Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie

46 | 2011

Lettre sur les sourds et muets

Les articles de mécanique de l'*Encyclopédie*, ou D'Alembert lecteur de Varignon

Christophe Schmit

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/rde/4832>

DOI : 10.4000/rde.4832

ISSN : 1955-2416

Éditeur

Société Diderot

Édition imprimée

Date de publication : 15 novembre 2011

Pagination : 169-200

ISBN : 978-2-9520898-4-5

ISSN : 0769-0886

Référence électronique

Christophe Schmit, « Les articles de mécanique de l'*Encyclopédie*, ou D'Alembert lecteur de Varignon », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie* [En ligne], 46 | 2011, mis en ligne le 05 novembre 2011, consulté le 30 juillet 2021. URL : <http://journals.openedition.org/rde/4832> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/rde.4832>

Propriété intellectuelle

Christophe SCHMIT

Les articles de mécanique de l'*Encyclopédie*, ou D'Alembert lecteur de Varignon

L'*Encyclopédie* compte quarante articles se référant explicitement à Pierre Varignon. Jean Le Rond D'Alembert rédige trente-deux de ceux-ci et en cosigne trois (ALLÉES DE JARDIN avec d'Argenville, JAUGER avec La Chapelle et MOUVEMENT avec Formey) ; Diderot (ART), l'abbé Yvon (ARISTOTÉLISME), Jaucourt (CINTRE), Le Roy (FUSÉE), un anonyme (TRANSSUBSTANTIATION) écrivent les cinq autres¹. Parmi les trente-cinq auxquels D'Alembert participe, en suivant les désignants proposés par le savant, dix-huit ressortissent à la « Mécanique » (citons, incluant « statique », « dynamique » et « hydraulique »² : BALANCE ; CENTRE *de gravité* ; CENTROBARIQUE, *méthode centrobaryque* ; COIN ; DÉCOMPOSITION DES FORCES ; ÉQUILIBRE ; FUNICULAIRE ; HYDRAULIQUE ; ISOCHRONE ; MACHINE ; MÉCHANIQUE ; MOUVEMENT ; PLAN ; POULIE ; RÉSISTANCE ; STATIQUE ; TREUIL ; VITESSE), sept aux « Mathématiques » (« Algèbre », « Géométrie » et « Géométrie transcendante »

1. L'Abbé Mallet pourrait être cet auteur anonyme. Sur ce point, voir Jacques Proust, *Diderot et l'Encyclopédie*, Paris, Armand Colin, 1967, note 181, p. 159. Nous remercions Marie Leca-Tsiomis pour cette référence. ALLÉES DE JARDIN porte la « signature » (K) de d'Argenville et ses sept derniers paragraphes sont précédés d'un astérisque : D'Alembert, et non Diderot, en est cependant le rédacteur. Sur cette attribution, voir Fabrice Ferlin, « D'Alembert et l'optique : l'*Encyclopédie* comme banc d'essai de recherches originales », *RDE*, 43, octobre 2008, p. 127-144.

2. Bien qu'HYDRAULIQUE et MACHINE portent le désignant « hydraulique », et STATIQUE celui de « statique », nous regroupons ces articles dans la catégorie « mécanique », « qui considère le mouvement & les forces motrices, leur nature, leurs loix & leurs effets dans les machines », et qui comprend la statique (« la partie de la *Mécanique* qui considère les corps & les puissances dans un état d'équilibre »), la « mécanique » renvoyant aux « forces des machines » et la « dynamique » (pour cette dernière, voir *infra*, note 4). Voir MÉCHANIQUE, *Enc.*, X, 222b. Tous les articles de l'*Encyclopédie* cités dans ce travail sont rédigés par D'Alembert.

confondues : SÉRIE ou SUITE ; JAUGER ; FORMULE ; DÉVELOPPÉES ; CŒUR ; ASYMPTOTE ; APPROCHE), trois à la « Physique » (TUBE ; RETARDATION ; MANOMÈTRE) – deux associant cette dernière aux « Mathématiques » (CLEPSYDRE) et à la « Mécanique » (GRAVITÉ) –, un à la « Géographie » (CONFLUENT). ALLÉES DE JARDIN, PARALLÉLISME *des rangées d'arbres*, FORCE MOUVANTE et COMPOSITION DU MOUVEMENT ne comportent aucune classification, ces deux derniers appartenant cependant à la mécanique. Par ailleurs, des champs disciplinaires se recoupent : ainsi, DÉVELOPPÉES et RETARDATION traitent de mécanique, et CONFLUENT aborde des aspects d'hydraulique³. Enfin, sans prétendre à l'exhaustivité, COURBES POLYGONES évoque implicitement des travaux de Varignon.

Dans sa *Cyclopædia* (éditions de 1728 et 1753 confondues), Ephraïm Chambers mentionne Varignon dans dix articles. Ils abordent essentiellement des sujets de physique et de mécanique et dans huit d'entre eux, adaptés ou traduits par D'Alembert dans l'*Encyclopédie*, figure Varignon : l'Annexe I rassemble les passages des articles anglais où apparaissent ce nom, mis en regard avec leurs correspondants français. À l'issue de cette lecture parallèle, et d'après la comptabilité tenue dans le paragraphe précédent, la référence à Varignon dans l'*Encyclopédie* ne saurait provenir d'une seule transcription d'écrits antérieurs. Par ailleurs, son absence dans CURVE, MECHANICS, COMPOUND ou LEVER, sujets dont cette étude établit le caractère essentiel pour saisir le lien qu'entretient D'Alembert avec l'œuvre de Varignon, ne met que mieux en relief l'attention que l'encyclopédiste porte à cet auteur.

Car, en effet, les nombreuses occurrences Varignon ne résultent pas seulement de la prolixité de ce savant dans le domaine de la mécanique. D'Alembert puise matière à réflexions dans l'œuvre de son aîné et subit son influence en « dynamique », entendue à la fois comme « la science du mouvement des corps qui agissent les uns sur les autres, de quelque manière que ce puisse être, soit en se poussant, soit en se tirant par le moyen de quelque corps interposé entr'eux, & auquel ils sont attachés, comme un fil, un levier inflexible, un plan, &c. » et celle « *des puissances* ou *causes motrices*, c'est-à-dire dire des forces qui mettent les corps en mouvement »⁴. Nous justifions ces affirmations par l'examen du contenu d'articles relatifs à la science des machines et se rapportant à la définition ci-dessus.

3. Sur l'usage du désignant « Mécanique » dans l'*Encyclopédie* et le hiatus entre la classification des sciences exposée dans le Discours préliminaire et celle proposée dans les articles, voir Alain Firode, « Les catégories de la mécanique dans l'*Encyclopédie* », *RDE*, 40-41, octobre 2006, p. 179-192.

4. DYNAMIQUE, *Enc.*, V, 174b.

Un livre référence sur la statique

Telle est l'opinion de D'Alembert concernant la *Nouvelle Mécanique ou statique*⁵, livre posthume de Varignon. Ainsi, selon l'encyclopédiste, « l'ouvrage le plus étendu que nous ayons sur la *statique*, est la *nouvelle mécanique* de M. Varignon, imprimée à Paris en 1725, en deux volumes in-4°. Dès l'année 1687 l'auteur avoit donné un ouvrage sur ce même sujet avec le titre *projet d'une nouvelle mécanique* »⁶. À en croire Fontenelle, le *Projet* de 1687⁷ valut à son auteur l'estime de ses pairs et reconnaissance académique⁸. Rédigé à partir de ce premier opus, l'édition de 1725 en reprend le principe fondamental⁹ appliqué à l'étude des machines simples¹⁰ ; la taille plus conséquente de ce livre tient avant tout à la multiplication des corollaires comme autant de cas particuliers de théorèmes généraux¹¹. Dans son « principe général », identifiable au parallélogramme des forces, Varignon énonce que :

5. Pierre Varignon, *Nouvelle Mécanique ou statique, dont le projet fut donné en M.DC.LXXXVI. Ouvrage posthume de M. Varignon, des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse, Lecteur du Roy en Philosophie au College Royal, & Professeur des Mathématiques au College Mazarin*, 2 tomes, Paris, Claude Jombert, 1725.

6. STATIQUE, *Enc.*, XV, 496b.

7. Pierre Varignon, *Projet d'une nouvelle mécanique avec un Examen de l'opinion de M. Borelli, sur les propriétés des Poids suspendus par des Cordes*, Paris, Veuve Edme Martin, Jean Boudet, Estienne Martin, 1687.

8. Bernard Le Bovier de Fontenelle, *Eloge de M. Varignon*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1722. Avec les Memoires de Mathematiques & de Phisiques pour la même Année*, Paris, Imprimerie Royale, 1724, p. 139-140 : « La nouvelle Mécanique fut reçûe de tous les Geometres avec applaudissement ; & elle valut à son Auteur deux places considerables, l'une de Geometre dans cette Academie en 1688, l'autre de Professeur de Mathematiques au College Mazarin ».

9. À propos de l'usage de ce principe du « mouvement composé » dans chacun de ses deux livres, Varignon note que « tous les Mathematiciens se servent de mouvemens composez pour la generation d'une infinité de ligne courbe ; & tous les Physiciens exacts, pour déterminer les forces des chocs ou des percussions obliques, &c. Ainsi je ne prétends rien de l'usage que j'ai indiqué il y a près de 40 ans [aux environs de 1687], & que j'en fais encore ici [en 1725] pour l'explication des Machines ». Voir *Nouvelle Mécanique ou statique*, tome I, *op. cit.*, p. 8.

10. D'Alembert en dénombre six (levier, poulie, plan incliné, treuil, roue, vis), voir MACHINE, *Enc.*, IX, 794b. Dès 1687, Varignon en ajoute une à cette liste, la machine funiculaire, qui apparaît sous la forme d'« un assemblage de cordes, par le moyen desquelles deux ou plusieurs puissances soutiennent un ou plusieurs poids », voir FUNICULAIRE, *Enc.*, VII, 376b. Voir aussi MÉCANIQUE, *Enc.*, X, 223a.

11. Dans ses travaux de mécanique analytique, Varignon multiplie, parfois sans nécessité, les cas particuliers comme autant d'exemples appuyant la généralité d'une formule algébrique et l'efficacité du calcul analytique. Le reproche adressé par D'Alembert à ce sujet peut tout autant s'appliquer au contenu, bien que géométrique, de la *Nouvelle Mécanique* de 1725 : « pour qu'une formule générale soit vraiment utile, & qu'il

Quel que soit le nombre des forces ou des puissances quelconques, dirigées comme l'on voudra, qui agissent à la fois sur un même corps, ou ce corps ne se remuera point du tout, ou il n'ira que par un seul chemin, & suivant une ligne qui sera la même que si au lieu d'être ainsi poussé, pressé, ou tiré par toutes ces puissances à la fois, ce corps ne l'étoit suivant la même ligne, & en même sens que par une seule force ou puissance équivalente ou égale à la résultante du concours de toutes celles-là¹².

Un premier corollaire introduit, par l'appel à l'« axiome 3 »¹³ que complète la Définition IV¹⁴, l'opposition à la résultante des « puissances » soit, finalement, l'équilibre des forces : si un corps

n'étoit pressé, poussé ou tiré que par une seule force, un obstacle invincible, ou du moins une résistance égale à cette force, opposé à ce corps dans la direction de cette même force, l'arrêteroit (*ax. 3.*) tout court ; [...] Donc aussi un obstacle invincible, ou du moins une résistance égale à la force résultante du concours d'action de tant d'autres quelconques qu'on voudra, & dirigées comme l'on voudra, opposé dans la direction de cette force résultante au corps, sur lequel agissent toutes celles-là, l'arrêtera tout court, & soutiendra ainsi sur lui toutes ces forces ou puissances en équilibre entr'elles¹⁵.

Varignon entend donc développer une méthode simple pour « mettre en équilibre entr'elles tant de forces ou de puissances quelconques qu'on

y ait du mérite à l'avoir trouvée, il faut que la *formule* générale soit plus difficile à trouver que la *formule* particulière, c'est-à-dire que le problème énoncé généralement renferme des difficultés plus grandes que le problème particulier qui a donné occasion de chercher la méthode générale. Feu M. Varignon, géomètre de l'académie des Sciences, aimoit à généraliser ainsi des *formules* ; mais malheureusement ses *formules* générales étoient presque toujours privées de l'avantage dont nous parlons : & dans ce cas une *formule* générale n'est qu'une puérilité ou une charlatanerie. M. Bernoulli, ou un autre géomètre, résolvait-il un problème difficile ? M. Varignon aussi-tôt le généralisoit, de manière que l'énoncé plus général renfermoit en apparence plus de difficultés, mais en effet n'en avoit aucune de plus, & n'exigeoit pas qu'on ajoutât la moindre chose à la méthode particulière : aussi M. Bernoulli disoit-il quelquefois après avoir résolu un problème, qu'il le *laissoit à généraliser à M. Varignon* ». Voir FORMULE, *Enc.*, VII, 184a.

12. Pierre Varignon, *Nouvelle Mécanique ou statique*, tome I, *op. cit.*, « Principe general », p. 6-7.

13. *Ibid.*, Axiome III p. 5 : « un corps [...] pressé, poussé, ou tiré tout à la fois par deux forces égales, & directement opposées [...] doit rester immobile, c'est-à-dire, en repos, sans autre obstacle que la contrariété de ces forces qui se détruisent, ou s'empêchent également l'une l'autre, chacune soutenant l'autre toute entière ».

14. *Ibid.*, Définition IV p. 4 : « lorsque tout demeure en repos, nonobstant l'action de [...] forces ou puissances l'une contre l'autre, ou contre l'obstacle qui les arrête », les « forces sont dites en *Équilibre* entr'elles ».

15. *Ibid.*, Corollaire I p. 7.

voudra, qui dirigées à volonté, agissent toutes à la fois sur un même corps »¹⁶. En effet, il suffit d'opposer au concours des puissances une force de même direction et d'intensité égale à leur résultante ; réciproquement, l'équilibre requiert une telle force, et « ce théorème & ses corollaires servent de fondement à toute la mécanique de M. Varignon »¹⁷. Sur cette base, il retrouve les propositions classiques donnant les conditions d'équilibre sur les machines simples soit, par exemple, pour le levier, la proportion inverse des poids aux longueurs des bras (voir l'Annexe II pour un résumé de la démonstration de Varignon).

Lecture critique des principes

Exceptés ROUE (*Enc*, XIV, 386b-388a) et VIS (*Enc*, XVII, 331a-332a), les articles de l'*Encyclopédie* rédigés par D'Alembert et relatifs aux machines simples se réfèrent au livre de Varignon : sous la forme d'un simple renvoi (COIN, *Enc*, III, 610b ; FUNICULAIRE, *Enc*, VII, 376b ; PLAN, *Enc*, XII, 693a ; POULIE, *Enc*, XIII, 204b), de critiques explicites (TREUIL, *Enc*, XVI, 608a-608b, D'Alembert invitant à consulter « M. Ludot [qui] dans une piece sur le cabestan, qui a partagé le prix de l'académie en 1741 », montre l'insuffisance de la théorie de Varignon¹⁸ ; BALANCE, *Enc*, II, 25b) ou implicites (LEVIER, *Enc*, IX, 446b-447a, reproche identique à celui contenu dans BALANCE). Concernant la loi du levier droit, si D'Alembert loue « l'élégance & [...] l'uniformité » de la démonstration de Varignon, laquelle repose sur son principe indépendamment de la forme du levier et des directions des forces, elle renferme cependant à ses yeux « le défaut d'être indirecte, & de n'être pas tirée des

16. *Ibid.*, p. 8.

17. COMPOSITION DU MOUVEMENT, *Enc.*, III, 770b. Voir aussi FORCE MOUVANTE, *Enc.*, VII, 120a : « pour calculer le cas de l'équilibre, il suffit d'employer le principe de la composition & de la décomposition des forces. Il faut pour cela prolonger d'abord, s'il est nécessaire, les directions de deux forces quelconques, & chercher celle qui en résulte ; ensuite chercher la résultante de cette dernière & d'une troisième force, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une dernière force, qui doit ou être = 0, ou au moins passer par un point fixe, pour qu'il y ait équilibre. En effet, si cette dernière force qui résulte de la réunion de toutes les autres, n'étoit pas égale à zéro, ou ne passoit pas par un point fixe dont la résistance anéantît son action, il n'y auroit pas d'équilibre, comme on le suppose, puisque cette force produiroit alors quelque mouvement. Ce principe de la réduction de toutes les forces à une seule, renferme toute la Statique, & on peut en voir l'application aux articles des différentes machines » ; D'Alembert cite Varignon quelques lignes avant ce paragraphe.

18. Jean-Baptiste Ludot, *Recherche sur la meilleure construction du Cabestan*, dans *Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences en M. DCC. XLI.*, Paris, G. Martin, J. B. Coignard, les Freres Guerin, 1755, p. 123-198.

vrais principes de l'équilibre »¹⁹. Le raisonnement de Varignon repose implicitement sur une loi de continuité : d'une manière générale, l'équilibre requiert une résultante passant par le point de concours des puissances et le point d'appui ; s'ensuit le cas particulier de forces verticales, parallèles et de même intensité, appliquées sur des bras égaux, le point de concours se voyant alors rejeté à l'infini. D'Alembert, recourant au principe de raison, estime ce dernier équilibre évident : « on ne voit bien clairement l'équilibre dans la *balance* que quand les bras en sont égaux & chargés de poids égaux. La meilleure manière de démontrer l'équilibre dans les autres cas [de leviers droits aux bras inégaux], est peut-être de les ramener à ce premier, simple & évident par lui-même »²⁰, ce qu'il fait dans son *Traité de dynamique*²¹. Dans ce même livre, il établit la loi de l'équilibre pour un levier courbe à l'aide de celui entre « deux puissances égales & opposées en ligne droite » mais celles-ci « s'évanouissent »²² dans le cas de forces parallèles appliquées à un levier droit, et D'Alembert juge peu « rigoureuse »²³ une démonstration qui passerait d'un cas à l'autre par le recours à un principe de continuité. Ainsi, il reproche à Varignon un manque de rigueur et un raisonnement en ce sens « indirect » qu'il ne s'appuie pas sur « les vrais principes » soit, ici, l'équilibre de poids égaux sur des bras égaux de levier²⁴.

19. BALANCE, *Enc.*, II, 25b.

20. BALANCE, *Enc.*, II, 25a. D'Alembert développe une analogie entre l'équilibre sur un levier droit et la collision des corps : « il en est à peu-près de ce principe comme de celui de l'équilibre ; on ne voit l'équilibre de deux corps avec toute la clarté possible que lorsque les deux corps sont égaux, & qu'ils tendent à se mouvoir en sens contraire avec des vitesses égales. Car alors il n'y a point de raison pour que l'un se meuve plutôt que l'autre ; & si l'on veut démontrer rigoureusement l'équilibre lorsque les deux corps sont inégaux, & tendent à se mouvoir en sens contraire avec des vitesses qui soient en raison inverse de leurs masses, on est obligé de rappeler ce cas au premier, où les masses & les vitesses sont égales », *ibid.* Sur l'usage du principe de raison chez D'Alembert dans sa démonstration des principes, voir Alain Firode, *La dynamique de D'Alembert*, Paris/Montréal, Vrin/Bellarmin, 2001, p. 85-116.

21. Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique, dans lequel les loix de l'équilibre & du mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possibles, & démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque*, Paris, David l'aîné, 1743, article 47 p. 45-46.

22. Pour le levier courbe, D'Alembert décompose les deux forces qui agissent sur les bras en composantes passant par le point d'appui et qui sont donc détruites et en deux autres opposées et de même direction : l'équilibre implique leur égalité. La démonstration repose donc sur ces « deux puissance égales & opposées en ligne droite ». Voir Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, article 45 p. 44.

23. *Ibid.*, article 47 p. 45.

24. Notons que D'Alembert utilise deux principes (égalité de puissances opposées pour un levier courbe et symétrie de configuration pour un droit) qu'il juge irréductibles

Par ailleurs, D'Alembert remarque que tous les mécaniciens ne s'accordent pas sur la démonstration du parallélogramme des forces : s'il n'évoque pas explicitement celle de Varignon, le résumé critique qu'il donne d'une preuve, identique à celle contenue dans la *Nouvelle Mécanique*, invite à penser qu'il vise son auteur²⁵. Poussé par deux « forces uniformes » (entendre qui impriment des mouvements uniformes), de directions différentes et continuellement agissantes, « il est certain qu'un corps [...] décrit la diagonale d'un parallélogramme formé sur les directions de ces forces », car un « point *a* [...] étant poussé continuellement, suivant *ad* & suivant *ab* [...] il est dans le même cas que s'il étoit sur une règle *ad* qu'il parcourût d'un mouvement uniforme, tandis que cette règle *ad* se mouvroit toujours parallèlement à elle-même, suivant *dc* ou *ab* »²⁶ ; Varignon recourt à une règle mobile dans son Lemme I dévolu à la loi de composition²⁷. D'Alembert poursuit en notant la vanité du procédé lorsque *a* reçoit des « impulsions [qui] l'abandonnent tout-à-coup » : « il n'est pas alors aussi facile de démontrer en toute rigueur que ce point *a* décrit la diagonale *ac* »²⁸ car « dès qu'il [le corps] a pris une direction moyenne [...], les deux tendances [...] n'existent plus »²⁹. Dans ce dernier cas, l'usage d'une règle mobile revient à postuler un comportement identique que les actions soient continues ou non, ce qui invite alors en retour à présupposer la permanence des forces et donc une conservation des tendances initiales pour le cas d'impulsions. Le reproche qu'adresse ici D'Alembert « est similaire à celui qu'il dirige contre les preuves habituelles du principe d'inertie » qui postulent « l'action continue d'une force motrice »³⁰ : D'Alembert proscrie de sa mécanique les « forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obscurs & Métaphysique »³¹ qu'« on imagine dans la matière »³² afin de justifier la

l'un à l'autre et, par conséquent, « la démonstration pour ce cas [du levier droit] n'a pu être tirée qu'indirectement du cas général [du levier courbe] ». Voir Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, article 47 p. 46. Voir aussi BALANCE, *Enc.*, II, 25b.

25. COMPOSITION DU MOUVEMENT, *Enc.*, III, 770a. Varignon est mentionné quelques lignes après cette critique.

26. *Ibid.*

27. Pierre Varignon, *Nouvelle Mécanique ou statique*, tome I, *op. cit.*, Lemme I p. 13-14. L'auteur suppose un mobile soumis à une « force productrice » sur une verge, elle-même animée par une autre « force productrice ».

28. COMPOSITION DU MOUVEMENT, *Enc.*, III, 770a.

29. *Ibid.* Critique identique à celle développée dans le *Traité de dynamique*, *op. cit.*, article 22 p. 24-25.

30. Alain Firode, *La dynamique de D'Alembert*, *op. cit.*, p. 95.

31. Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, Préface p. xvj.

32. *Ibid.*, article 7 p. 6. Voir aussi FORCE D'INERTIE, *Enc.*, VII, 111a.

continuation du mouvement. Or, dans la preuve de son Lemme II de composition, Varignon s'appuie sur une « ligne mobile » en même temps qu'il attribue au corps une « force ou vitesse [...] propre » rappelant ces « êtres » prohibés par D'Alembert³³.

Composition et collisions obliques

Si des articles de l'*Encyclopédie* portent la trace d'une lecture critique, d'autres invitent à considérer la *Nouvelle Mécanique* comme une source d'inspiration.

Dans son Lemme III, Varignon énonce une loi de composition appliquée à un corps quelconque, sans pesanteur, soumis à deux forces. Le corps, EFGH, « parcourra la diagonale AD du parallélogramme BC [...] par le concours d'action de ces deux puissances E, F, dans le même tems que séparément elles lui auroient fait parcourir les côtes correspondans AC, AB, de ce parallélogramme »³⁴ (voir figure 1). Suivent trois autres constats :

- le corps « reçoit de chacune des puissances E, F, deux impressions à la fois » et, par exemple, pour la seule puissance E, « deux impressions suivant AQ, AN, dont les forces sont à cette puissance E, comme ces côtes [...] du parallélogramme NQ sont à la diagonale AC »³⁵ ;
- ce que E « employe de force, ou fait d'effort suivant AD sur ce corps EFGH, est à ce que la puissance F en fait sur lui suivant la même ligne, pour ou contre, comme AQ, est à AP »³⁶ ;
- « le surplus de force suivant AN, AM, des puissances E, F, se détruit ou s'empêche toujours mutuellement »³⁷.

33. Varignon suppose qu'une force meuve une règle et qu'un mobile reposant sur celle-ci subisse aussi l'action d'une force identique de mêmes sens et direction : « sans s'aider ni se nuire », chaque corps se meut « seul de la force ou vitesse qui lui est propre », la règle ne transportant donc pas le corps. Simultanément, ce dernier est « poussé » suivant une autre direction : sans être emporté par la ligne mobile, il « seroit toujours sur elle ainsi mûe, comme si elle l'emportoit effectivement avec elle ». Finalement, il n'y a aucune raison pour que mobile supposé subir l'action de deux forces ne suive pas la trajectoire qu'il décrivait lorsque la règle le transportait comme dans le Lemme I ; Varignon présume la permanence d'actions. Voir Pierre Varignon, *Nouvelle Mécanique ou statique*, tome I, *op. cit.*, Lemme II p. 14-16. Notons, par ailleurs, que le modèle de « force » ou « puissance motrice » introduit dans ce livre repose sur la collision de corps durs, soit sur une impulsion. *Ibid.*, p. 9-10.

34. Pierre Varignon, *Nouvelle Mécanique ou statique*, tome I, *op. cit.*, Lemme III p. 28. À correspond au centre de masse du corps.

35. *Ibid.*, p. 27. Le raisonnement vaut pour F avec les composantes AP, AM.

36. *Ibid.*, p. 27-28.

37. *Ibid.*, p. 28.

Figure 1 (d'après *Nouvelle Mécanique*, Tome I, Planche 1, Figure 4 p. 92)

La résultante des « actions » des forces sera la somme des composantes AQ et AP de E et F le long de AD. Le mouvement initial (par exemple, celui issu de la force E) peut ainsi se concevoir comme renfermant une puissance détruite (AN) et une autre participant au mouvement final (AQ) ; le Corollaire VI de ce lemme rend compte d'une telle pratique.

Varignon y suppose « un corps dur A sans pesanteur, poussé par une seule force ou puissance E suivant ED, oblique à un plan dur & immobile GH »³⁸ (voir figure 2). Ce mobile, rencontrant le plan en C, est « poussé [...] de même que s'il l'étoit par le concours de deux puissances ou forces dirigées suivant les côtes AC, AB, du parallélogramme rectangle BC, lesquelles fussent à la puissance E comme ces côtes sont à la diagonale AD de ce parallélogramme »³⁹. Directement opposé à la force suivant AC, le « plan [...] recevrait & soutiendrait (Ax. 3.) tout le coup [de celle-ci], sans en rien recevoir ni soutenir de la seconde ». Varignon conclut que, d'une part, le corps « poussé » par la force E suivant AD frappe « le plan GH d'une force qui seroit à celle-là, comme AC à AD » et, d'autre part, que le mobile « couleroit après cela de C vers H suivant CH de la force qui lui resteroit seule & toute entière suivant AB, laquelle seroit à la force E, comme AB, ou CD est à AD »⁴⁰. La réaction AC du pan de mur joue ici le rôle de la force AM du Lemme III et « détruit » la composante orthogonale du mouvement incident.

38. *Ibid.*, Corollaire VI p. 35.

39. *Ibid.*

40. *Ibid.*

Figure 2 (d'après *Nouvelle Mécanique*, Tome I, Planche 1, Figure 8 p. 92)

Le Corollaire VIII traite d'un choc direct : pour qu'un corps « poussé ou tiré » demeure au repos sur la surface qu'il percute, « il faut qu'il le soit suivant la perpendiculaire à ce plan en un point où il le touche » et, réciproquement, subissant cette poussée ou traction perpendiculairement au plan, il « doit (Ax. 3.) demeurer au repos, n'ayant (Hyp.) que cette impression ou force perpendiculaire, à laquelle la force invincible du plan est alors directement opposée »⁴¹.

Dans ces deux cas, Varignon recourt à l'Axiome III qui stipule qu'un corps soumis à des forces « égales, & directement opposées », donc qui « se détruisent », reste « en repos », celles-ci étant dites en « équilibre »⁴². Dès lors, l'issue d'une collision oblique repose sur une décomposition du mouvement initial qui renferme à la fois celui après le choc et celui que l'obstacle équilibre.

Ces exemples apparaissent chez d'autres auteurs s'inspirant de Varignon : Dortous de Mairan⁴³, Jean (?) Trabaud⁴⁴. Ils figurent aussi dans le *Traité de dynamique*⁴⁵ et constituent un moment essentiel pour comprendre l'origine du principe dit de D'Alembert. Dans son « principe général », D'Alembert préconise, afin de déterminer le « Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres », de

41. *Ibid.*, Corollaire VIII p. 35-36.

42. *Ibid.*, pp. 4-5.

43. Jean-Jacques Dortous de Mairan, *Recherches physico-mathématiques sur la reflexion des corps*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1722. Avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, pour la même Année*, Paris, Imprimerie Royale, p. 8-10. Notons que Fontenelle signe l'approbation à la publication de la *Nouvelle Mécanique* de Varignon après examen du livre par, entre autres, Dortous de Mairan. Voir Registres des Procès-Verbaux de l'Académie Royale des Sciences, séance du 6 décembre 1724, tome 43, f°357.

44. Jean (?) Trabaud, *Principes sur le mouvement et l'équilibre, pour servir d'introduction aux Mécaniques & à la Physique*, J. Desaint et C. Saillant, Paris, 1741, articles 173 à 178 p. 68-71. Trabaud cite de nombreuses fois la « nouvelle Mécanique » de Varignon, dans laquelle ce dernier « déduit les propriétés de toutes les machines simples ou élémentaires, en leur appliquant immédiatement le principe des mouvements composés », p. 324.

45. Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, articles 30 p. 32-33 pour la collision oblique, et article 29 p. 32 pour la collision directe.

décompose[r] les Mouvements a, b, c &c. imprimés à chaque Corps, chacun en deux autres α , β ; γ , κ ; &c. qui soient tels, que si l'on n'eût imprimé aux Corps que les Mouvements a, b, c &c. ils eussent pû conserver ces Mouvements sans se nuire réciproquement; & que si on ne leur eût imprimé que les Mouvements α , β , κ , &c. le système fut demeuré en repos; il est clair que a, b, c seront les Mouvements que ces Corps prendront en vertu de leur action⁴⁶.

Cet énoncé définit une « méthode fort simple & fort directe, & qui ne consiste que dans la combinaison des principes de l'équilibre & du mouvement composé »⁴⁷. Elle permet la résolution de tous les problèmes de « dynamique », la collision ressortissant à cette catégorie⁴⁸. Dans l'article MÉCHANIQUE, D'Alembert résume l'esprit de cette méthode puis aborde la question du choc sur des obstacles insurmontables :

Comme le mouvement d'un corps qui change de direction, peut être regardé comme composé du mouvement qu'il avoit d'abord, & d'un nouveau mouvement qu'il a reçu, de même le mouvement que le corps avoit d'abord peut être regardé comme composé du nouveau mouvement qu'il a pris, & d'un autre qu'il a perdu. De là il s'ensuit, que les lois du mouvement changé par quelques obstacles que ce puisse être, dépendent uniquement des lois du mouvement, détruit par ces mêmes obstacles. Car il est évident qu'il suffit de décomposer le mouvement qu'avoit le corps avant la rencontre de l'obstacle, en deux autres mouvemens, tels que l'obstacle ne nuise point à l'un, & qu'il anéantisse l'autre. Par-là, on peut non-seulement démontrer les lois du mouvement changé par des obstacles insurmontables, *les seules qu'on ait trouvées jusqu'à présent par cette*

46. *Ibid.*, article 50 p. 51. Voir DYNAMIQUE, *Enc.*, V, 175a-175b : « Imaginons qu'on imprime à plusieurs corps, des mouvemens qu'ils ne puissent conserver à cause de leur action mutuelle, & qu'ils soient forcés d'altérer & de changer en d'autres. Il est certain que le mouvement que chaque corps avoit d'abord, peut être regardé comme composé de deux autres mouvemens à volonté (*voyez DÉCOMPOSITION & COMPOSITION du mouvement*), & qu'on peut prendre pour l'un des mouvemens composans celui que chaque corps doit prendre en vertu de l'action des autres corps. Or si chaque corps, au lieu du mouvement primitif qui lui a été imprimé, avoit reçu ce premier mouvement composant, il est certain que chacun de ces corps auroit conservé ce mouvement sans y rien changer, puisque par la supposition c'est le mouvement que chacun des corps prend de lui-même. Donc l'autre mouvement composant doit être tel qu'il ne dérange rien dans le premier mouvement composant, c'est-à-dire que ce second mouvement doit être tel pour chaque corps, que s'il eût été imprimé seul & sans aucun autre, le système fût demeuré en repos ». Voir aussi DÉCOMPOSITION DE FORCES, *Enc.*, IV, 699b et MÉCHANIQUE, *Enc.*, X, 226b.

47. Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, Préface, p. xxiv. Voir aussi DYNAMIQUE, *Enc.*, V, 175a.

48. « Les problèmes où l'on détermine les lois de la percussion des corps, sont des problèmes de *Dynamique* », DYNAMIQUE, *Enc.*, V, 174b.

méthode ; on peut encore déterminer dans quel cas le mouvement est détruit par ces mêmes obstacles. À l'égard des lois du mouvement changé par des obstacles qui ne sont pas insurmontables en eux-mêmes, il est clair par la même raison, qu'en général il ne faut point déterminer ces lois, qu'après avoir bien constaté celles de l'équilibre⁴⁹.

Par cette phrase, « les seules qu'on ait trouvées jusqu'à présent par cette méthode », D'Alembert reconnaît qu'avant 1743, date de publication de son *Traité*, on utilisait sa « méthode » pour un cas particulier de choc. Si l'*Encyclopédie* recèle de multiples références à la *Nouvelle Mécanique*, le *Traité de dynamique* se réfère aussi Varignon à propos de sa démonstration de la loi du levier⁵⁰. Par ailleurs, D'Alembert invite à consulter l'ouvrage de Trabaud pour son exposé de la science des machines⁵¹ et, alors jeune académicien, il se réfère au Mémoire de Dortous de Mairan précédemment mentionné⁵². Ces éléments suggèrent que la lecture de ces auteurs constitue une source d'inspiration : un cas trivial d'interaction mécanique – une collision sur une surface dure –, constituerait une première étape à partir de laquelle D'Alembert infèrerait un principe plus général.

L'examen que fait D'Alembert de la statique de Varignon offre alors un double visage, entre critiques et amendement. Entendant « aplanir » l'abord de la mécanique, déduire ses fondements des « notions les plus claires », dévoiler « l'inutilité de plusieurs Principes »⁵³, rien de surprenant que ses remarques portent essentiellement sur les principes employés par Varignon. Ainsi de la loi du levier dont la démonstration ne repose pas sur l'évidence d'un équilibre que justifie le principe de raison, ainsi de la preuve du parallélogramme des forces sujette à caution car appelant des entités inhérentes à la matière. Malgré tout, la

49. MÉCHANIQUE, *Enc.*, X, 225b-226a. Nous soulignons en italiques. Voir aussi Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, Préface p. xiiij-xiv.

50. Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, article 47 p. 46-47.

51. *Ibid.*, article 49 p. 48. En ce qui concerne « le détail des différentes machines », il renvoie le lecteur à « l'ouvrage de M. Trabaud, qui a paru l'année dernière, et qui a pour titre : *Principes sur le mouvement et l'équilibre* ; ouvrage où cette matière et plusieurs autres sont traitées avec exactitude et clarté ».

52. Jean Le Rond D'Alembert, *Du mouvement d'un corps qui s'enfonce dans un fluide ou essai d'une nouvelle théorie de la Réfraction des corps solides*, texte lu les 12, 15, 19, 22, 26, 29 juillet et 2 août 1741, et figurant dans les Registres des Procès-Verbaux de l'Académie Royale des Sciences, tome 60, p. 369-404. Concernant les différentes théories relatives à la réfraction, D'Alembert estime « que nous avons la-dessus d'excellents morceaux, entre autres deux mémoires de Mr de Mairan, imprimées parmi ceux de l'Académie en 1722 & 1723 », voir p. 369.

53. Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, Préface, p. iv-v. Voir aussi MÉCHANIQUE, *Enc.*, X, 224b.

technique associant décomposition et équilibre dans l'examen de l'interaction des corps semblent inspirer le savant. C'est aussi une méthode, contenue dans les travaux de mécanique céleste de Varignon, que D'Alembert reconduit.

Calcul des forces centrales

D'Alembert connaît les travaux de mécanique céleste de Varignon relatifs aux forces centrales⁵⁴. Il note que

M. Varignon a appliqué la théorie des rayons des *développées* à celle des forces centrales ; desorte qu'ayant le rayon de la *développée* d'une courbe, on peut trouver la valeur de la force centrale d'un corps, qui étant mû sur cette courbe, se trouve au même point où le rayon se termine ; ou réciproquement la force centrale étant donnée, on peut déterminer le rayon de la *développée*⁵⁵.

Dès 1701, Varignon établit une règle générale lui donnant l'expression d'une force centrale en fonction d'un rayon de courbure en un point quelconque d'une trajectoire courbe.

Soit une courbe QLM (Figure 3) ; C le centre des forces centrales ; AL le rayon de la développée à la courbe en L ; LH la tangente à cette courbe en L. Dl, parallèle à CL, correspond à la déviation par rapport à la tangente en L que subit le mobile sous l'action de la force pendant le temps de parcours de Ll. Varignon prend Ll « indéfiniment petite », puis trace les arcs LR, IE de centres C et L, et RP perpendiculaire à Ll. Avec ALl et LEI deux triangles semblables, il suit : $AL(n).Ll(ds) :: Ll(ds).IE$ soit $IE = \frac{ds^2}{n}$. LIR et LRP aussi semblables et rectangles en P et R

54. Il s'agit des « forces ou puissances par lesquelles un corps mû tend vers un centre de mouvement, ou s'en éloigne », cette distinction entraînant une division « en deux especes, eu égard aux différentes manieres dont elles sont dirigées par rapport au centre, savoir en *centripetes* & en *centrifuges* ». Voir CENTRAL, *Enc.*, II, 822a.

55. DÉVELOPPÉES, *Enc.*, IV 908a. En tirant l'extrémité d'un fil enroulé sur une courbe de telle sorte qu'il demeure tendu et tangent à celle-ci, ce point en décrit une autre nommée développante de la première, elle même appelée développée. Voir DÉVELOPPANTE, *Enc.*, IV, 907a et DÉVELOPPÉES, *Enc.*, IV 907a-907b. Le segment compris entre le lieu de tangence et cette extrémité est perpendiculaire à la développante et correspond au rayon de courbure du cercle tangent à cette courbe au point que définit le bout du fil, soit au « rayon *osculateur* [...] ; & cercle *osculateur* est le cercle qui a pour rayon le rayon de la développée », voir OSCULATEUR, *Enc.*, XI, 681a. Pour cette terminologie et un résumé de l'usage des développées en mécanique aux alentours des années 1730 et 1740, voir F. De Gandt, « Les études newtoniennes du jeune D'Alembert », dans *La formation de D'Alembert, RDE*, 38, avril 2005, p. 177-190.

conduisent à la proportion $Ll(ds).Rl(dz) :: LR(dz).RP :: y(\text{force suivant LC}).\text{force suivant PR}$ « cette dernière s'identifie alors à $y \times \frac{dz}{ds}$ ⁵⁶. Avec PR et LE orthogonales à LH,

l'espace $El(\frac{ds^2}{n})$ est ce qu'il y a de parcouru en vertu de cette force $(y \times \frac{dz}{ds})$ pendant l'instant dt par le corps qui décrit l'arc élémentaire Ll , au lieu de suivre la tangente LH , comme il auroit fait sans cette force ou sans y . Donc cette force instantanée lui ayant été continuellement appliquée pendant ce tems dt , & d'ailleurs étant constant que des espaces ainsi parcourus en vertu de forces uniformes & toujours appliquées, (ainsi que l'on pense être d'ordinaire la pesanteur) sont comme les produits de ces forces par les quarrés des tems de leur application non interrompue ; l'on aura $\frac{ds^2}{n} = y \times \frac{dz}{ds} \times dt^2$, ou $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$, pour la Regle cherchée ⁵⁷.

Pour obtenir cette dernière formule, Varignon applique une version de la loi de chute de Galilée généralisée aux infiniment petits, soit

56. Pierre Varignon, *Autre regle generale des forces centrales. Avec une maniere d'en déduire & d'en trouver une infinité d'autres à la fois, dépendemment & indépendemment des Rayons osculateurs qu'on va trouver aussi d'une maniere infiniment generale*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1701. Avec les Mémoires de Mathématiques & de Physiques pour la même Année*, Paris, Gabriel Martin, Jean-Baptiste Coignard, Hippolyte-Louis Guérin, 1743 (2e éd.), p. 21. Comme l'a remarqué P. Costabel, Varignon commet une erreur en considérant AlI et LEl semblables. L'angle en A est double de l'angle LIE ; Varignon devrait ainsi obtenir ainsi $IE = \frac{ds^2}{2n}$. Mais puisque, par la suite, la déviation El que produit une force F centrée en A est donnée par la relation $El = F \times dt^2$ alors qu'il devrait s'agir de $El = \frac{F \times dt^2}{2}$, il s'ensuit une compensation d'erreurs et la bonne formule reliant la force centrale y dirigée vers C au le rayon osculateur. Voir « Varignon et l'écriture différentielle du mouvement de la force centrale », dans *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Pierre Costabel et Jeanne Peiffer (éds.), vol. 3, Basel, Birkhauser, 1992, p. 447. Voir aussi Pierre Costabel, « Courbure et Dynamique. Jean I Bernoulli correcteur de Huygens et Newton », dans *Der Ausbau des Calculus durch Leibniz und die Brüder Bernoulli*, Wiesbaden GmbH, Stuttgart, Franz Steiner Verlag, 1989, p. 17-18.

57. *Ibid.* Cette formule est exacte. Dans une base de Frenet associée au point L ($L, \vec{e}_t, \vec{e}_n$), on aura pour accélération normale en L $\vec{a}_n = \frac{v^2}{n} \vec{e}_n$, avec n le rayon de courbure instantané. D'après les données du problème, $v = \frac{Ll}{dt} = \frac{ds}{dt}$ soit $a_n = (\frac{ds}{dt})^2 \cdot \frac{1}{n}$ (1). Si on pose cette dernière valeur égale à F_n , composante normale de la force en L , il suit que la force y le long de LC vaudra $y = \frac{F_n}{\cos \theta}$ avec $\theta = \text{angle}(LRP)$. Or, puisque LRP et LIR sont semblables, avec $Ll=ds$ et $Rl=dz$, il vient $dz=ds \cdot \cos \theta$, soit $y = F_n \cdot \frac{ds}{dz}$. En remplaçant F_n par (1), on retrouve l'expression de y donnée par Varignon.

l'expression analytique du lemme X des *Principes* de Newton⁵⁸ : elle lui permet de relier la déviation entre la tangente en L (trajectoire suivie sans l'action y) et la courbe assimilée à son cercle osculateur à la force dirigée le long du rayon d'osculatation LA (la composante orthogonale de y). Cette méthode revient à trouver l'expression de la force dans le cercle osculateur ($y \times \frac{dz}{ds}$), puis à la projeter le long de la droite d'action LC

pour obtenir y⁵⁹. Par la suite, Varignon substitue la valeur des n par leurs formules analytiques figurant dans l'*Analyse des infiniment petits* du Marquis de l'Hôpital, ce qui lui permet, par exemple, de retrouver la loi newtonienne en $1/r^2$ dans le cas d'une ellipse dont le centre de force se confond avec un des foyers⁶⁰.

Varignon obtient cependant une valeur de déviation El double de celle qu'il devrait trouver car il utilise simultanément la méthode polygonale et celle s'appuyant sur un cercle osculateur⁶¹. Ces approxi-

58. Le lemme X stipule que « les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée & immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps ». Voir Isaac Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle, par feu Madame la Marquise du Chastellet*, Paris, Desaint & Saillant, Lambert, (trad. de l'édition de 1726), Lemme X p. 42.

59. Voir CENTRAL, *Enc.*, II, 823a-823b : pour déterminer « les forces centrales sur des courbes autres que des cercles, il faut prendre au lieu des rayons des cercles, les rayons de la développée de ces courbes qui changent à chaque point, & qu'on trouve par des méthodes géométriques : d'où l'on voit que quand un corps décrit une courbe autre qu'un cercle, la valeur de la force centrale change à chaque instant ; au lieu qu'elle est toujours la même, quand le corps décrit un cercle. Il faudra de plus diviser la quantité trouvée par le rapport du sinus total au cosinus de l'angle que la direction de la force centrale fait avec la tangente ». D'Alembert se trompe, il faut diviser cette force trouvée dans le cercle par le rapport du sinus de l'angle entre la tangente et la force avec le sinus total ; en égalant ce dernier à l'unité, ce calcul revient à celui établi dans la note 57.

60. Pierre Varignon, *Autre regle generale des forces centrales*, op. cit., p. 22-23.

61. Existe aussi une méthode parabolique (approximation d'une courbe par une parabole). Nous empruntons ces appellations à J. Bruce Brackenridge, *The Key to Newton's Dynamics. The Kepler Problem and the Principia*, Berkeley, Los Angeles, University of California Press, 1995. Voir, du même auteur, « Newton's Mature Dynamics : A Crooked Path Made Straight », dans *Isaac Newton's natural philosophy*, J. Z. Buchdahl et I. B. Cohen (éd.), Cambridge, Mass., London, MIT Press, 2001, pp. 105-137. Notons que Newton, dans l'édition de 1687 des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, n'utilise un cercle osculateur que dans le Lemme XI et pour l'étude d'une trajectoire particulière, une spirale logarithmique, le centre de force se confondant avec celui de la courbe (voir J. Bruce Brackenridge, *The Key to Newton's Dynamics*, op. cit., p. 150-154 et p. 157-161). Les publications d'auteurs (Abraham de Moivre, John Keill, Jean Bernoulli) démontrant des propositions des *Principes* à l'aide de cercles osculateurs sont postérieures à celles de Varignon (voir *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, D.T. Whiteside (éd.), vol. VI, 1684-1691, Cambridge, Cambridge University Press, 1974, note 25

Figure 3

Figure 4

(d'après *Autre regle generale des forces centrales*, Figure 3 p. 38)

mations de courbes renvoient à deux modes d'actions différents. Pour la première, une force agit instantanément à chaque sommet du polygone : le chemin effectif Ll (voir figure 4) résulte de la combinaison de la tendance suivant LE' (d'une vitesse égale à celle en Q) et de l'impulsion en L dont rend compte la déviation E'l ; chacun de ces mouvements est uniforme et se déroule durant le temps de parcours de Ll. *A contrario*, la seconde méthode associe pendant cette même durée le mouvement tangentiel selon LE (décrit avec la vitesse en L) à une accélération faisant parcourir El : il en résulte une trajectoire courbe. Le corps parvient en l dans le même temps et avec la même vitesse sous chacune des techniques. On peut ainsi

considerer [les courbes] comme formées d'éléments droits [...] Galilée a démontré que si un corps qui est tombé d'une certaine hauteur, se meut ensuite uniformément avec toute la vitesse acquise par sa chute, il parcourra en un temps égal le double de l'espace qu'il avoit parcouru. Par-là, on change aisément en espaces parcourus d'un mouvement uniforme tous ceux qui avoient été parcourus d'un mouvement accéléré, & si on prend le double du petit espace qui appartient à la force centrale, & que par son extrémité on tire une Tangente à la Courbe, la Diagonale du parallélogramme formé par ces deux lignes sera une ligne droite, & en même temps un arc infiniment petit de la Courbe. De cette seconde supposition naissent toutes les mêmes conséquences que de la première⁶².

p. 548-550) ; ce dernier semble alors le premier à déterminer, dès 1701, des forces centrales à l'aide d'expressions analytiques de rayons de courbure.

62. Bernard Le Bovier de Fontenelle, *Sur les rapports des forces centrales à la pesanteur des corps*, dans *Histoire de l'Academie Royale des Sciences. Année 1706. Avec les*

Il en résulte alors que $E'l=2.El$ d'où, suivant l'expression de D'Alembert, ce « paradoxe singulier » d'une « expression de la *force centrale* [...] différente dans les deux cas »⁶³. Comparer l'effet de deux forces impose donc de déterminer les déviations respectives suivant une même approximation sous peine d'obtenir le résultat adéquat à un facteur 2 près.

En 1705, Varignon se montre pleinement conscient de son erreur. Établissant une formule de comparaison entre une force accélératrice faisant décrire une trajectoire quelconque et la pesanteur terrestre, il l'applique au cas du cercle sans parvenir au résultat juste⁶⁴. Il reconnaît alors dans des lettres adressées à Leibniz et Bernoulli que ce « défaut des conséquences » ne tient pas à sa formule, mais « dans l'application que j'y ai faite du rayon osculateur, en prenant à l'ordinaire la courbe [...] comme un véritable polygone à côtés droits, quoiqu'infiniment petits »⁶⁵ ; puisqu'on considère

l'élément Ll comme décrit par deux mouvemens, l'un uniforme suivant $[LH]$, & l'autre accéléré suivant $[DI]$, comme une chute de $[D]$ en l ; cet élément Ll doit être ici regardé comme courbe, & comme un arc véritable le long duquel la courbe [...] est baisée par son cercle osculateur en cet endroit ; par conséquent aussi comme un véritable arc de cercle, & non comme un côté de Polygone⁶⁶.

Varignon complète cette phrase en 1706 en ajoutant, à la suite immédiate du mot « Polygone », « ainsi qu'on le suppose d'ordinaire, & qu'on l'a supposé jusqu'ici dans la recherche des Rayons des Developpées [en 1701] »⁶⁷. Car, comme en 1701, Varignon commet l'erreur de confondre les

Memoires de Mathématiques & de Physiques pour la même Année, Paris, Gabriel Martin, Jean-Baptiste Coignard, Hippolyte-Louis Guérin, 1731, p. 66.

63. CENTRAL, *Enc.*, II, 823b.

64. Huygens, Newton et le Marquis de l'Hôpital établissent qu'une force centrifuge égale à la pesanteur d'un corps lorsque celui se meut dans un cercle avec une vitesse acquise au bout d'une chute libre de hauteur égale à la moitié du rayon. Varignon s'oppose à cette conclusion et soutient que cette hauteur vaut le quart du rayon. Voir G. W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, C. I. Gerhardt (éd.), Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, tome IV, lettre de Varignon du 9 octobre 1705 p. 132-135.

65. *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, *op. cit.*, vol. 3, Lettre de Varignon à Bernoulli du 27 octobre 1705 p. 124. Propos semblable dans une lettre adressée à Leibniz (non datée), voir G. W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, *op. cit.*, tome IV, p. 139-140.

66. *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, *op. cit.*, vol. 3, lettre de Varignon à Bernoulli du 27 octobre 1705 p. 180-181. Nous adaptons ici les notations à celles de la figure 3.

67. Pierre Varignon, *Comparaison des Forces centrales avec les pesanteurs absolues de corps mûs de vitesses variées à discrétion le long de telles Courbes qu'on voudra*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1706. Avec les Memoires de*

deux modèles dans son calcul de la déviation⁶⁸. Le Mémoire de 1706 se veut une correction des errances d'alors, en insistant sur l'idée qu'une comparaison de forces requiert un effet évalué sous une même hypothèse. En 1711, il complétera ces premières conclusions en notant que l'erreur venait

de ce que je raisonnois de la même maniere par rapport au cercle & aux autres courbes regardées comme faites d'éléments droits, & comme faites d'éléments toujours courbes : je considérois la vitesse de la tangente à la courbe [entendre la vitesse de parcours de la déviation entre la tangente et la courbe], résultante de la force centrale, comme accélérée dans le premier cas ainsi qu'elle l'est dans le second : j'ay vu [...] depuis qu'il la falloir regarder comme uniforme dans le premier cas, & comme accélérée dans le second⁶⁹.

Rappelant à cette date les acquis du Mémoire de 1706, il insiste sur la distinction entre, d'une part, « les courbes comme faites d'éléments courbes eux-mêmes, & les vitesses causées par la force centrale, de la tangente à la courbe, comme arithmétiquement accélérées, ainsi qu'on les suppose d'ordinaire » puis, d'autre part, celle supposant « cette vitesse comme uniforme, & les courbes comme polygones infini-latères rectilignes »⁷⁰. Ces remarques préfigurent l'avertissement de D'Alembert concernant le bon usage des courbes dites « rigoureuse » et « polygone » dans « la comparaison [des] effets des [forces accélératrices] entr'eux »⁷¹.

D'Alembert définit cette terminologie dans l'article COURBE POLYGONE :

Il faut distinguer, quand on traite une *courbe* comme polygone ou comme rigoureuse ; cette attention est sur-tout nécessaire dans la théorie des forces centrales & centrifuges ; car quand on traite la *courbe* comme polygone, l'effet de la force centrale, c'est-à-dire la petite ligne qu'elle fait parcourir, est égale à la base de l'angle extérieur de la *courbe* ; & quand on traite la *courbe*

Mathématiques & de Physiques pour la même Année, op. cit., p. 184. Fontenelle, dans son compte rendu de ce Mémoire, sera très explicite sur les différences entre les méthodes et l'ordre de la déviation entre la tangente et la courbe. Il note que « chaque petit arc de la Courbe décrit par le Corps dans un temps infiniment petit, est une ligne résultante de la composition de deux mouvements, l'un par lequel le corps tend à continuer de se mouvoir en ligne droite selon la direction du petit arc précédent qu'il vient de décrire, l'autre par lequel la force centrale le rappelle sur la Courbe en lui faisant décrire un espace infiniment petit du second genre. Or toute ligne résultante de la composition de deux mouvements est droite, si ces deux mouvemens sont *uniformes*, & courbe, si l'un des deux ne l'est pas, mais *accélééré* ou *retardé* », p. 65.

68. Voir la lettre de Varignon à Leibniz datée du 6 décembre 1704, dans G. W. Leibniz, *Mathematische Schriften, op. cit.*, tome IV, p. 118-121.

69. *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, op. cit.*, vol. 3, lettre de Varignon à Bernoulli du 1^{er} mars 1711, p. 362.

70. *Ibid.*, p. 362-363.

71. Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, article 20 p. 21.

comme rigoureuse, l'effet de la force centrale est égale à la petite ligne, qui est la base de l'angle curviligne formé par la *courbe* & par sa tangente. Or il est aisé de voir que cette petite ligne n'est que la moitié de la première, parce que la tangente rigoureuse de la *courbe* divise en deux également l'angle extérieur que le petit côté prolongé fait avec le côté suivant. La première de ces lignes est égale au carré du petit côté divisé par le rayon du cercle osculateur, voyez OSCULATEUR & DEVELOPPÉE ; la seconde au carré du petit côté divisé par le diamètre du même cercle. La première est censée parcourue d'un mouvement uniforme, la seconde d'un mouvement uniformément accéléré : dans la première, la force centrale est supposée n'agir que par une impulsion unique, mais grande ; dans la seconde, elle est supposée agir, comme la pesanteur, par une somme de petits coups égaux ; & ces deux suppositions reviennent à une même ; car l'on sait qu'un corps mû d'un mouvement accéléré parcourroit uniformément avec sa vitesse finale le double de l'espace qu'il a parcouru d'un mouvement uniformément accéléré, pour acquérir cette vitesse. Voyez les articles ACCÉLÉRATION, CENTRAL, & DESCENTE. Voyez aussi l'hist. de l'acad. 1722. & mon traité de Dynamique, page 20. article 20. & page 30. article 26⁷².

Le *Traité de dynamique* invite aussi, laconiquement, à consulter « l'Hist. De l'Acad. De 1722 »⁷³. À cette date, Fontenelle donne un résumé du « dernier Mémoire qu'il [Varignon] ait donné à l'Académie »⁷⁴. L'écrit de Varignon se voulait une réplique à la polémique engagée par Guido Grandi, mathématicien italien, à propos du facteur 2 entrant dans le calcul des déviations et des forces centrales selon qu'on considère les « courbes rigoureuses » et les « courbes polygones ». Fontenelle y écrit que la « Courbe Poligone » est composée « d'une infinité de côtés infiniment petits », il la nomme aussi « Poligone infini » et la conçoit comme une « Courbe approchée, ou infiniment peu différente de la courbe rigoureuse ». Cette dernière n'est rien d'autre que la courbe « considérée en elle-même ». Il ajoute que ces appellations proviennent de Varignon⁷⁵.

72. COURBE POLYGONE, *Enc.*, IV, 387a-387b.

73. Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, article 20 p. 22. Cette mention n'apparaît pas dans la seconde édition de 1758.

74. Bernard Le Bovier de Fontenelle, *Sur les Courbes considérées exactement comme Courbes ou comme Polygones infinis*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1722*, *op. cit.*, p. 74. Ce Mémoire posthume n'apparaît ni dans les Mémoires de l'Académie ni dans les Registres de ses Procès Verbaux. Fontenelle écrit que Grandi « attaqua il y a plusieurs années M. Varignon sur quelques points de la Geometrie nouvelle » ; il fait allusion au *De Infinitis Infinitorum, et Infinite Parvorum Ordinibus Disquisitio Geometrica*, Pise, Francisci Bindi, 1710, dans lequel Grandi dénonce, notamment, l'erreur de Varignon qui prend les angles A et LEI égaux (voir *supra*, note 56).

75. Bernard Le Bovier de Fontenelle, *Sur les Courbes considérées exactement comme Courbes ou comme Polygones infinis*, *op. cit.*, p. 75.

Le Secrétaire précise le motif du débat engagé entre Varignon et Grandi en définissant la direction d'une tangente suivant chacune de deux courbes. Dans le « Cercle rigoureux », la tangente

n'est plus l'un des deux côtés contigus prolongé [du « Cercle Poligone »], c'est une ligne tirée par le point où les deux côtés contigus se joignoient, & faisoient l'angle obtus. Il faut ainsi concevoir la Tangente du Cercle dans Euclide, & dans toute l'ancienne Geometrie. Elle divise en deux parties égales l'angle extérieur ou d'attouchement du Cercle Poligone, & réduit l'angle d'attouchement du Cercle rigoureux, & sa base à n'être que la moitié de ce qu'ils étoient. Cette base est d'une grande importance dans la consideration des Rayons Osculateurs & des Forces Centrales, & l'on pourroit en ces matieres tomber dans quelques méprises, faute de distinguer assez entre le Cercle Poligone & le rigoureux. Et on y étoit tombé effectivement en accusant M. Varignon d'avoir fait la formule des Rayons Osculateurs & celle des Forces Centrales trop grandes de la moitié⁷⁶.

Telle est en effet l'accusation de G. Grandi à l'encontre de Varignon⁷⁷, et la suite du texte où Fontenelle rapporte que l'Italien juge fausse la méthode polygonale car susceptible de conduire à une erreur dans l'évaluation de la force, permet de conclure que Grandi adopte le modèle polygonal et le mode d'action de la force accélératrice. Autrement dit, il commet les erreurs des premières rédactions de Varignon, lequel se voyait donc bien placé pour démasquer l'inanité des arguments. Le contenu de ce résumé de Fontenelle suggère que D'Alembert connaissait ce problème du modèle et du mode d'action associé dans l'œuvre de Varignon, et qu'il peut avoir emprunté à ce dernier les appellations « courbes rigoureuses » et « courbes polygones ».

Par ailleurs, dans l'article DÉVELOPPÉES, après avoir précisé que Varignon utilisait celles-ci dans son calcul des forces centrales, D'Alembert renvoie à « *l'hist. de l'académie royale des Sciences, ann. 1706* »⁷⁸ ; cette référence atteste d'une connaissance du mémoire de 1706 de Varignon et, ainsi, de son enjeu, à savoir montrer la justesse de chacune des méthodes d'approximations et la nécessité de ne pas les pratiquer de manière simultanée. Déterminant alors, dans son *Traité*, l'égalité $E'l=2El$, D'Alembert peut attirer l'attention sur le fait qu'

il faut [...] bien prendre garde à cette distinction des Courbes polygones & des Courbes rigoureuses, dans l'estimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaison de ces effets entr'eux. Si un des effets est

76. *Ibid.*, p. 79-80.

77. Voir Guido Grandi, *De Infinitis Infinitorum*, *op. cit.*, p. 34-35.

78. DÉVELOPPÉES, *Enc.*, IV 908a.

calculé dans l'hypothèse de la Courbe rigoureuse, il faut calculer l'autre dans la même hypothèse ; autrement on courroit risque de faire le rapport des forces, c'est-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il est réellement.⁷⁹

Pour conclure, loin prendre acte de l'importance d'un savant, les articles de mécanique de D'Alembert qui se réfèrent à Varignon offrent le témoignage d'une influence dont son œuvre majeure, le *Traité de dynamique*, porte aussi les traces. Entendant clarifier les fondements de la mécanique pour mieux l'édifier sur des bases pérennes, D'Alembert récuse les démonstrations apportées par son aîné, s'en remettant à l'évidence pour la loi du levier et récusant l'usage des forces pour celle de composition. Des méthodes semblent davantage trouver grâce à ses yeux : ainsi des pratiques de calculs des forces centrales, ainsi du traitement de la collision oblique dont il reconnaît l'importance pour la genèse de son principe. L'origine de ce dernier doit sans doute beaucoup à la résolution de la question du centre d'oscillation⁸⁰ basée sur des décompositions et l'équilibre de forces⁸¹ ; les écrits analysés dans cette étude invitent à faire du traitement du choc une hypothèse tout aussi valable. On connaît l'importance des écrits de Pierre Varignon pour le développement de la mécanique analytique⁸² ; l'*Encyclopédie* et le *Traité de dynamique* invitent à ne pas réduire son apport à ce seul domaine.

Christophe SCHMIT

Institut Camille Jordan, UMR 520 Université Claude Bernard Lyon 1

79. Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique*, op. cit., article 20 p. 21-22. Voir aussi article 26 p. 30 : « En général, l'Élément du tems étant supposé constant, la force centrale est représentée par la ligne [E'l] dans la Courbe Polygone, & par [EI] dans la Courbe rigoureuse. Il faut, par conséquent, avoir égard à cette différence d'expression dans la comparaison des effets de deux forces centrales, & pour ne pas faire l'un des effets double de ce qu'il est par rapport à l'autre, il faut considérer les deux Courbes, ou toutes deux comme Polygones, ou toutes deux comme rigoureuses ». Nous adaptons les notations à celle de la figure 4.

80. Il s'agit de trouver un pendule simple de même période d'oscillation qu'un pendule composé. Pour une histoire de ce problème, voir Christiane Vilain, « La question du centre d'oscillation de 1660 à 1690 », Firenze, *Physis*, vol. XXXVII, 2000, p. 21-51 et, du même auteur, « La question du centre d'oscillation de 1703 à 1743 », Firenze, *Physis*, vol. XXXVII, 2000, p. 439-446.

81. Thèse soutenue, notamment, par David Speisser, « Die Grundlegung der Dynamik der starren Körper nach Jacob Bernoulli », dans *Der Ausbau des Calculus durch Leibniz und die Brüder Bernoulli*, op. cit., p. 82-98.

82. Voir Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVII^e et XVIII^e siècles*, Paris, PUF, 1992.

ANNEXE I

Pierre Varignon dans la Cyclopaedia d'Ephraïm Chambers

Le nom de Varignon apparaît dans 10 articles de la *Cyclopædia* de Chambers, éditions de 1728 et 1753 confondues (9 fois dans la première et une fois dans le Supplément au Volume I de 1753). Nous citons, pour chacun, le passage concerné, et donnons sa version française extraite de l'*Encyclopédie* lorsque l'auteur en est D'Alembert. Nous précisons lorsque l'article est signé « Chambers (O) ».

AIR PUMP (Vol. I, 55a)

'In a Vessel exhausted by a AIR-Pump, the primitive or naturel Air contained therein, is to the Air remaining, as the Aggregate of the Capacity of the Vessel and of the Pump (i. e. the Cylinder left vacant in an Elevation of the Piston, with the Wire and other Parts between the Cylinder and Receiver) rais'd to a Power whose Exponent is equal to the Number of Strokes of the Piston, to the Capacity of the Vessel alone raised to the same Power'.

M. Varignon gives an Algebraical Demonstration of this Theorem, in the *Memoires de l'Acad. R. An.* 1705. p. 397...

MANOMÈTRE, *Enc.*, X, 50a

Dans les *mémoires de l'académie de 1705*, on trouve un mémoire de M. Varignon, dans lequel ce géometre donne la description d'un *manometre* de son invention, & un calcul algébrique par le moyen duquel on peut connoître les propriétés de cet instrument.

L'article POMPE, *Enc.*, XIII, 7b-8a, signé *Chambers (O)* ne mentionne pas Varignon.

**

EVOLUTE (Vol. I, 355a)

Mons. Varignon has applied the Doctrine of the Radius of the *Evolute* to that of Central Forces ; so that having the Radius of the *Evolute* of any Curve ; one may have the Value of the Central Force of a Body which moving in that Curve, is found in the same Point where that Ray terminates : Or reciprocally, having the Central Force given, the Radius of the *Evolute* may be determined. *Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences.* An. 1706.

DÉVELOPÉES, *Enc.*, IV, 908a

M. Varignon a appliqué la théorie des rayons des *développées* à celle des forces centrales ; desorte qu'ayant le rayon de la *développée* d'une courbe, on peut trouver la valeur de la force centrale d'un corps, qui étant mû sur cette courbe, se trouve au même point où le rayon se termine ; ou réciproquement la force centrale étant donnée, on peut

déterminer le rayon de la *développée*. Voyez *l'hist. de l'académie royale des Sciences*, ann. 1706.

*
**

Central FORCE (Supplément au Vol. I, 1753.)

Mons. Varignon has also given two general theorems on this subject in the Memoirs of the Acad. Scienc. an. 1700, 1701, and has shewn their application to the motions of the planets. See also Memoirs, an. 1706, 1710.

Pas de références similaires dans CENTRAL, *Enc.*, II, 822a-823b et FORCES CENTRALES & CENTRIFUGES, *Enc.*, VII, 118b-120a

*
**

FUSÉE (Vol. I, 111a)

'Tis a Matter of Inquiry among Geometricians what the precise Figure of the *Fusy* should be [...]

M. *Varignon* has determ'd this Curve.

L'article FUSÉE de l'*Encyclopédie* est rédigé par Le Roy.

*
**

MOTION (Vol. II, 588a)

M. *Huygens* improved very considerably on the Doctrine of the Pendulum ; and both him and *Borelli* on the Doctrine of the Force of Percussion. Lastly, *Newton*, *Leibnitz*, *Varignon*, *Mariotte*, &c. have brought the Doctrine of *Motion* still nearer to Perfection.

MOUVEMENT, *Enc.*, X, 835b

M. Huyghens a beaucoup perfectionné de son côté la science des pendules & la théorie de la percussion ; enfin Newton, Leibnitz, Varignon, Mariotte, &c. ont porté de plus en plus la science du *mouvement* à sa perfection.

*
**

ORBIT (Vol. II, 670a)

M. Varignon shews how inconsistent *Copernicu's* Sentiment is with de Mechanism of the Heavens : Since the Forces which the Planets have to retain 'em in their *Orbits*, must almost always conspire to make 'em move with really different Velocities ; an that among an infinity of Cases, there is but one wherein they can move uniformly.

ORBITE, *Enc.*, XI, 576b

Article signé « Chambers. (*O*) ». Le paragraphe ci-dessus se référant à Varignon n'apparaît pas dans la traduction de l'*Encyclopédie*.

*
**

PARALLELISM of Rows of Trees (Vol. II, 749a)

[...] the two Rows of Trees must be two opposite Semi-Hyperbola's.

M. *Varignon* has since, in the Memoirs of the *French Academy*, Anno 1717, found the same Solution by an easy and simple Analysis. But he renders the Problem much more general, and requires not only that the visual Angles be equal, but to have them increase or decrease in any given Ratio ; provided the greatest do not exceed a right Angle. The Eye, he requires to be placed in any Point, either just at the beginning of the Ranges, or beyond, or on the Side.

All this laid down, he supposes the first Row to be a right Line, and seeks what Line the other must be, which he calls the Curve of the Range. This he finds must be an Hyperbola, to have the visual Angles equal. The straight and the hyperbolical Rows will be seen parallel to Infinity ; and if the opposite Semi-hyperbola be added, we shall have three Rows of Trees, (the straight one in the Middle) and all three parallel.

Nor is it required this second Hyperbola be the Opposite of the first, *i. e.* of the same Kind, or have the same transverse Axis : 'Tis enough if it have the same Centre, its Vertex in the same right Line, and the same conjugate Axis. Thus the two Hyperbola's may be of all the different Kinds possible ; yet all have the same Effect.

Again, the straight Row being laid down as before ; if it be required to have the Trees appear under decreasing Angles ; M. *Varignon* shews, that if the Decrease be in a certain Ratio, which he determines ; the other Line must be a parallel straight Line. But he goes yet farther ; and supposing the first Row any Curve whatever, he seeks for another that shall make the Rows have any Effect desired, *i. e.* be seen under any Angles, equal, increasing, or decreasing.

ALLÉES DE JARDIN, *Enc.*, I, 279b-280a.

La première partie de cet article, portant la « signature » (K), est écrite par D'Argenville ; D'Alembert en rédige les sept derniers paragraphes⁸³. Parmi ceux-ci, quelques phrases proviennent du PARALLELISM of Rows of Trees de Chambers, D'Alembert développant cependant plus que ne le fait l'anglais une analyse de la théorie de Varignon en la matière.

[...] ces deux arbres seront chacun au sommet de deux hyperboles opposées. L'œil sera à l'extrémité d'une ligne partant du centre des hyperboles, égale à la moitié du second axe, & perpendiculaire à l'*allée*. M. Varignon l'a trouvé aussi par une seule analogie : mais le problème devient bien plus général, sans devenir gueres plus compliqué, entre les

83. Voir Fabrice Ferlin, « D'Alembert et l'optique : l'*Encyclopédie* comme banc d'essai de recherches originales », *op. cit.*

maines de M. Varignon ; il le résout dans la supposition que les angles visuels seront non-seulement toujours égaux, mais croissans ou décroissans selon tel ordre que l'on voudra, pourvû que le plus grand ne soit pas plus grand qu'un angle droit, & que tous les autres soient aigus. Comme les sinus des angles sont leur mesure, il suppose une courbe quelconque dont les ordonnées représenteront les sinus des angles visuels, & qu'il nomme par cette raison *courbe des sinus*. De plus, l'œil peut être placé où l'on voudra, soit au commencement de l'allée, soit en de-çà, soit en de-là : cela supposé, & que la premiere rangée soit une ligne droite, M. Varignon cherche quelle ligne doit être la seconde qu'il appelle *courbe de rangée* ; il trouve une équation générale & indéterminée, où la position de l'œil, la courbe quelconque *des sinus* ; & la courbe quelconque de *rangée*, sont liées de telle maniere, que deux de ces trois choses déterminées, la troisieme le sera nécessairement.

Veut-on que les angles visuels soient toujours égaux, c'est-à-dire, que la courbe des sinus soit une droite, la courbe de rangée devient une hyperbole, l'autre rangée ayant été supposée ligne droite : mais M. Varignon ne s'en tient pas là ; il suppose que la premiere rangée d'arbres soit une courbe quelconque, & il cherche quelle doit être la seconde, afin que les arbres fassent à la vûe tel effet qu'on voudra.

Dans toutes ces solutions, M. Varignon a toujours supposé avec les PP. Fabry & Taquet, que la grandeur apparente des objets ne dépendoit que de la grandeur de l'angle visuel ; mais quelques Philosophes prétendent qu'il y faut joindre la distance apparente des objets qui nous les font voir d'autant plus grands, que nous les jugeons plus éloignés : afin donc d'accommoder son problème à toute hypothese, M. Varignon y a fait entrer cette nouvelle condition. Mais un phénomène remarquable, c'est que quand on a joint cette seconde hypothese sur les apparences des objets, à la premiere hypothese, & qu'ayant supposé la premiere rangée d'arbres en ligne droite, on cherche, selon la formule de M. Varignon, quelle doit être la seconde rangée, pour faire paroître tous les arbres paralleles, on trouve que c'est une courbe qui s'approche toujours de la premiere rangée droite, ce qui est réellement impossible ; car si deux rangées droites paralleles font paroître les arbres non paralleles & s'approchant, à plus forte raison deux rangées non paralleles & qui s'approchent, feront-elles cet effet. C'est donc là, si on s'en tient aux calculs de M. Varignon, une très-grande difficulté contre l'hypothèse des apparences en raison composée des distances & des sinus des angles visuels. Ce n'est pas là le seul exemple de suppositions philosophiques qui, introduites dans des calculs géométriques, menent à des conclusions visiblement fausses : d'où il résulte que les principes sur lesquels une solution est fondée, ou ne sont pas employés par la nature, ou ne le sont qu'avec des modifications que nous ne connoissons pas. La Géométrie est donc

en ce sens-là une bonne, & même la seule pierre de touche de la Physique. *Hist. de l'Acad. ann. 1718, pag. 57.*

Mais il me semble que pour arriver à quelque résultat moins équivoque, il eût fallu prendre la route opposée à celle qu'on a suivie. On a cherché dans le problème précédent quelle loi devoient suivre des distances d'arbres mis en allées, pour paroître toujours à la même distance, dans telle ou telle hypothese sur la vision ; au lieu qu'il eût fallu ranger des arbres de maniere que la distance de l'un à l'autre eût toujours paru la même, & d'après l'expérience déterminer quelle seroit l'hypothese la plus vraisemblable sur la vision.

Nous traiterons plus à fond cette matiere à l'article PARALLÉLISME & nous tâcherons de donner sur ce sujet de nouvelles vûes, & des remarques sur la méthode de M. Varignon. *Voyez aussi APPARENT.*

PARALLÉLISME *des rangées d'arbres, Enc., XI, 909b-910a.*

La partie ci-dessus retranscrite de l'article anglais est traduite, D'Alembert ajoutant cependant quelques lignes et procédant à une légère modification.

Depuis, M. Varignon, dans les *Mémoires de l'académie des Sciences*, en 1717, a trouvé la même solution par une analyse simple & facile. Mais M. Varignon, connoissant le peu de sûreté du principe, s'est contenté de dire que les intervalles des arbres paroïtroient alors sous des angles égaux, & il s'est abstenu de décider si ces intervalles seroient égaux en effet ; c'est-à-dire, que ne pouvant résoudre la question d'Optique, il en a fait une pure question de Géométrie, qui, au moyen de l'analyse, devient fort facile à résoudre. M. Varignon ne s'en tient pas là : il rend le problème beaucoup plus général [...]

[...] & si on ajoute la demi-hyperbole opposée, on aura trois rangées d'arbres, la droite dans le milieu, & toutes trois vûes sous des angles égaux.

*
**

RESISTENCE (Vol. II, 999b-1000b)

M. *Varignon* has improved on the System of M. *Mariotte*, and shewn that to *Galileo's* System, it adds the Consideration of the Centre of Percussion. – The Comparison of Centres of Gravity, with the Centres of Percussion, afford a fine view ; and set the whole Doctrine in the most agreeable Light. See CENTRE [...]

Which is precisely the same thing with the general Formula given by M. *Varignon*, for the System of M. *Mariotte* [...]

From this proportion M. *Varignon* easily deduces two Solids, which shall *resist* equally in all their Parts. *Galileo* had found one before : That discovered by M. Varignon is in form of a Trumpet, and is to be fix'd into the Wall at its greater End [...]

RÉSISTANCE, *Enc.*, XIV, 175a-175b

L'article signé « Chambers (*O*) » contient la traduction de la partie anglaise ci-dessus retranscrite, avec suppression de la seconde référence à Varignon.

M. Varignon montre de plus, qu'au système de Galilée, il faut ajouter la considération du centre de percussion, & que la comparaison des centres de gravité avec les centres de percussion, jette un jour considérable sur cette théorie. *Voyez* CENTRE [...]

M. Varignon déduit aisément de cette proposition, la figure du solide qui résistera également dans toutes ses parties ; ce solide est en forme de trompette, & doit être fixé dans le mur par sa plus grande extrémité. *Voyez les mém. de l'acad. des sciences, an. 1702.*

*
**

TUBE (Vol. II, 260a)

In the Memoirs of the *French* Academy of Sciences, M. *Varignon* gives us a Treatise on the Proportions necessary for the Diameters of *Tubes*, to give precisely any determinate Quantities of Water. – The Result of his Piece turns upon these two Analogies ; That the Diminutions of the Velocity of Water, occasion'd by its Frictions against the Sides of the *Tubes*, are as the Diameters ; The *Tubes* being supposed equally long ; and the Quantities of Water issuing out at the *Tubes*, are as the square Roots of their Diameter, deducting out of them the Quantity each is diminish'd. See FLUID, FOUNTAIN, FRICTION, &c.

TUBE, *Enc.*, XVI, 732b-733a

M. Varignon a donné, dans les *mémoires de l'académie des Sciences*, un *essai* sur les proportions nécessaires des diametres des *tubes*, pour donner précisément une quantité déterminée d'eau. Le résultat de ce mémoire revient à ces deux analogies ; que les diminutions de vitesse de l'eau, occasionnées par ses frottemens contre les parois des *tubes*, sont comme les diametres, les *tubes* étant supposés également longs ; & que la quantité d'eau qui sort des *tubes*, est, comme la racine, quarrée de leurs diametres ; mais cette regle doit être regardée comme beaucoup plus mathématique que physique. Car on ne connoît point exactement à beaucoup-près la quantité de frottement que l'eau souffre contre les parois d'un vase dans lequel elle coule. Il est même fort difficile de déterminer le mouvement d'un fluide qui coule dans un *tube* non-cylindrique, abstraction faite des frottemens, & ce ne sera tout-au-plus qu'après bien du tems & des expériences réitérées qu'on viendra à bout de donner sur cette matiere des regles précises, & de déterminer les lois du mouvement d'un fluide dans un *tube* de figure quelconque,

& ayant égard à toutes les causes qui alterent son mouvement, comme l'adhérence de ses parties, le frottement de ces parties contre le vase, &c. Voyez FLUIDE, FONTAINE, FROTTEMENT, &c.

VELOCITIES of Bodies moving in Curves (Vol. II, 290a)

The Conclusion was universally admitted, till the year 1693, when M. *Varignon* demonstrated it to be false : From his Demonstration, it should seem to follow, that the *Velocities* of a Body falling along the Cavity of a Curve, for instance, of a Cycloid ; ought not to be as the Roots of the Height ; since a Curve is only a Series of an Infinity of infinitely little contiguous Planes, inclined towards one another. So that *Galileo's* Proposition would seem to fail in this Case too, and yet it holds good ; only with some Restriction.

All this Mixture of Truths and Errors, so near a-kin to each other, shew'd that they had not got hold of the first Principles ; M. *Varignon*, therefore, undertook to clear what related to the *Velocities* of falling Bodies ; and to set the whole Matter in a new light : He still supposes *Galileo's* first System, that the *Velocities* at the different times of a vertical Fall, are as the Roots of the correspondent Heights. The great Principle makes use of to attain his End, is that of Compound Motion. See COMPOUND Motion.

If a Body falls along two contiguous inclined Planes, making an obtuse Angle, or a kind of Concavity between 'em ; M. *Varignon* shews, from the Composition of those Motions, that the Body, as it meets the second Plane, loses somewhat of its *Velocity* ; and of consequence that it is not the same at the end of the Fall, as it would be, had it fell thro' the first Plane prolonged : So that the Proportion of the Roots of the Heights asserted by *Galileo*, does not here obtain.

The Reason of the loss of *Velocity*, is, that the Motion, which was parallel to the first Plane, becomes oblique to the second, since they make an Angle : This Motion, which is oblique to the second Plane, being conceived as compounded, that Part perpendicular to the Plane, is lost by the opposition thereof, and part of the *Velocity* along with it : Consequently, the less of the perpendicular there is in the oblique Motion or, which is the same thing, the less the two Planes are from being one, *i. e.* the more obtuse the Angle is, the less *Velocity* does the Body lose.

Now, all the infinitely little, contiguous, inclined Planes, whereof a Curve consists, making infinitely obtuse Angles among themselves, a Body falling along the Concavity of a Curve, the loss of *Velocity* it undergoes each instant is infinitely little : But a finite Portion of any Curve, how little soever, consisting of an Infinity of infinitely little Planes, a Body moving thro' it, loses an infinite Number of infinitely little Parts of its *Velocity* : and an Infinity of infinitely little Parts, makes an Infinity of

higher Order, *i. e.* an Infinity of infinitely little Parts, makes a finite Magnitude, if they be of the first Order, or Kind ; and an infinitely little Quantity of the first Order, if they be of the second ; and so *in infinitum*. Therefore, if the Losses of *Velocity* of a Body falling along a Curve be of the first Order, they will amount to a finite Quantity, in any finite Part of the Curve, &c. See CURVE.

VITESSE, *Enc.*, XVII, 360a-360b

Vitesse des corps parcourans des lignes courbes. Suivant le système de Galilée sur la chute des corps, système reçu aujourd'hui de tout le monde, la *vitesse* d'un corps qui tombe verticalement, est à chaque moment de sa chute, proportionnelle à la racine de la hauteur d'où il est tombé. Après que Galilée eut découvert cette proposition, il reconnut encore que si le corps tomboit le long d'un plan incliné, la *vitesse* seroit la même que s'il étoit tombé par la verticale qui mesure sa hauteur, & il étendit la même conclusion jusqu'à l'assemblage de plusieurs plans inclinés qui feroient entre eux des angles quelconques, en prétendant toujours que la *vitesse* à la fin de la chute faite le long de ces différens plans, devoit être la même que s'il étoit tombé verticalement de la même hauteur.

Cette dernière conclusion a été admise par tous les mathématiciens, jusqu'en 1693, que M. Varignon en démontra la fausseté, en faisant remarquer que le corps qui vient de parcourir le premier plan incliné, & qui arrive sur le second, le frappe avec une partie de la *vitesse* qui se trouve perdue, & l'empêche par conséquent d'être dans le même cas que s'il étoit tombé par un seul plan incliné, qui n'auroit point eu de pli. M. Varignon après avoir relevé cette erreur, éclaircit la matière de manière à empêcher qu'on ne tombât dans l'erreur opposée, & à laquelle on étoit porté tout naturellement, qui étoit de croire que la chute d'un corps le long d'une ligne courbe, c'est-à-dire le long d'une infinité de plans inclinés, ne pouvoit pas non plus produire des *vitesse*s égales à celles d'un corps qui seroit tombé verticalement de la même hauteur. Pour montrer la différence de ces deux cas, il fit voir que quand les plans inclinés font ensemble des angles infiniment petits, ainsi qu'il arrive dans les courbes, la *vitesse* perdue à chacun de ces angles, est un infiniment petit du second ordre, ensorte qu'après une infinité de ces chûtes, c'est-à-dire après la chute entière par la courbe, la *vitesse* perdue n'est plus qu'un infiniment petit du premier ordre, qu'on peut négliger, par conséquent auprès d'une *vitesse* finie : on peut voir aussi sur ce sujet notre *traité de dynamique*, première partie vers la fin.

ANNEXE II

La détermination de la loi du levier par Pierre Varignon

Nous donnons ici le raisonnement, tiré de la *Nouvelle Mécanique*, qui permet à Varignon de retrouver la loi du levier dans le cas d'action de puissances parallèles.

Section V « De toutes sortes de Leviers, de quelque figure, de quelque espece, & dans quelque situation qu'ils soient, & pour toutes les directions possibles des puissances, ou des poids qui y sont appliqués », tome I, p. 300.

Théorème XXVI. Fondamental de la présente Section V (p.305-307)

Deux puissances de directions quelconques E et F agissantes sur un levier MN de point d'appui B :

D'après *Nouvelle Mécanique*, Tome I, Planche 20, Figure 153 p. 362

Partie 1 : En cas d'équilibre, la direction de la « résistance » du point d'appui passe par A concours des directions des 2 puissances.

Partie 2 : En cas d'équilibre, la résistance sera dans la direction de la résultante et d'intensité égale et de sens opposé.

Partie 3 : En cas d'équilibre, si on imagine un parallélogramme RASG défini par la diagonale AG prise sur A, avec AG passant par l'appui, la résistance sera à chacune des forces E et F comme la diagonales AG est aux côtés RA et AS.

Partie 4 : En cas d'équilibre, si E et F sont comme RA et AS et que de ces côtés on trace le parallélogramme RASG, la diagonale passera par cet appui si c'est sur celui-ci que les puissances font équilibre. Et la résistance de l'appui sera aux puissances comme AG aux côtés.

Partie 5 : Réciproquement, si la résultante des puissances passe par l'appui, il y aura équilibre entre ces puissances.

Partie 6 : Si la diagonale construite dans RASG, telles que RA et AS soient les directions des puissances et soient comme ces puissances, passe par le point d'appui, alors elles sont en équilibre sur ce point.

Corollaire II : dans la situation d'équilibre de E et F sur l'appui B du th précédent, en traçant BP et BD perpendiculaires sur AR et AS, il vient d'après le Lemme 8 que $AR.AS::BP.BD$. Or, $E.F::AR.AS$ donc $E.F::BP.BD$ (p. 314).

Lemme VIII (Première section. Lemmes pour l'intelligence des Sections suivantes, p. 53-54) : « De quelque point E de la diagonale AD d'un parallélogramme quelconque ABDC, qu'on mene deux perpendiculaires EF, EG, sur ces cotez AB, AC, prolongez avec cette diagonale où besoin sera ; ces perpendiculaires seront toujours entr'elles en raison reciproque de ces côtez, c'est-à-dire, $EF.EG::AC.AB$ » (p. 53-54).

Corollaire III : Si $E.F::BP.BD$, alors il y aura équilibre entre E et F sur l'appui B (p. 314). Car le lemme 8 donne $AR.AS::BP.BD$ soit $E.F::AR.AS$ ce qui correspond au cas de figure de la partie 6 du théorème.

Corollaire VI : En cas d'équilibre, $E.F::BP.BD$ (d'après Corollaire II) ; alors $E.BD=F.BP$ ce qui correspond à l'égalité de moments (p. 316).

Définition XXII : « les parties du Levier comprises entre [l']appui & les directions [des] poids ou puissances, seront appelées *bras* du Levier » ; « Le produit de chaque poids ou puissance absolue par sa distance à l'appui du Levier auquel elle est appliquée, s'appelle en Latin *Momentum* » (p. 304).

Corollaire VII : réciproque du précédent (p. 316-317).

Corollaire XIII : Si on suppose un levier droit telles que les puissances E et F soient parallèles entre elles et perpendiculaires aux bras de levier, ces derniers étant BX et BO. D'après les Corollaires II et III, si on a $E.F::BO.BX$ alors il y aura équilibre ; réciproquement, s'il y a équilibre, les puissances seront dans ce rapport (p. 320).

« C'est-là ce qu'on appelle d'ordinaire le premier principe de Méchanique », p. 320.