici une logique) de façon à expliquer (prouver) une nouvelle formule.

Plus généralement, les SSD appartiennent à une famille de systèmes formels dans lesquels il est possible de modifier la sémantique au niveau du langage-objet. L'observation qui est à la racine de la formulation des SSD est la suivante : il est fréquent que l'on considère, dans l'exercice concret de la logique, une formule sans qu'elle soit coordonnée à un système formel déterminé. L'exemple principal que nous allons développer dans ce chapitre est celui des logiques modales. N'importe qui, pourvu d'un *modicum* de logique modale, reconnaît facilement que $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow (A \vee B)$ n'est pas un théorème de K. L'intuition fondamentale que nous suivons ici est que cette reconnaissance est en fait une inférence (et non simplement un acte de reconnaissance tributaire de la mémoire, dont on ne voit pas bien comment il pourrait fonctionner). Les SSD sont une tentative de reconstruction explicite de la logique de

ce mode d'inférence, dont la prémisse est la validité (*en un sens encore indéterminé*) d'une formule¹ et la conclusion la validité (*en un sens déterminé*) de cette même formule.

Il est clair qu'un tel mode d'inférence, s'il faut le prendre philosophiquement au sérieux, présuppose un pluralisme dont le sens est désormais double : (i) une même formule peut être valide ou non, selon le système par lequel on donne à cette notion un contenu formel ; (ii) en un sens précis, le raisonnement sur des formules dont la sémantique n'est pas complètement déterminée, ou dont la sémantique change, est bien un raisonnement logique.

En ce deuxième sens, le pluralisme conteste radicalement la distribution des rôles, très largement reçue, entre syntaxe, sémantique et pragmatique. Selon cette distribution, que l'on doit essentiellement à Morris (et qui s'inscrit dans le cadre général de la théorie de la signification de Frege), la syntaxe est une théorie du rapport des signes entre eux, la sémantique une théorie du rapport des signes aux objets, et la pragmatique une théorie du rapport entre les signes et les sujets qui en font usage. En premier lieu, du point de vue dialogique, la syntaxe pure n'existe pas. La manipulation aveugle de signes ininterprétés est une notion vide de sens : la signification est précisément donnée par les règles de manipulation. D'autre part, la distinction entre sémantique et pragmatique ne correspond plus à l'irruption du locuteur dans une théorie du langage qui jusque là était indépendante de lui. Chaque formule trouve sa signification dans le contexte d'un jeu, cette signification dépend donc toujours du joueur qui énonce la formule. Cela ne signifie pas pour autant que la distinction entre sémantique et pragmatique n'ait aucun intérêt théorique, simplement, elle s'effectue par d'autres moyens. C'est par la considération des règles du dialogue que procède la dialogique. L'objet propre de la sémantique, ce sont les dialogues dont les règles sont complètement déterminées, alors que la pragmatique s'intéresse aux dialogues incomplètement réglés, ou encore dont les règles peuvent changer. De ce qui précède, il ressort clairement que, du point de vue dialogique (même pour les dialogues purement formels), il est impossible d'éliminer le sujet de la connaissance : les dialogues sont pragmatiques.

Les SSD mettent en jeu, sous la forme de propositions, des règles structurelles² du dialogue. Une fois propositionnalisées, les règles struc-

¹De ce point de vue, les SSD supposent un genre de formalisme particulier. La formule est une séquence de signes qui ne sont ni ininterprétés, ni complètement interprétés. L'interprétation des signes est esquissée dans un système de règles, et ces règles peuvent être modifiées en fonction des exigences de la structure interne de la formule conjointe à l'hypothèse métathéorique de sa validité.

²Les règles structurelles correspondent aux règles du même nom dans le contexte

turelles se convertissent en prémisses du raisonnement, et en ce sens les SSD correspondent à la première forme du raisonnement abductif. Cependant, le contenu propositionnel de ces prémisses reste dicté par des considérations métalogiques, c'est-à-dire qu'il est une traduction dans le langage-objet de certains aspects des règles du dialogue. Autrement dit, ces prémisses ont bien pour objet de *décrire un mode d'inférence*, et non simplement de conditionnaliser la vérité d'une proposition. Ce qui est en jeu ici, c'est bien le rapport entre les aspects implicites et explicites de l'inférence logique. En effet, du point de vue dialogique, expliciter une règle sous la forme d'une formule mise en jeu au sein du langage-objet, c'est faire d'une règle (jusqu'ici admise tacitement) l'objet même du débat. Une partie des règles est donc fixée par un accord implicite des joueurs, et elle détermine une partie de la signification globale (structurelle) de la formule en jeu. L'autre partie, qui était implicitement acceptée, est maintenant une partie explicite du jeu, qu'il est possible de modifier, ce qui engendrera une altération pragmatique de la signification globale de la formule. Le jeu s'arrêtera cependant lorsqu'une sémantique, dans laquelle la formule initiale du raisonnement abductif est valide, sera complètement déterminée.

Nous allons nous concentrer sur un cas simple : la seule règle mise en jeu dans le dialogue sera la règle d'accessibilité des contextes dialogiques, dans le cadre de la dialogique modale³.

2 Hybridation et SSD

Pour que les SSD puissent capturer la dynamique de la recherche des conditions structurelles de la dérivation d'une formule, il nous faut étendre les capacités du langage-objet de telle manière qu'il soit possible d'y exprimer certaines règles structurelles.

Dans le cas qui nous intéresse ici, la seule règle structurelle en jeu est la règle (SR-ST9.3M)⁴, restreignant **P** dans le choix d'un contexte, dans les dialogues modaux. Cette règle correspond aux *frame conditions* de la littérature standard, c'est-à-dire qu'elle permet de distinguer entre les différentes logiques, en altérant la relation d'accessibilité entre les

des calculs de séquents. Elles décrivent les conditions générales du dialogue, par opposition aux règles de particule, déterminant la sémantique locale. Voir dans ce volume l'*Introduction à la dialogique modale et hybride* pour une discussion plus détaillée.

³Cette règle est l'équivalent dialogique des *frame conditions* de la logique modale kripkéenne. C'est d'ailleurs pour cette raison que les SSD portent ce nom.

⁴Voir *Introduction à la dialogique modale et hybride*.

contextes. Les caractéristiques de cette règle peuvent être exprimées au sein du langage propositionnel modal hybride, par des formules que nous désignerons sous le nom d'hypothèses structurelles. Le langage modal hybride et les hypothèses structurelles sont décrits dans les sections 7 et 8 de l'*Introduction à la dialogique modale et hybride*, dans ce volume.

3 Les SSD comme dialogues modaux

Les SSD s'inscrivent dans le cadre plus général des systèmes cherchant à internaliser le changement de logique, c'est-à-dire dans la famille des systèmes dans lesquels ces changements sont exprimables au sein du langage-objet⁵. L'expression propositionnelle du changement de logique a un caractère manifestement modal. C'est cette observation, couplée à une réflexion sur la notion de *provability logic*, qui a motivé l'interprétation des logiques modales non-normales de [Rahman 2004]. Le point essentiel de cet article séminal est de considérer que les contextes d'argumentation non-normaux sont simplement ces contextes dans lesquels la stabilité de la logique propositionnelle sous-jacente n'est plus garantie. En d'autres termes, les contextes d'argumentation accessibles à partir d'un contexte non-normal pourraient fonctionner avec d'autres règles dialogiques propositionnelles que le contexte distingué qui définit la logique standard du dialogue global. L'absence de la règle de nécessitation, caractéristique des systèmes non-normaux, trouve dans cette lecture une justification très naturelle : si les changements de logique sont admis, le fait qu'on puisse dériver A (dans une logique donnée) n'implique pas nécessairement qu'on puisse dériver A dans toute autre logique. Autrement dit, s'il existe des vérités localement nécessaires, aucune vérité n'est nécessairement nécessaire.

L'implémentation dialogique de cette lecture des systèmes non-normaux, telle qu'elle est introduite dans [Rahman 2004], capture la notion de changement de logique en introduisant une double caractérisation des contextes d'argumentation : les contextes ont une logique sous-jacente, qui peut être *standard* (c'est-à-dire la même que celle du contexte initial) ou *non standard* (arbitrairement différente), et le contexte lui-même peut être *normal* (tous les contextes accessibles ont une logique sous-jacente standard) ou *non-normal* (les contextes accessibles peuvent avoir une logique sous-jacente non standard). Les règles structurelles du dialogue déterminent quels sont les contextes normaux (et notamment si

⁵Particulièrement : les logiques non monotones, les logiques adaptatives de l'école de Gand (voir [Batens 2003] par exemple) et certains systèmes modaux (voir la suite).

le contexte initial est normal), et selon les variantes, donnent une dialogique de la famille E ou de la famille S, de type 0.5, 2 ou 3⁶. Nous allons entrer quelque peu dans le détail des jeux modaux non-normaux pour en présenter une variante qui convient aux besoins des SSD.

Dans ce qui va suivre, nous allons nous attacher à déterminer un langage modal dans lequel la forme générale de la thèse d'un SSD peut être exprimée. Cette thèse contient une formule, le *fragment propositionnel*, qui est celle dont on recherche les conditions minimales de dérivabilité. Nous nous servirons de l'appareillage modal non-normal pour capturer la structure architectonique du SSD, c'est-à-dire la série de changements de logique qui correspond à l'élaboration dynamique de la sémantique du fragment propositionnel de la métaproposition qui sert de thèse au dialogue.

Les formules modales ont pour signification, dans les dialogiques non-normales, une *métaproposition*⁷, dont la sémantique est divisée en plusieurs régimes bien distincts (les différents *contextes* dialogiques). Dans le vocabulaire de la dialogique modale non normale, nous allons construire la *logique standard* des SSD.

4 La logique standard des SSD

4.1 Règles de base

La logique standard des SSD contient au titre de logique *sous-jacente*⁸ les règles de particule et les règles structurelles de la dialogique classique, ainsi que les règles de particule pour les opérateurs modaux \square et \diamond , et les règles structurelles SR-ST9.1M et SR-ST9.2KM⁹.

Hybridation : La logique standard des SSD contient aussi les règles nécessaires à l'hybridation du langage dialogique : les règles de particule (@ index instancié), (@ variable libre), (ν_c) , (ν_i) , et les règles structurelles correspondantes¹⁰.

⁶Nomenclature [Lewis & Langford 1932]. Une dialogique correspondant au système S1 est en préparation.

⁷C'est-à-dire une proposition parlant explicitement de la validité de certaines de ses propres sous-formules, *pour des notions de validité possiblement différentes*.

⁸[Rahman 2004].

⁹Voir *Introduction à la dialogique modale et hybride*, section 6.

¹⁰Voir l'*Introduction à la dialogique modale et hybride*, sections 7 et 8. Les indices de contextes dialogiques mentionnés dans les règles hybrides sont les indices locaux (deuxième indice, voir section suivante).

Modalités non normales : Si l'on veut que les SSD portent sur des formules modales (ainsi que nous les avons introduits précédemment), il convient de distinguer les opérateurs modaux non-normaux avec lesquels est exprimée la métaproposition qui sert de thèse au dialogue, et les opérateurs modaux éventuellement présents dans langage-objet¹¹. Les opérateurs de la métaproposition¹² seront désignés par $\langle \diamond^* \rangle$ et $[\Box]^{-1}$, et ceux du fragment propositionnel par les habituels \Box et \diamond .

Double structure : Les SSD modaux fonctionnent avec deux paires d'opérateurs modaux, appartenant à deux modes bien distincts du jeu. Les opérateurs $\langle \diamond^* \rangle$ et $[\Box]^{-1}$ ont pour rôle de déterminer le changement de logique, c'est-à-dire l'élaboration dynamique de la sémantique du fragment propositionnel. Appelons ce jeu *métadialogue*. Les opérateurs \Box et \diamond appartiennent au fragment propositionnel, et déterminent donc un jeu *soumis aux hypothèses structurelles déterminées par le métadialogue*. Appelons ce deuxième jeu *dialogue local*¹³. En conséquence, l'ensemble des contextes introduits pour jouer le fragment propositionnel de la thèse du SSD forme la (sous)structure d'un contexte particulier du métadialogue. Cela se traduit en termes de jeu par les dispositions suivantes :

- Un opérateur modal du dialogue local (\Box ou \diamond) peut être dans la portée d'un opérateur du métadialogue, mais l'inverse est interdit¹⁴ : un opérateur du métadialogue n'est jamais dans la portée d'un opérateur local.
- Les contextes dialogiques des SSD sont désignés par un double indice de forme m/n où m et n (respectivement le premier et le deuxième indice) sont des indices dialogiques standard¹⁵. Chaque fois qu'une règle dialogique portant sur les opérateurs du métadialogue mentionne l'indice d'un contexte dialogique, il s'agit toujours du *premier indice*. Lorsqu'un joueur défend une formule modale du métadialogue en introduisant un nouveau contexte, le deuxième indice sera toujours 1 (c'est-à-dire le contexte initial, étant données les hypothèses structurelles locales). Lorsque les règles de particules

¹¹C'est-à-dire le langage dans lequel est exprimé le fragment propositionnel de la thèse du SSD.

¹²Ces opérateurs sont duels et ne sont pas interdéfinissables. Voir les paragraphes 4.4 et 4.7 pour une explication de leur signification et les règles de leur sémantique.

¹³En référence au fait qu'il est déterminé par des hypothèses locales, susceptibles de changer (c'est là tout le point des SSD).

¹⁴Cette disposition est certainement *ad hoc*, même si elle se justifie pleinement dans le cas des SSD. On pourrait s'en passer, mais cela compliquerait beaucoup le système de règles contrôlant le passage d'un contexte à l'autre.

¹⁵Voir *Introduction à la dialogique modale et hybride*.

portant sur les opérateurs modaux du dialogue local mentionnent l'indice d'un contexte dialogique, il s'agit toujours du *deuxième indice*, le premier étant déjà fixé au niveau du métadialogue. Afin de ne pas compliquer l'écriture, on omettra la partie redondante de l'indice chaque fois que c'est possible.

Afin de respecter le caractère dynamique des SSD, c'est-à-dire pour donner à **P** la possibilité de déterminer les conditions de validité d'une formule en plusieurs fois, nous introduisons un opérateur modal emprunté à la logique dynamique, $\langle \diamond^* \rangle$, qui est en fait une abréviation pour une séquence de longueur indéterminée mais finie d'opérateurs $\langle \diamond \rangle$.¹⁶ Cela signifie qu'en assertant $\langle \diamond^* \rangle A$, le joueur X est commis à la défense de A dans le contexte dialogique de son choix, mais qu'à tout moment, dans le contexte dialogique où se déroule le jeu, il peut réasserter $\langle \diamond^* \rangle A$.

Remarque : l'opérateur $\langle \diamond^* \rangle$ conduit à un jeu modal qui perd la propriété d'analyticité, au sens où toute formule jouée dans un dialogue pour A, exceptée la thèse A elle-même, contient au moins une constante logique de moins que A. Cela signifie donc que les dialogues contenant l'opérateur $\langle \diamond^* \rangle$ ne sont pas nécessairement finis, en ce sens qu'il existe toujours la possibilité pour un joueur ayant affirmé $\langle \diamond^* \rangle A$ de se défendre, et donc de ne pas perdre. La tendance constructiviste inhérente à la dialogique ôte cependant à cet inconvénient l'essentiel de sa force : la proposition associée à la formule $\langle \diamond^* \rangle A$ est considérée fautive *par défaut*¹⁷, et ne peut être tenue pour vraie que si le joueur qui a asserté $\langle \diamond^* \rangle A$ comme thèse peut *gagner* un dialogue pour cette formule.

Il faut encore remarquer que la structure du schéma de thèse pour les SSD modaux donne à **P** une stratégie de victoire en cas de contre-attaque de **O** : il lui suffit de réasserter la thèse, et de copier la stratégie utilisée par son adversaire. La seule possibilité de victoire pour **O** est qu'il soit impossible de dériver le fragment propositionnel avec les hypothèses structurelles admises dans le jeu.

D'autre part, les modèles dans lesquels se jouent les SSD sont en général finis¹⁸, et ne permettent donc pas une stratégie de fuite infinie : la règle de répétition SR-ST5¹⁹ l'interdit. Cependant, si on trouve que

¹⁶Pour la formulation de la règle de particule de l'opérateur $\langle \diamond^* \rangle$, voir ci-dessous la section 4.4 "Le raisonnement sous conditions".

¹⁷Le concept dialogique de preuve est essentiellement dynamique, c'est-à-dire procédural, ce qui se traduit ici par une structure non-monotonique au niveau du métalanguage, que l'on peut rattacher à ce que les théoriciens des systèmes non-monotoniques désignent comme une stratégie *sceptique* : une proposition est réputée fautive à moins que l'on puisse s'assurer de sa vérité.

¹⁸Cf. section 4.4.

¹⁹Voir *Introduction à la dialogique modale et hybride*.

le coût formel de l'introduction d'un tel opérateur est trop élevé, il est toujours possible d'opter pour la solution introduite par Lorenz²⁰ pour résoudre le problème de la règle de répétition : un accord pragmatique, préalable au dialogue, fixe le nombre de défenses auxquelles **P** a droit.

4.2 Accessibilité des contextes et changement de logique

Il nous faut maintenant préciser les règles du jeu pour l'opérateur $\langle\langle\rangle\rangle$, qui doivent permettre un jeu modal non-normal, interprété dans le cadre pluraliste développé dans [Rahman 2004]. L'intuition fondamentale des dialogues non normaux est la suivante : dans un contexte d'argumentation quelconque, on ne peut présumer que les conditions d'évaluations des propositions sont celles du contexte d'origine (conditions standard). Voyons comment cela se traduit dans un jeu modal.

En premier lieu, les formes argumentatives associées aux opérateurs modaux sont complétées, par rapport aux formes normales du jeu modal, par la détermination du joueur choisissant la logique sous-jacente au dialogue introduit. Le principe est simple : c'est le joueur qui introduit le contexte d'argumentation²¹ qui choisit la logique sous-jacente, dans la mesure où les autres règles lui laissent le choix.

Définition (contexte normal) : Dire d'un contexte m qu'il est normal, c'est donc poser une contrainte sur le choix de la logique sous-jacente aux contextes ouverts à partir de m : celle-ci devra être la logique désignée dans le dialogue comme standard. Inversement, un contexte non normal autorise le choix d'une logique sous-jacente différente de la logique standard.

Pour plus de clarté, exposons ces formes argumentatives dans un tableau²² :

Assertion	@ $_{mL_a}$	$\langle\langle\rangle\rangle A$
Attaque	@ $_{mL_a}$? $_{\diamond}$
Défense	@ $_{nL_b}$	A

²⁰Voir [Lorenzen & Lorenz 1978].

²¹A savoir (dans le cas général des logiques modales non normales) : le joueur qui défend une formule de forme $\diamond A$ et celui qui attaque une formule de forme $\Box A$.

²²Voir section 4.4 pour une formulation plus précise des règles de particule pour les opérateurs modaux non normaux du SSD.

[où m et n sont les indices de contextes dialogiques,
et n est choisi par le défenseur]

Commentaire : La colonne centrale contient des informations appartenant au métalangage : $@_{mL_a}$ signifie ici que la formule qui suit a été jouée dans le contexte m de logique sous-jacente L_a . Comme il est habituel en dialogique, le point essentiel est de savoir qui a l’initiative du choix. Dans le cas des SSD modaux, seul l’opérateur de possibilité $\langle\Diamond\rangle$ nous intéresse : c’est le défenseur qui choisit la logique²³ du contexte introduit pour défendre l’opérateur modal. Le choix de la logique sous-jacente, comme nous l’avons déjà dit, est restreint par la notion de normalité : si m_{L_a} est un contexte normal d’argumentation, alors la logique L_b du contexte n_{L_b} introduit à partir de m_{L_a} doit être la même que la logique standard L_a .

Reste à spécifier, par une série d’hypothèses, les conditions qui déterminent si un contexte d’argumentation doit être considéré comme normal ou non-normal. Ces hypothèses sont cruciales pour déterminer le système non normal dans lequel on joue. Celles que nous présentons ici sont vernaculaires aux SSD.

1. Le contexte initial est non normal.
2. La logique du contexte initial est la logique standard des SSD.
3. Tout contexte ouvert à partir d’un contexte non normal peut avoir une logique non standard.
4. **P** n’est pas soumis à la restriction formelle dans l’introduction des contextes d’argumentation.

La dialogique modale qui correspond aux hypothèses (1) et (3)²⁴ est désignée dans [Rahman 2004] sous la nomenclature E2 (la clause (4) sera discutée dans le paragraphe suivant). A propos de ce système, Rahman écrit :

Indeed E2 seems to be the appropriate language where the logical pluralist might explore the way to formulate statements of logical validity which do not assume a universal scope.

²³Pour une discussion de la manière dont l’introduction d’un contexte d’argumentation détermine un changement de logique, voir ci-dessous la section 4.4 “Le raisonnement sous conditions”.

²⁴Bien entendu la logique standard d’un dialogue E2 ne comporte pas tout l’appareillage spécifique au SSD : c’est la logique classique.

C'est précisément le cas dans le contexte des SSD. La notion de validité, dans la partie architectonique du SSD où la thèse est discutée dans le système modal non normal (le métadialogue)²⁵, n'est pas encore complètement déterminée, et il est clair que la notion de validité universelle n'a aucun sens du point de vue des SSD.

4.3 Restriction formelle et minimalité des conditions

Comme nous l'avons déjà indiqué dans la première version des SSD, les hypothèses structurelles utilisées pour dériver le fragment propositionnel de la thèse doivent être minimales. Cela signifie d'abord que **P** doit être autorisé à poser les conditions de façon dynamique, c'est-à-dire essentiellement lorsqu'il en éprouve le besoin, pour sortir d'une situation de jeu bloquée. Cela correspond à l'hypothèse (4) régulant le dialogue modal non-normal : **P** peut changer de logique de sa propre initiative (il n'est pas soumis à la restriction formelle pour le changement de logique).

La *minimalité* des conditions est garantie par la possibilité pour **O** de contre-attaquer, c'est-à-dire d'affirmer la possibilité de dériver le fragment propositionnel avec des hypothèses moindres que celles de **P**. Cette contre-attaque n'a de sens que si **O** est contraint de jouer dans les mêmes conditions que **P**, c'est-à-dire spécialement en se soumettant à la règle structurelle de restriction formelle. Les changements de rôle vis-à-vis de la règle de restriction formelle ont été introduits par [Rahman & Rückert 2001d], au moyen d'une paire d'opérateurs de vérifiabilité **V** et de falsifiabilité **F**, signifiant respectivement qu'une formule donnée peut être gagnée à certaines conditions, ou peut être perdue à certaines conditions. Celui qui attaque une formule de forme **VA** ou **FA** s'engage donc à gagner un dialogue où son adversaire défendra respectivement A ou $\neg A$, et où lui (l'attaquant) jouera sous restriction formelle²⁶. Afin d'éviter les redondances dans la syntaxe générale des dialogues, nous formulerons la thèse des SSD en usant de l'opérateur **F** pour introduire dans le dialogue le changement de restriction formelle.

Règle de particule (F) : D'une formule de forme $X\text{-FA}$ assertée dans un contexte dialogique m , suit un état de jeu modal $\langle R, \sigma, \neg A, \lambda_{A/mi} \rangle$

²⁵Par opposition aux parties du dialogue où le fragment propositionnel de la thèse se joue dans des contextes d'argumentation où les règles non normales sont pleinement déterminées (les dialogues locaux).

²⁶Pour une analyse des conséquences du changement de restriction formelle sur la notion de condition structurelle, voir paragraphe suivant.

où m_i désigne un sous-dialogue²⁷ choisi par X du contexte dialogique m , où c'est Y qui est soumis à la restriction formelle, en réponse à l'attaque $?_F$ de Y.

Une règle structurelle est associée, dont le rôle est de contrôler les changements de restriction formelle.

SR-ST1SSDM (changement de restriction formelle) : Lorsqu'un dialogue commence, c'est **P** qui est soumis à la règle de restriction formelle. Les seuls changements de cette situation sont ceux induits par la défense d'une formule de forme X-FA.

4.4 Le raisonnement sous conditions

Nous avons déjà souligné la dimension pragmatique de la dépendance contextuelle des SSD. Le contexte global d'un SSD modal est capturé par une structure dans laquelle le jeu a lieu. C'est cette structure, désignée sous le nom d'*ordre logique*, que nous allons décrire. On a beaucoup souligné que la spécificité de la dialogique, particulièrement lorsqu'on la compare avec l'approche GTS de Hintikka, est d'être radicalement procédurale, c'est-à-dire orientée "*proof theory*" et non pas "*model theory*". L'*ordre logique* d'un SSD constitue cependant un modèle. Les SSD sont donc ce qu'en GTS on nomme des dialogues *matériels*.

Les hypothèses structurelles, dans un SSD, constituent les conditions de la dérivation d'une formule. Elles sont *concedées*, c'est-à-dire que se sont des formules dialogiquement signées non pas par un symbole dénotant un joueur déterminé, mais par une variable qui désigne le joueur qui n'est pas soumis à la restriction formelle. En d'autres termes, c'est le joueur qui n'est pas soumis à la restriction formelle qui est commis à la défense des conditions structurelles dans chaque contexte dialogique (c'est-à-dire pour chaque logique). Dans l'*ordre logique* de la dialogique modale non-normale, cette notion pourrait être utilisée pour déterminer précisément la nature du changement de logique impliqué par l'introduction d'un contexte à logique non standard : une série de concessions

²⁷Il est important de ne pas confondre les contextes dialogiques d'argumentation, désignés par des indices $m, m.n$, etc., dont les relations sont réglées par l'usage des opérateurs modaux, et les sous-dialogues m_i d'un contexte dialogique m , qui permettent de séparer les fragments de dialogues soumis aux mêmes conditions structurelles, sauf pour l'application de la restriction formelle.

vient compléter, pour chaque contexte, les conditions implicites déterminées par les règles générales du dialogue. Nous allons préciser ce que cela signifie.

Le contexte global d'un SSD est représenté par une définition formelle de la notion de minimalité des conditions structurelles. Cette définition formelle était introduite, dans [Rahman & Keiff 2004], sous la forme d'une séquence bien ordonnée Δ d'hypothèses structurelles. Dans la version modale des SSD, il est possible de se servir d'un ensemble de contextes d'argumentations, ordonné par la relation d'accessibilité, pour expliciter la liaison entre le Δ et le SSD. Il suffit pour cela de définir la relation d'accessibilité entre contextes d'argumentations, c'est-à-dire la manière dont on peut changer de logique, de telle manière qu'elle soit isomorphe à la relation d'ordre entre les sous-séquences δ_i de la séquence Δ utilisée dans la version précédente des SSD.

Voyons le détail. Nous allons définir la notion d'*ordre logique*, dans lequel les SSD ont lieu. Un *ordre logique* est une structure²⁸ définissant quels sont les contextes dialogiques disponibles pour les joueurs en cours de jeu. Un *ordre logique* pour un SSD modal est donc une structure $\langle W, \Delta, S, R \rangle$, où W est un ensemble non vide de contextes d'argumentation notés w_i ($i \in \mathbb{N}$), contenant un élément distingué w_0 , Δ un ensemble non vide d'hypothèses structurelles telles que celles définies dans la section 8 de l'*Introduction à la dialogique modale et hybride* dans ce volume, et S une fonction assignant une séquence $\delta_i \subset \Delta$ d'hypothèses structurelles à chaque contexte d'argumentation $w_i \in W$. Par définition, $S(w_0) = \emptyset$ ²⁹. R est la relation habituelle d'accessibilité entre contextes dialogiques. La relation R doit respecter les contraintes suivantes :

- R est *transitive*³⁰, *antisymétrique*³¹ et *irréflexive*³² (c'est une relation d'ordre strict).
- Ce que R cherche à modéliser, c'est la situation suivante. Etant donnée une assignation S d'ensembles de conditions structurelles aux contextes dialogiques éléments de W , $\forall w_i, w_j \in W$, $w_i R w_j$

²⁸Si l'on préfère donner aux SSD modaux une tournure plus idiosyncratiquement dialogique, il est toujours possible de transformer cette structure en une série de concessions de forme $@_m \langle \diamond \rangle \nu_n$, explicitant l'accessibilité du contexte n à partir de m .

²⁹ w_0 est le contexte initial du SSD, dans lequel aucune hypothèse structurelle n'est faite parce que le fragment propositionnel de la thèse n'a pas encore été asserté en dehors de la portée de l'opérateur modal non normal $\langle \diamond^* \rangle$. Voir section 4.8 pour la règle structurelle correspondante.

³⁰Si $w_i R w_j$ et $w_j R w_k$ alors $w_i R w_k$.

³¹Si $w_i R w_j$ alors il n'est pas le cas que $w_j R w_i$.

³²Il n'est jamais le cas que $w_i R w_i$.

signifie que la logique déterminée par les hypothèses structurelles $\delta_i = S(w_i)$ est considérée comme minimale par rapport à la logique déterminée par les conditions $\delta_j = S(w_j)$

- $\forall w_i \in W (i \neq 0) w_0 R w_i$.

Exemple : Considérons la séquence Δ :

$$\Delta = \{K < \diamond \nu_c < @_i \diamond \nu_i\}.$$

Dans un SSD modal, cela équivaut à *ordre logique* $\langle W, \Delta, S, R \rangle$ défini ainsi :

$$\begin{aligned} W &= \{w_0, w_1, w_2, w_3\} \\ \delta_0 &= \emptyset, \delta_1 = \emptyset^{33}, \delta_2 = \{\diamond \nu_c\} \text{ et } \delta_3 = \{\diamond \nu_c ; @_i \diamond \nu_i\}^{34}, \\ R &= \{\{w_0, w_1\}, \{w_0, w_2\}, \{w_0, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}\}. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'ensemble de conditions structurelles δ_i , *concedées* dans le contexte w_i , est à la charge *du joueur qui ne joue pas sous restriction formelle* : c'est lui qui est commis à les défendre. Il nous faut maintenant spécifier les règles qui permettent au joueur sous restriction formelle de tirer profit de ces concessions.

SR-ST2SSDM (usage des hypothèses structurelles) : Chaque fois que, dans un contexte dialogique w_i le joueur X_f soumis à la restriction formelle peut jouer, il peut demander à son adversaire Y_{nf} d'asserter une des hypothèses structurelles appartenant à la séquence $\delta_i = S(w_i)$. Cette demande s'effectue en jouant un coup de forme $X_f - ?_{\delta/A}$ où A^{35} est un des éléments de δ_i .

Nous sommes maintenant en position de formuler les règles de particule pour les opérateurs $\langle \diamond \rangle$ et $\langle \diamond^* \rangle$, qui s'énoncent ainsi :

³³L'absence d'hypothèse structurelle dans le δ engendre un jeu modal équivalent au système K. Cependant, il faut distinguer entre w_0 où est assertée la thèse du SSD, et w_1 qui est le contexte dont les conditions sont minimales (lesquelles peuvent être différentes de K).

³⁴ δ_i est la séquence d'hypothèses structurelles associée à w_i par S. $S(w_i) = \delta_i$.

³⁵Pour la simplicité de l'écriture, on peut introduire une fonction numérotant les éléments des séquences δ , l'attaque s'écrivant alors $X_f ?_{\delta/n}$ où n est le numéro d'un élément de δ_i .

Règle de particule $\langle \diamond \rangle$: D'une formule de forme $X-\langle \diamond \rangle A$ assertée dans le contexte dialogique w_i suit, en réponse à l'attaque $?_{\langle \pi \rangle}$ de Y , un état de jeu modal $\langle R, \sigma, A, \lambda_{A/w_j(\delta)} \rangle$ où w_j est l'indice d'un contexte dialogique choisi par X tel que $w_i R w_j$, incluant l'ensemble de concessions structurelles δ_j assigné par S à w_j .

Règle de particule $\langle \diamond^* \rangle$: D'une formule de forme $X-\langle \diamond^* \rangle A$ assertée dans le contexte dialogique w_i suit, en réponse à l'attaque $?_{\langle \pi \rangle}$ de Y , un état de jeu modal $\langle R, \sigma, A, \lambda_{A/w_j(\delta)} \rangle$ où w_j est l'indice d'un contexte dialogique choisi par X tel que $w_i R w_j$, incluant l'ensemble de concessions structurelles δ_j assigné par S à w_j . X peut cependant à tout moment asserter $X-\langle \diamond^* \rangle A$ à nouveau, ce qui conduit à l'état de jeu modal $\langle R, \sigma, \langle \diamond^* \rangle A, \lambda_{A/w_j(\delta)} \rangle$.

4.5 La conjonction non commutative

Comme nous l'avons déjà amplement discuté, la thèse d'un SSD dit deux choses bien distinctes : (i) qu'il est possible de dériver une proposition donnée avec les règles dialogiques admissibles stipulées par une séquence Δ donnée, et (ii) que les règles qui seront utilisées seront minimales, selon la notion de minimalité définie sur Δ . Si ces deux affirmations sont conjointes, elles sont cependant affirmées l'une *après* l'autre. Il nous faut donc, pour pouvoir formuler le schéma de la thèse d'un SSD, introduire une particule supplémentaire, savoir une particule partageant les caractères de la conjonction (le défenseur doit être en mesure de défendre les deux termes conjoints) et de la disjonction (c'est le défenseur lui-même qui choisit l'ordre dans lequel il défend les conjoints)³⁶.

Règle de particule $(;)$: D'une formule de forme $X-A; B$ suit un état de jeu $\langle R, \sigma, A \rangle$ en réponse à l'attaque $Y-?_1$, puis (éventuellement, c'est-à-dire lorsque Y ne peut plus jouer d'autre coup) un état de jeu $\langle R, \sigma, B \rangle$ en réponse à une seconde attaque $Y-?_2$.

4.6 Modalités $\langle \diamond \rangle$ et $[\Box]^{-1}$

Le passage du premier au deuxième terme de la conjonction non commutative mentionnée ci-dessus pose encore un problème, que l'on peut

³⁶La logique linéaire fournit une particule qui correspond bien à ce cahier des charges : la disjonction multiplicative ' \leftarrow ' (*par*). Voir [Rahman 2002] pour une présentation complète de la sémantique dialogique linéaire.

décrire ainsi. La minimalité des conditions structurelles introduites par **P** est assurée par la possibilité pour **O** de contre-attaquer, en se soumettant à la restriction formelle, et en montrant qu'on peut gagner un dialogue pour le fragment propositionnel de la thèse avec des conditions structurelles de rang inférieur. Cette infériorité de rang est traduite modalement par la relation d'accessibilité entre contextes : la signification que l'on cherche à donner à une formule de forme $@_m \langle \diamond \rangle \nu_n$ est que les concessions structurelles assignées à m sont de rang inférieur à celles attribuées à n , ou, si l'on préfère, que les premières sont *minimales* par rapport aux secondes. Puisque R est une relation d'ordre, une fois le dialogue parvenu à un contexte w_i donné, aucun contexte w_j tel que $S(w_j)$ soit minimal par rapport à $S(w_i)$ n'est plus accessible. Or une fois que **P** a établi qu'il pouvait gagner un dialogue pour A dans un contexte déterminé, il lui reste encore à résister à la contre-attaque de **O**, c'est-à-dire démontrer la minimalité des conditions qu'il a requises. Et cela signifie affirmer quelque chose à propos de *tout contexte* de rang inférieur à celui où il a prouvé A , contextes qui ne sont plus accessibles.

Il nous faut donc faire usage d'un deuxième opérateur modal, irréductible au premier, permettant de passer d'un contexte dialogique à l'autre dans le sens inverse de celui qui est autorisé par la relation R . L'*ordre logique* pour l'opérateur $\langle \diamond \rangle$ est celui que nous avons déjà défini : $\langle W, \Delta, S, R \rangle$. A partir de cette structure, il est possible de définir l'*ordre logique* pour l'opérateur dual $[\Box]^{-1}$, à savoir $\langle W, \Delta, S, R' \rangle$, où W , Δ et S sont définis comme précédemment, et R' est défini comme suit :

$$\forall w_i, w_j \in \Delta, w_i R' w_j \text{ si, et seulement si, } w_j R w_i$$

L'opérateur $[\Box]^{-1}$ obéit à la règle suivante :

Règle de particule $[\Box]^{-1}$: D'une formule de forme $X-[\Box]^{-1}A$ asertée dans le contexte dialogique w_i suit, en réponse à l'attaque $?_{[\Box]^{-1}/w_j}$ de Y , un état de jeu modal $\langle R, \sigma, A, \lambda_{A/w_j}(\delta) \rangle$ où w_j est l'indice d'un contexte dialogique choisi par Y tel que $w_i R' w_j$, incluant l'ensemble de concessions structurelles δ_j assigné par S à w_j .

4.7 Le schéma de thèse d'un SSD

Une dernière règle structurelle avant d'examiner le fonctionnement du jeu que nous avons construit :

SR-ST3SSDM (contexte initial) : La thèse d'un SSD est toujours asser-tée dans le contexte distingué w_0 .

Nous avons maintenant introduit l'appareillage nécessaire à la formu-lation générale du schéma de la thèse des SSD. Pour une formule donnée A , un SSD est un dialogue modal non-normal, joué dans un modèle Δ , qui commence avec la formule :

$$\langle \diamond^* \rangle (A; [\Box]^{-1} \mathbf{F} A)$$

Exemple. Examinons un exemple très simple. Par commodité d'écri-ture, nous noterons A la formule : $\Box(a \rightarrow b) \rightarrow \Box(\Box a \rightarrow \Box b)$. Le tableau suivant montre un SSD pour A dans l'ordre logique $\langle W, \Delta, S, R \rangle$, défini ainsi :

$$\begin{aligned} W &= \{w_0, w_1, w_2\} \\ \delta_0 &= \emptyset, \delta_1 = \emptyset, \delta_2 = \{\diamond \diamond \nu_i \rightarrow \diamond \nu_i\}^{37} \\ R &= \{\{w_0, w_1\}, \{w_0, w_2\}, \{w_1, w_2\}\} \end{aligned}$$

³⁷Pour un Δ quelconque contenant au moins $\diamond \diamond \nu_i \rightarrow \diamond \nu_i$.

w	O	P	w
		$\langle \diamond^*(A; \Box \langle \Box^{-1} \mathbf{F}A \rangle) \rangle$	0
0/1	$\langle ? \langle \diamond \rangle \rangle$	$A; \Box \langle \Box^{-1} \mathbf{F}A \rangle$	2
1/1	$\langle ? \langle ? \rangle \rangle$	$\Box(a \rightarrow b) \rightarrow \Box(\Box a \rightarrow \Box b)$	4
1/1	$\Box(a \rightarrow b)$	$\Box(\Box a \rightarrow \Box b)$	6
1/1	$\langle ? \langle \Box/1.1 \rangle \rangle$	$\Box a \rightarrow \Box b$	8
1/1.1	$\Box a$		10
1/1.1	$\langle ? \langle \Box/1.1.1 \rangle \rangle$	\otimes	
0/1	[1] $\langle \langle ? \langle \diamond \rangle \rangle \rangle$	$\langle \diamond^*(A; \Box \langle \Box^{-1} \mathbf{F}A \rangle) \rangle$	12
1/1	$\langle ? \langle \diamond \rangle \rangle$	$A; \Box \langle \Box^{-1} \mathbf{F}A \rangle$	14
2/1	$\langle ? \langle ? \rangle \rangle$	$\Box(a \rightarrow b) \rightarrow \Box(\Box a \rightarrow \Box b)$	16
2/1	$\Box(a \rightarrow b)$	$\Box(\Box a \rightarrow \Box b)$	18
2/1.1	$\langle ? \langle \Box/1.1 \rangle \rangle$	$\Box a \rightarrow \Box b$	20
2/1.1	$\Box a$		22
2/1.1	$\langle ? \langle \Box/1.1.1 \rangle \rangle$	b	42
2/1	$\diamond \diamond \nu_i \rightarrow \diamond \nu_i$	$? \delta/1$	24
2/1	$\diamond \diamond \nu_{1.1.1} \rightarrow \diamond \nu_{1.1.1}$	$? \delta/1.1.1$	26
2/1	$\diamond \nu_{1.1.1}$	$\diamond \diamond \nu_{1.1.1}$	28
2/1	$? \diamond$	$\nu_{1.1.1}$	30
2/1.1	$? \diamond$	$\nu_{1.1.1}$	32
2/1.1.1	$\nu_{1.1.1}$	$? \diamond$	34
2/1.1.1	$a \rightarrow b$	$\langle ? \langle \Box/1.1.1 \rangle \rangle$	36
2/1.1.1	a	$\langle ? \langle \Box/1.1.1 \rangle \rangle$	38
2/1.1.1	b	a	40

SSD modal (les colonnes w indiquent les indices i (doubles) des contextes dialogiques w_i).

Commentaire :

- les coups (0) et (1) engagent la partie dans le contexte initial du métadialogue.
- Au coup (2), **P** engage le dialogue local dans le premier contexte de l'ordre logique. **O** attaque le fragment propositionnel (coup (3)).
- Les coups (4) à (11) constituent un dialogue local dans un système correspondant à K ($\delta_1 = \emptyset$). **P** ne peut se défendre contre le dernier coup.
- Le coup (12) est une nouvelle défense contre l'attaque (1), ce que rappelle le coup entre crochets [1].

- En réponse à l'attaque (13), **P** s'engage au coup (14) à défendre le fragment propositionnel dans un nouveau contexte métadiologique (le contexte 2).
- Le dialogue modal local suit le même cours que précédemment, jusqu'au coup (23). Au coup (24), **P** fait usage de l'hypothèse structurelle de transitivité, que **O** est commis à défendre (coup (25)).
- Après une instanciation adéquate de la transitivité (coups (25) et (26)), suit un dialogue au cours duquel est explicitement concédée l'accessibilité dont **P** a besoin pour gagner (c'est-à-dire 1.1.1 depuis 1) : ce sont les coups (33) à (35). Notons que **P** peut se défendre au coup (32) parce que le contexte 1.1.1 a été introduit par **O** au coup (23).
- La transitivité (locale) de l'accessibilité permet à **P** de gagner le dialogue (coups (36) à (42)).

5 Remarques conclusives

- Il n'y a, à notre connaissance, aucune caractérisation satisfaisante des propriétés des relations d'accessibilité non normales dans le langage modal hybride. Les modalités du dialogue local sont donc pour l'instant toujours normales.
- L'essentiel de la difficulté du travail, pour que les SSD puissent porter leur fruit comme système d'heuristique formelle, c'est bien évidemment la définition de l'*ordre logique* dans lequel le dialogique se joue. Nous n'avons vu ici qu'un exemple trivialement simple. Un bref coup d'œil aux dernières pages de [Hughes & Cresswell 1996]³⁸ suffit à convaincre que les relations entre les divers systèmes modaux peuvent être assez complexe. D'autant qu'aucun critère universellement recevable de minimalité n'existe. Un très grand nombre de structures peuvent donc être proposées, en accord avec les contraintes spécifiques de la lecture que l'on veut donner aux opérateurs modaux du fragment propositionnel. La spécification d'un *ordre logique* correspond donc à une nouvelle forme de "*logic design*", d'un ordre plus élevé (puisqu'il s'agit de concevoir une matrice préférentielle pour les différentes logiques et non un système particulier).

³⁸Voir [Hughes & Cresswell 1996], p. 367-368.