Caractériser les problèmes des élèves avec le savoir pour comprendre l'espace de décisions du professeur dans le contexte d'un enseignement des nombres et de leurs usages

*Characterising the students' problems to understand the teacher's decision-
making space in the context of teaching numbers and their uses in primary
school*

Serge Quilio

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/ree/2932>

ISSN : 1954-3077

Éditeur

Université de Nantes

Référence électronique

Serge Quilio, « Caractériser les problèmes des élèves avec le savoir pour comprendre l'espace de décisions du professeur dans le contexte d'un enseignement des nombres et de leurs usages », *Recherches en éducation* [En ligne], 29 | 2017, mis en ligne le 01 juin 2017, consulté le 08 novembre 2020. URL : <http://journals.openedition.org/ree/2932>

Recherches en éducation est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Caractériser les problèmes des élèves avec le savoir pour comprendre l'espace de décisions du professeur dans le contexte d'un enseignement des nombres et de leurs usages

Serge Quilio¹

Résumé

Ce texte montre le rôle d'une forme d'analyse didactique qui entrelace l'analyse ascendante de la transposition et l'analyse a priori de la situation. Nous la mettons en œuvre dans le contexte particulier d'une ingénierie didactique coopérative au sein de laquelle des chercheurs et des professeurs coopèrent au développement, à la mise en œuvre et à l'analyse collective d'un enseignement en mathématiques à l'école primaire. Nous montrons au moyen d'épisodes observés en classe comment le développement de ce type d'analyse peut donner l'accès au sens des pratiques pour les élèves mais aussi à leur sens pour les professeurs permettant ainsi à ces derniers d'accéder à l'espace de leurs décisions disponibles et d'envisager des alternatives possibles à la mise en œuvre de leur enseignement.

Cette contribution à la question de la modélisation des savoirs en didactique aborde le rôle de l'analyse ascendante de la transposition (Mercier 1997, 2002, 2005, 2008), dans le contexte particulier d'une ingénierie didactique coopérative au sein de laquelle des chercheurs et des professeurs coopèrent au développement, à la mise en œuvre et à l'analyse collective d'un enseignement de plusieurs années en mathématiques du Cours préparatoire (élèves de 6-7ans) au CM2 (cinq ans plus tard). L'enseignement y est organisé selon une suite de situations peu nombreuses, que le professeur fait vivre pendant plusieurs semaines dans la classe. La démarche consiste en effet à engager les élèves dans une enquête sur un problème que la situation initiale pose dans un cas qui est d'abord simple et qui se complexifie progressivement.

Notre recherche porte sur les moyens de réguler un système didactique, en se fondant sur l'observation des élèves ou plutôt sur l'analyse de leurs rapports aux questions mathématiques qu'ils rencontrent, et de l'évolution de ces rapports. Cette orientation de recherche s'inscrit dans une tentative de changer de paradigme scolaire, en collaboration avec les professeurs. Nous voulons, avec eux, passer de la visite guidée de mathématiques toutes faites, au questionnement du monde (Chevallard, 2010) c'est-à-dire à une démarche d'enquête (Dewey, 1967) engageant les élèves à produire (chacun pour soi-même et tous ensemble pour la classe) des éléments de mathématiques qui viennent en réponse à des questions. Ce changement de paradigme n'est possible que si les professeurs apprennent à observer finement les actions des élèves, identifient des questions mathématiques sous-jacentes et régulent en temps réel le curriculum qu'un groupe d'élèves est en train de produire.

Dans l'ingénierie didactique qui nous occupe ici, les professeurs ont appris à rapporter des épisodes didactiques comme « des faits qui ont questionné ou étonné l'observateur ». L'équipe de professeurs et de chercheurs apprend à en développer une analyse permettant de comprendre l'étonnement initial et l'espace des décisions possibles pour un professeur, ce qui permet de situer les potentiels et obstacles liés à la décision effectivement prise et d'imaginer une alternative. La colonne vertébrale de l'analyse est l'analyse ascendante de la transposition, qui permet d'identifier le sens pour les élèves des épisodes observés, qui vient des décisions qu'ils peuvent prendre dans la situation qui leur est proposée. Mais l'analyse ascendante de la transposition donne aussi accès au sens des épisodes observés pour les professeurs, et permet de juger de leurs décisions au regard des alternatives qui leur sont disponibles : l'espace des décisions du professeur (Winsløw, Matheron, & Mercier, 2013 ; Quilio & Morellato, 2016). Ces

¹ Maître de conférences, EA 6308, ESPE de Nice, Université Côte d'Azur.

études sont pour nous le moyen d'une formation professionnelle réfléchie des professeurs capables de permettre, à terme, un travail d'équipes autonomes comme on en voit des descriptions dans certaines « lesson studies » (Winsløw, 2012).

1. Observer des épisodes didactiques : analyse a priori et analyse ascendante de la transposition

Dans l'histoire du développement de la Théorie des situations didactiques en mathématiques (TDSM), l'analyse a priori constitue un élément fondamental du travail d'ingénierie (au sens de Artigue 1990 ; 2011) en se centrant sur les composantes des situations proposées aux élèves (le potentiel d'action dans le milieu, ses rétroactions et les régulations prévues par le professeur afin de prévoir les effets possibles, observer les effets produits et les comparer aux prévisions (Artigue & Douady, 1986). Dès la fin des années 80, Mercier et Salin (1988) posent la question des fonctions possibles de l'analyse a priori pour les professeurs, et montrent que l'analyse a priori est aussi un outil de prise de distance nécessaire à l'identification des dimensions du contrat didactique à travers l'observation d'épisodes didactiques.

Avec l'avènement de l'étude des pratiques ordinaires en mathématiques, mais aussi dans le cas d'autres domaines de savoir, la notion d'analyse a priori a évolué en lien avec les besoins d'identification des savoirs en jeu dans des situations d'enseignement / apprentissage au sens large, comportant des questions, problèmes, systèmes de tâches communément mis en œuvre dans les classes, et que l'on ne peut assimiler d'emblée à des situations didactiques au sens de la TDSM. L'analyse des objets qui sont les enjeux de la relation didactique et des rapports attendus des sujets de l'institution à ces objets institutionnels, est un préalable à toute observation de phénomènes didactiques (Assude & Mercier, 2007). C'est pour cela que toute recherche en didactique est spécifiée par un savoir. L'observation naturaliste portée par l'objectivation d'une caméra est illusoire parce que nous voulons rendre compte des effets des actions observables, qui donnent le sens de ce qui s'échange, entre professeur et élèves, à propos des mathématiques. Or, les échanges peuvent porter sur des savoirs opératoires (par la reproduction, dans une situation où ils sont nécessaires, de gestes outillés de ces savoirs) mais aussi bien, sur des techniques remplaçant des savoirs auxquels il reste interdit aux élèves de toucher. L'étude des gestes d'enseignement suppose donc que l'observation soit instruite, et prenne la forme d'une enquête visant à établir des faits et en comprendre certaines causes. L'observation d'une activité didactique vise donc à identifier le système des objets que l'activité mobilise (le milieu) puis, à en analyser les propriétés en tant qu'il est milieu pour une action qui rend nécessaire des savoirs. Cela constitue une analyse a priori au terme de laquelle on peut anticiper certains des problèmes qu'un élève va rencontrer et qu'il va devoir résoudre ou contourner. Cette analyse est dite a priori parce qu'elle fonde l'interprétation des comportements observés des élèves, et permet de les penser en termes de stratégies d'action.

L'étude d'épisodes didactiques qui ont surpris ou questionné les professeurs qui observent un enseignement (et souvent, leur propre enseignement) est pratiquée depuis le début des années 90 par les didacticiens qui ont soulevé la nécessité d'observer des pratiques ordinaires dans le cadre du Colloque Epistolaire « Regards croisés sur le didactiques » (Blanchard-Laville, Chevallard & Schubauer-Leoni, 1996). Le travail collectif dont rend compte l'ouvrage « Variations sur une leçon de mathématiques » (Blanchard-Laville, 1997) pose les premiers jalons du développement explicite de techniques d'étude didactique des classes ordinaires liées à une théorie des institutions didactiques proposée par Chevallard (1992). On relève que Mercier (1997) y expose pour la première fois un exemple d'analyse ascendante de la transposition qui fonde les interprétations des rapports aux objets mathématiques observables par les différents chercheurs du collectif de travail. Rétrospectivement, Mercier (2002) décrira cette strate d'analyse comme ce qui permet « d'identifier à la fois les *types de problèmes* que les acteurs sont susceptibles de rencontrer, les *systèmes d'objets* (ostensifs) qu'ils peuvent mobiliser pour l'étude de ces types de problèmes, et les *formes de leur rapport à ces objets* » (p. 160). C'est à

l'occasion de la synthèse du thème « Généricité et spécificité des théories didactiques » lors de la 12e École d'été de didactique des mathématiques qu'il en précise la démarche.

« Nous commençons par analyser la transposition, c'est-à-dire nommer les problèmes qu'un élève peut se poser étant donnée la situation dans laquelle il est. Pour nous, analyser la transposition, c'est donc être en mesure de comprendre la transparence du savoir à laquelle le professeur est soumis comme l'élève, ce n'est pas nommer la référence du savoir (ce qui redouble l'illusion) ou décrire le savoir savant désigné par l'enseignement (ce qui la renforce). Notre analyse de la transposition procède de la classe vers des niveaux de détermination plus larges, en un mouvement ascendant qui permet de déterminer a priori (c'est à dire avant d'engager l'analyse) les décisions efficaces possibles du professeur et des élèves.

(...)

Alors, nous pouvons observer comment les problèmes avec le savoir rencontrés par tel élève sont

- soit posés et travaillés ;*
- soit identifiés et évités ;*
- soit non identifiés et bientôt oubliés par professeur et élèves, chacun selon son topos de genre et sa position différenciée dans le contrat ».* (Mercier, 2005, p. 69)

L'analyse ascendante de la transposition se présente comme une extension de l'analyse a priori des situations didactiques, en se centrant sur la situation « expérimentée » (au sens de Dewey) par les élèves, et la manière dont l'enseignant prend en charge certaines composantes (ou non). C'est donc bien une strate d'étude des rapports institutionnels aux objets qui s'établissent dans l'action conjointe professeur-élève², mais il s'agit de dégager des modèles d'action possibles du point de vue de l'enseignement en référence à certaines pratiques sociales (savantes ou expertes), sans entrer encore dans les détails de la dynamique effective de la construction des significations.

Dans ce qui suit, nous allons voir que l'analyse ascendante de la transposition offre des possibilités de régulation des décisions d'enseignement dans le cadre d'un processus d'ingénierie coopérative, en complément de l'analyse a priori des situations proposées aux élèves.

2. Arithmétique et Compréhension à l'École (ACE), une ingénierie coopérative en mathématiques au CP

Les ingénieries didactiques, nées dans le courant des années 1970, visaient la production et l'observation de phénomènes relatifs au fonctionnement des systèmes didactiques. Ces ingénieries considèrent le professeur comme un expert réalisant un essai permettant le fonctionnement d'un prototype au plus près de la réalité (Mercier, Lemoyne, & Rouchier, 2001, Artigue, 2011, Bessot, 2011). Il s'agit aujourd'hui de s'affronter à une toute autre question : « Comment créer les conditions d'enseignement d'un savoir dans un nombre significatif de classes ? » (Mercier, 2008). La mise en œuvre des ingénieries coopératives dans lesquelles chercheurs et professeurs coopèrent pour le développement, la réalisation des enseignements et la compréhension des systèmes didactiques (Perrin-Glorian, 2011, Sensevy, Quilio, Forest, & Morales, 2013) explore cette question. Le travail collaboratif avec les professeurs vise à permettre l'existence de nouvelles formes partagées de la direction d'étude, pour que des formes épistémologiques nouvelles émergent, et qu'elles permettent la vie des types de rapport au savoir anticipés et attendus dans le moment de la préparation collective.

² Nous ne développerons pas ici les éléments du cadre de l'action conjointe en didactique (Sensevy & Mercier, 2007 ; Sensevy, 2011), au-delà du fait que cette notion permet d'opérationnaliser le postulat d'insécabilité du système didactique, en prenant l'action comme unité d'analyse des rapports aux objets qui s'établissent dans une situation d'enseignement / apprentissage.

Dans le cadre de la recherche Arithmétique et Compréhension à l'Ecole (ACE)³, nous retenons de la neuropsychologie que les très jeunes enfants possèdent une disposition naturelle à estimer des grandeurs (Dehaene, 2010) ; des cognitivistes, la description du processus de développement qui conduit l'enfant à acquérir le nombre (Piaget & Szeminska, 1965 ; Camos & Barrouillet, 2006). Nous retenons des mathématiciens (Lebesgue, 1935) et de didacticiens (Chambris, 2010 ; Tempier, 2013), le fait que les nombres sont des mesures de grandeurs, un système de symboles socialement partagé, et donc que l'arithmétique élémentaire est une activité de production et de manipulation de comptes rendus de mesures. A l'origine du passage de l'estimation des grandeurs discrètes (que ce soit par mesurage ou comparaison) au dénombrement, il y a l'énumération qui conduit à la production de listes des objets à dénombrer ou à l'organisation matérielle des opérations de leur dénombrement (Briand, 1999), puis l'établissement de comptes-rendus de ces opérations que sont les nombres (Margolinas & Wozniak, 2012). Nous comptons observer des procédures et des écritures numériques de plus en plus complexes, la maîtrise en étant facilitée par un travail parallèle des techniques de calcul mental.

3. Quelques considérations méthodologiques

Les choix didactiques de l'ingénierie ACE se caractérisent par un jeu de continuité et de ruptures qui structure l'expérience des élèves dans les temps de situation (au sens de Quilio, 2012). L'enseignement est ainsi fondé sur une suite de situations emboîtées en continuité. Le principe de continuité est à la fois ici un principe de continuité du savoir (les situations, en se modifiant plus ou moins graduellement, appellent à de nouveaux savoirs) et un principe de continuité de l'expérience mathématique des élèves, qui doivent saisir en acte une cohérence dans l'enseignement. Ces choix reposent sur « la mise en évidence de l'insuffisance fonctionnelle de certaines formes de savoir, et obligent donc, à certains moments, à des ruptures plus ou moins radicales avec l'expérience des élèves » (Sensevy, 2011 p.469). La situation fondatrice dite du « Jeu des annonces » permet de produire ces ruptures et se développe tout au long de l'année selon neuf modules de 4 à 5 séances chacun. Cette situation de départ constitue un fil rouge et prend la forme d'un jeu de comparaison entre un nombre que les élèves affichent avec les doigts des deux mains (l'annonce) et un nombre tiré au sort à l'aide d'un dé à jouer (le lancer de dé). Elle évolue tout au long de l'année avec la manipulation de variables didactiques (nombres de dés, nombres de mains, cartes à jouer qui remplacent les dés, etc.), et aborde successivement les structures additives et multiplicatives. Les modules articulent systématiquement l'oral et l'écrit. Le travail se réalise durant les premiers mois sur de « petits » nombres.

La régulation du processus donne lieu à des observations écrites faites par les professeurs impliqués qui observent leurs élèves ou par les professeurs de l'équipe venus observer une réalisation prototypique. Les fiches d'observation décrivent des épisodes que le groupe des professeurs et des chercheurs étudie. Ces épisodes sont relatifs selon les cas à l'embarras d'un élève ou d'un professeur, ou à sa production originale, et l'analyse didactique demande d'identifier la question mathématique rencontrée in situ par cet élève, ce professeur ou cette classe, afin d'interpréter la réponse étonnante observée. En ce sens, l'analyse vise à imaginer l'espace des choix des sujets pour comprendre ces choix, et constituer ainsi des savoirs professionnels pour les professeurs et les chercheurs. Il s'agira donc pour les professeurs de produire, soit une décision collective d'amender le projet d'enseignement, soit, la prise de décision autonome de chaque professeur en situation. Il s'agira donc pour les chercheurs de produire une compréhension partagée des phénomènes observés, qui sont ainsi constitués en phénomènes didactiques. La méthode de recherche est clinique au sens de Leutenegger (2009) puisqu'elle prend sa source dans l'observation de long terme et l'intervention au chevet de la classe. Notre analyse se situe donc dans une dialectique entre analyse a priori de l'espace des

³ Arithmétique et Compréhension à l'Ecole (ACE) est une recherche pluridisciplinaire (didactique des mathématiques, psychologie du développement) et collaborative (chercheurs et professeurs collaborent à l'élaboration, la réalisation et l'analyse des situations d'enseignement). Elle réunit depuis 2011 plusieurs laboratoires (CREAD, Université de Bretagne Occidentale ; Interpsy, Université de Lorraine ; Paragraphe, Université Paris 8 ; PSITEC, Université Lille 3). Un site web dédié donne accès à l'ensemble des ressources produites : <http://python.espe-bretagne.fr/ace/>

décisions et actions possibles du professeur et des élèves, et analyse ascendante de la transposition permettant de comprendre les contraintes rencontrées et d'engager une nouvelle analyse a priori.

4. Premiers problèmes posés par le Jeu des annonces : un exemple de dialectique de l'analyse a priori et de l'analyse ascendante de la transposition

Dans une partie du « jeu des annonces » Marcel, Farida et Léon tentent d'annoncer avec leurs doigts le nombre d'unités qui sera donné par le lancer du dé.

L'ingénierie vise à ce que par exemple ici, lorsque ces élèves disent " j'ai 3 doigts dans la main gauche et 2 sur la droite", ils considèrent cette expression comme la mesure d'une grandeur, c'est-à-dire « *le nombre d'entités* » qui permet la comparaison avec le nombre de points du dé

Les points sur les dés sont organisés en configurations allant de 1 à 6 que l'on peut lire comme des icônes, ce qui n'est pas le cas de toutes les configurations qui peuvent être formées par les doigts de deux mains. L'analyse a priori du jeu a conduit les chercheurs à choisir la comparaison de ces deux formes de la numérosité pour désigner le nombre des doigts et le nombre des points comme objets de la comparaison, réalisations d'une même grandeur, c'est-à-dire le nombre d'entités des collections (de doigts et de points). Mais les élèves doivent comparer les doigts de deux mains et les points d'un seul dé, une comparaison difficile. Très rapidement, dès que le jeu est installé, les élèves sont engagés 1) à écrire leur annonce (par exemple 3 et 2 ou 0 et 4 ou 1 et 2) plutôt que de sortir leurs doigts, et 2) à écrire la comparaison de leurs annonces avec le lancer. Le fait qu'il y ait plusieurs élèves dans le même groupe permet de demander qu'ils n'aient pas tous la même annonce. Pour un tirage de 5 et les annonces qu'ils forment avec leurs deux mains, ils écrivent donc et disent :

Marcel $3+2=5$ « trois plus deux c'est bien cinq »,
Farida $1+5>5$ « un plus cinq c'est plus que cinq »,
Léon $1+2<5$ « un plus deux c'est moins que 5 ».

La difficulté du jeu n'appartient pas aux nombres eux-mêmes, qui sont bien connus ; mais si ce n'était pas le cas, le jeu permet de se familiariser avec ces nombres et leurs sommes.

L'un des premiers épisodes rapportés par les professeurs qui organisent ces suites de jeux est relatif à la prise de conscience, par quelques élèves, de la différence entre l'empan des valeurs obtenues avec le dé et celui plus grand et varié des valeurs obtenues avec les doigts. Dès cette découverte, ces élèves ne vont pas plus avant dans la comparaison : « Tu as sorti cinq doigts et encore trois doigts, tu as perdu » disent-ils à leur camarade sans même jeter le dé. En effet, on ne peut obtenir que 1, 2, 3, 4, 5, ou 6 dans les cas du jet d'un dé, mais on va de 2 à 10 avec les doigts des deux mains.

Deux questions viennent alors aux professeurs qui se mettent à travailler sur le phénomène pour définir une ligne de conduite commune aux professeurs de l'équipe : 1) Des tirages à deux mains donnent un résultat plus grand que 6. Ne vaudrait-il pas mieux utiliser un dé à dix faces ? ; 2) Un tirage du dé donne 1, comment obtenir avec deux mains la somme de 1 ?

Pour répondre à chacune de ces questions, nous allons entrelacer une suite d'analyses a priori de la situation que vivent élèves et professeurs, et d'analyses ascendantes de la transposition que les jeux proposés réalisent.

■ ***La réponse à la deuxième question est relativement simple***

Pour obtenir une annonce de 1 à partir de deux mains, il suffit que le professeur demande aux élèves « comment annoncer 0 ? », puisque 0 doigt + 1 doigt = 1 doigt.

Une analyse remontant à la question mathématique : « Comment obtenir 1 comme somme de deux nombres (entiers) ? » montre rapidement qu'il faut qu'un des deux nombres soit 0, la réponse étant en effet que « $0 + 1 = 0 + 1 = 1$ ».

Cela permet une analyse a priori de la situation du point de vue du professeur : si aucun élève n'imagine cette annonce, le professeur peut sans problème la leur dire « On décide que la main fermée est le signe de l'annonce 0 ; une main fermée en poing et un doigt levé sur l'autre main donne bien alors une annonce de 1 ». Bien sûr, la décision proposée demande une argumentation et un débat car considérer que 0 mesure le nombre des doigts d'une main fermée ne va peut-être pas de soi.

Une analyse ascendante de la transposition du problème didactique de l'introduction de 0 s'outille d'une enquête dans les manuels qui montre que très légitimement, pour les professeurs de CP, les entiers naturels commencent à 1 et que ces professeurs considèrent souvent, comme les ouvrages qui s'adressent à leurs élèves, que 0 est le signe d'un emplacement vide. C'est le cas dans l'écriture « 10 », où 0 marque la place que viendra occuper 1 ou 6 dans 11 ou 16. C'est donc le sens qui est donné à 0 lorsqu'il est introduit comme chiffre utile à la numération décimale de position. Mais alors, on observe que le « 0 » ne signe pas un nombre.

L'observation des élèves pris dans le jeu des annonces montrera cependant que le nombre 0 ne leur pose pas plus problème que 17, et que « $0+1=1$ » est comme une évidence lorsque cette écriture décrit et modélise l'annonce d'un nombre faite d'une main fermée (mesurant qu'il n'y a aucune entité dans cette partie de la collection de doigts) et d'un doigt levé sur l'autre main. On observera alors des élèves proposant l'annonce « $0+0=0$ », qui pose un autre problème, et renvoie à la question 1.

■ ***La réponse à la première question est plus complexe***

Elle demande en effet une analyse ascendante de la transposition que réalise la comparaison dans le « jeu des annonces ». Cela signifie qu'il faut que l'équipe des professeurs et des chercheurs remonte à la fois aux questions mathématiques et aux questions didactiques, depuis la situation « vécue » par les actants, qui permettent à des éléments théoriques de donner des arguments pour une décision partagée. Cela nous conduira ici soit, à maintenir le dé à six faces, soit au contraire à assumer le hiatus entre ce que l'on peut annoncer et ce qui peut advenir comme un moteur de la situation de pari entre annonces et tirage.

D'abord, il faut bien voir qu'on ne peut obtenir avec un dé à six faces que les six tirages de 1, 2, 3, 4, 5, et 6 points tandis qu'avec les doigts des deux mains on peut obtenir les annonces $1+1=2$, $1+2=2+1=3$, $1+3=2+2=3+1=4$, $1+4=2+3=3+2=4+1=5$, $1+5=2+4=3+3=4+2=5+1=6$, $2+5=3+4=4+3=5+2=7$, $3+5=4+4=5+3=8$, $4+5=5+4=9$, et encore $5+5=10$... mais ce n'est pas tout puisqu'il y a aussi (c'est le résultat du travail sur la deuxième question, présenté plus haut) $0+1=1+0=1$, et avant même, $0+0=0$, puis $0+2=2+0=2$, $0+3=3+0=3$, $0+4=4+0=4$, $0+5=5+0=5$. Nous observerons d'ailleurs que certains élèves ne jouent que d'une main⁴, l'autre affichant systématiquement 0. Cette différence entre les deux espaces de possibles est un savoir que certains professeurs n'avaient pas perçu au départ, mais il est bien utile aux élèves car leur

⁴ Il ne pourront pas atteindre la valeur 6 (qui a une probabilité d'apparition de 1/6) mais formeront avec la main plus facilement l'ensemble : $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

chance de gain en dépend, et il constitue donc pour eux une découverte importante. Cette analyse montre que c'est de fait une composante essentielle du jeu des annonces parce que cela montre aux élèves une fonction importante des savoirs mathématiques : donner un certain contrôle sur le jeu. On sait que certains jeux sont calculables et qu'alors, pour les mathématiciens, ils sont résolus entièrement. Le cas emblématique pour les didacticiens est celui de « la course à 20 » (Brousseau, 1998). En référence à la course à 20, ou à la suite de situations d'enseignement de la soustraction dont « le cas Gaël » (Brousseau & Pères, 1981) décrit une occurrence, les élèves ici parient⁵, en quelque sorte sur le résultat du lancer; mais ils ne peuvent régler complètement le pari, et le jeu pourra vivre encore.

Ensuite, et d'un point de vue didactique il faut bien voir qu'une situation, qui engage à explorer le monde d'une situation donnée pour y définir des stratégies d'action gagnante, ne peut fonctionner que si l'action autonome non instruite des élèves y est possible. Le cas le plus fort est justement celui du pari sur l'issue d'un « tirage au sort » mais on sait que la connaissance des issues précédentes oriente les paris suivants : c'est le fait de ce que nous avons identifié comme « le tâtonnement expérimental » qui n'est pas ce que d'ordinaire on méprise sous le terme de « essais-erreurs ». Car le tâtonnement expérimental conduit à apprendre des expériences passées et permet donc de former une stratégie plus efficace. Ces considérations conduisent donc à valider les choix initiaux de la situation « du jeu des annonces » et même, ils conduisent à proposer rapidement aux élèves de jouer dans une situation plus complexe : deux dés contre deux mains. Car il s'agit d'aboutir à des stratégies d'action symboliques par la mobilisation des moyens de traitement mathématique.

Ainsi, le groupe de travail collaboratif se sert de l'analyse ascendante mathématique et didactique de la transposition que réalise le premier « jeu des annonces » comme base d'une analyse a priori de la situation suivante fondée sur une variante de ce jeu. En voici une rédaction, spécifiée par les contraintes de place d'un article et validée a posteriori par les observations des élèves par les professeurs de l'équipe.

Lorsque le professeur propose de jouer à deux mains contre deux dés, la comparaison devient très difficile à jouer à l'oral et le professeur engage les élèves à écrire les annonces de doigts comme les tirages de dés, afin de les comparer. De ce fait il permet aux élèves l'exploration du jeu par des écritures complexes en demandant de traiter non seulement les cas d'égalité mais aussi bien les inégalités ou le classement des joueurs selon la proximité de leur annonce au tirage. Cela donne des écritures du type $3+5 > 2+1$ ou $3+5 = 4+4$. Des techniques de comparaison nouvelles apparaissent, pour appuyer des raisonnements jusqu'ici impensables chez des élèves de CP, comme « $3 > 2$ et $5 > 1$ donc $3+5 > 2+1$ », ou « $5 = 1+4$ donc $3+5 = 3+1+4 = 4+4$ ». Ces manières de manipuler les écritures numériques sont en principe favorisées par le fait qu'elles économisent le comptage des doigts et des dés, qui est coûteux pour des quantités qui peuvent dépasser dix.

Ce travail relève d'un raisonnement algébrique⁶, où l'égalité exprime l'équivalence de deux formes symboliques dont on peut vérifier qu'elles désignent en effet toutes le même nombre, 8. La manipulation demande un geste inouï, l'amplification de l'écriture de 5 en $4+1$, qui permet de recomposer le 1 avec le 3 disponible (Tonnelles, 1979). Nous avons là un effet attendu de l'injonction faite aux élèves, d'écrire leur annonce et le tirage des dés pour ensuite désigner par le signe adéquat le résultat de leur comparaison. Mais l'effet ne va pas venir immédiatement, et il sera sans doute le résultat de l'écriture d'un raisonnement du type « $3+5$ si je le compare à $4+4$, je vois que 3 c'est un de moins et 5 un de plus donc au total ça compense ». Ce raisonnement est écrit au tableau par le professeur sous la dictée d'un élève, dans un moment ordinaire du travail collectif des propositions des groupes d'élèves. Mais sa notation donne $3+5=4-1+1+4=4+4$, un calcul qu'il n'est pas aisé de valider si l'on hésite à s'engager dans le fait que $-1+1=0$.

⁵ La situation du « jeu des annonces » relève bien de ce cas en remarquant que l'élève montre une valeur avant le lancer. Il gagne si cette valeur est identique à celle indiquée par le dé.

⁶ Leur raisonnement est de nature analytique, dans la mesure où il s'agit de réaliser des opérations au départ d'un rang quelconque du terme, qui est inconnu (Radford, 2012 ; Squalli, 2015)

Il serait donc bien de trouver une stratégie fondée sur une autre forme de raisonnement. Allons plus loin dans l'analyse ascendante. Non pas en allant plus loin dans les mathématiques savantes, mais en allant plus loin dans les connaissances que mobilisent les manipulations attendues des élèves. Écrire $3+1=4$ et $5=1+4$ demande que l'on ait appris à « montrer que 3 est dans 4 et que 1 est dans 5 ». Le professeur doit donc introduire explicitement l'expression, « Cette écriture, $5=1+4$, fait voir 1 dans 5 », et il dit couramment que « 3 est dans 4 car si on écrit que $4=3+1$, on voit alors 3 dans 4 ».

Pour que les élèves puissent utiliser ces propriétés ostensives de l'écriture, il faudra donc que le professeur 1) ait donc nommé explicitement le fait qu'une écriture numérique donne à voir certaines propriétés du nombre qu'elle désigne, et 2) ait engagé les élèves à travailler une écriture pour montrer une propriété particulière (par exemple « 4 est plus grand que 3 parce qu'on peut montrer 3 dans 4 : $4=3+1$ »). Si ces deux pratiques figurent dans le répertoire de techniques bien connues des élèves, alors il sera possible de voir apparaître la démonstration de l'égalité de $3+5$ et $4+4$. Ce type de jeu avec les écritures symboliques est caractéristique des pratiques algébriques, l'introduire dès le CP sur des égalités numériques est l'originalité du projet ACE et l'on comprend qu'il demande la coopération d'une équipe de professeurs avec une équipe de chercheurs en didactique.

■ *En conclusion de ces analyses*

On remarquera encore que les élèves qui auront participé à ce travail, même s'ils n'ont pas imaginé eux-mêmes la réponse, l'ont rencontrée sous la plume d'un de leurs pairs après l'avoir cherchée. Ils sont donc engagés dans le résultat et ont l'expérience d'une manière de regarder $5=4+1$ qui n'est pas ordinaire et relève de ce que (Serfati, 2005) appelle « la révolution symbolique ». En effet, c'est ici l'écriture qui pose des questions nouvelles et montre que 4 est le prédécesseur de 5. Les élèves ne constituent pas ce résultat en théorème, mais beaucoup parmi eux sauront agir en l'utilisant si nécessaire. Selon l'audace du professeur et des élèves, ils s'attaqueront à la comparaison des deux démonstrations pour valider $3+5=4-1+1+4=4+0+4=4+4$, donc le fait que $-1+1=0$ (ajouter et soustraire un même nombre ne change pas le total).

Pour terminer sur cet exemple, une remarque qui appartient à l'analyse a priori de l'espace des décisions du professeur (Assude & Mercier, 2017). Comme dans les autres cas, ces connaissances ne sont pas ici constituées en théorèmes, mais elles sont bel et bien énoncées pour être mises à la disposition des élèves c'est-à-dire de la classe. En revanche, le professeur s'interdira de les appeler lui-même tant que les élèves ne s'engagent pas dans leur usage : il n'est pas question de les enseigner.

Nous ferons enfin remarquer que, pour pouvoir être pensés comme mesures, les nombres manipulés par les élèves sont toujours en principe accompagnés de l'indication d'une unité. Ce n'est pas l'usage actuel pour les entiers naturels, et il a fallu les travaux de (Chevallard & Bosch, 2000 ; 2002) sur le Collège, repris pour les cycles élémentaires par Chambris (2010), Mounier, 2010 ; 2013), Tempier (2013) et Silvy, Delcroix, & Mercier (2013), pour que revienne l'idée ancienne d'une unité de compte qui était présente dans l'enseignement d'avant la réforme moderniste en raison de la prégnance des questions d'usage du système métrique qui définissaient un système de nombres associés. Nous n'avons pas, ci-dessus, insisté sur cela. Tous les comptes proposés parlent de doigts ou de points, c'est-à-dire que tous les comptes de référence sont des résultats d'un décompte au moins évoqué oralement, et qu'il est toujours possible à un élève de « sortir des doigts pour juger d'un nombre ». Les professeurs sont attentifs à cela, qui fait que l'on ne manipule que des nombres munis d'une unité, en référence à une opération de mesurage dans une situation qui fait référence et n'est jamais perdue de vue. Nous allons nous servir de cela pour aller plus loin dans le curriculum et choisir un deuxième exemple.

5. L'observation des élèves pour voir et comprendre les enjeux transpositifs de l'écriture décimale de position

Brousseau a initialement développé l'analyse du point de vue de l'enseignant ou plutôt de celui de l'ingénieur didacticien qui vise à identifier les variables didactiques d'une situation. Ces variables sont les moyens par lesquels un professeur peut en principe changer la connaissance portée par la situation, l'analyse a priori peut donc servir l'ingéniosité du professeur lorsqu'il prépare son cours. Mais elle sert aussi l'interprétation du didacticien lorsqu'il prépare son observation, c'est un thème récurrent des méthodologies didactiques. Mercier & Salin (1988) traitent pour leur part de la nécessité d'une analyse ascendante de la transposition pour comprendre le système de décisions d'un professeur en situation, lorsqu'une analyse a priori n'est pas disponible. Mercier (1992 ; 2002) a montré que l'analyse ascendante de la transposition permet de comprendre des éléments importants du système de décisions du professeur, en particulier dans l'observation ordinaire, clinique. Dans l'interaction de recherche, si le professeur est libre d'orienter son activité selon les lignes de force qu'il ressent sur le moment, l'observateur doit, pour interpréter les décisions contingentes, reprendre après coup une analyse a priori (Perrin-Glorian & Hersant, 2003 ; Ligozat 2009) et aller plus avant dans l'étude de ce que Margolinas (2002) nomme la situation du professeur et Chevallard (2005) les niveaux de détermination qui déterminent le savoir qui peut être enseigné.

Ce problème est particulièrement important lorsque les enjeux de l'enseignement ne sont pas explicités, ce qui est le cas chaque fois que l'on observe un professeur dans son action ordinaire. Les analyses sont alors nécessairement faites après coup, à partir non plus de l'enjeu déclaré mais de l'enjeu possible tel qu'il peut être identifié par un élève ou par un observateur. Disons qu'il peut être déterminé par le chercheur qui se place du point de vue d'un élève, à qui s'adresse l'intention enseignante pour construire un espace de significations supposées partagées (Quilio & Mercier, 2010).

Dans le curriculum que nous produisons en collaboration avec les professeurs, la situation fondatrice du jeu des annonces aboutit à l'écriture additive des nombres. Nous revenons donc sur nos analyses afin de situer le jeu des annonces dans la progression du cycle 2. Cette écriture fonde selon nous l'étude de l'ensemble des propriétés pratiques du système de la numération décimale de position, qui est une pratique écrite explorée sur l'ensemble de la scolarité primaire. Pour les élèves, les écritures arithmétiques désignent bien sûr des nombres, et les égalités arithmétiques sont les modèles possibles d'une situation, qu'elles décrivent complètement du point de vue de la mesure des grandeurs en jeu (Lebesgue, 1935).

Pour servir de théorie en acte de la numération décimale de position, les chercheurs ont proposé une notation des dizaines et unités qui permet d'interpréter $27=20+7$ comme $27 = 2 \text{ dizaines} + 7 \text{ unités}$. Dizaines et unités sont ici les « unités de compte » décimales d'une grandeur discrète, le nombre d'entités d'une collection, et cette idée conduit à écrire $27 = 2 D + 7 U$. L'intérêt de cette notation est qu'elle peut anticiper la notation polynomiale, qui demande l'usage des produits sinon des puissances de 10. Elle a été proposée dans les modules de ACE et nous allons en observer la mise en œuvre dans l'épisode qui suit. Nous soumettons cet épisode à la double analyse dont nous avons montré ci-dessus la dialectique.

6. Pour situer le problème : l'usage de la notation des unités de compte par une élève avancée

Les faits que nous relatons dans ce qui suit, sont extraits de vidéos réalisées par des observateurs, professeurs ou chercheurs, lors des premières mises en œuvre du module 9 de la progression ACE. Dans ce module les élèves étudient les écritures additives longues et les dizaines. Comme les précédents, ce module est construit en coopération par une équipe un peu

aguerrie de didacticiens et de professeurs des écoles pour la classe de CP d'un des professeurs de l'équipe.

Nous partons d'un épisode qui a étonné un professeur lors de son observation d'une séance de ce module dans une classe de CP. Une élève utilise la notation en d pour dizaines et u pour unités, afin d'étudier la technique d'addition en colonne. Observons ce qu'elle écrit successivement sur son ardoise à l'aide des deux photogrammes suivants :

L'observateur note qu'une élève de CP avancée utilise la notation en d et u pour développer la technique d'addition en colonnes qui suppose les retenues. L'addition $34+47$ donne le résultat 7 d 11 u. Grâce aux possibilités de l'ardoise, l'élève efface la dizaine de 11 et la reporte dans la colonne des dizaines en l'entourant.

Puis elle efface le 7 et le remplace par la nouvelle somme des dizaines, 8. Le professeur n'en verra que le résultat.

Le travail montre que pour cette élève, la technique est sous le contrôle de la théorie de la numération décimale de position que permet la décomposition en *unités de compte d et u*.

L'observateur remarque que l'élève passe de l'addition en ligne à la technique opératoire en colonne que leur professeur leur a montrée, et qu'elle traite sans hésiter de la retenue grâce à une notation dont la fonction est à la fois d'expliquer les propriétés des chiffres manipulés en rendant leur interprétation explicite, et d'aider à la manipulation réglée de ces symboles. C'est comme si l'élève disait : « Dans 34 (unités, mais cela va sans dire), il y a 3 dizaines et 4 unités ; dans 47, il y a 4 dizaines et 7 unités. Pour ajouter 47 à 34 j'ajoute 3, le nombre des dizaines de 34, à 4, le nombre des dizaines de 47, et j'obtiens 7, le nombre des dizaines de la somme. Puis je procède de même pour les unités et j'obtiens 11 unités. Mais 11 unités c'est 1 dizaine et 1 unité, j'ajoute donc cette dizaine aux dizaines et il reste 1 unité, la somme est donc 8 dizaines et 1 unité, soit le nombre 81 (unités, mais cela va sans dire) » et c'est en tous cas ce qu'elle écrit en se servant de la disposition en colonnes pour diminuer les écritures non indispensables.

7. L'usage de la notation en d et u par un autre élève quelque temps auparavant

Venons en maintenant à l'épisode dont nous allons faire l'analyse. On présente aux élèves une proposition de travail sur leur cahier d'exercices.

L'élève dont nous donnons ici la feuille de travail forme à la deuxième ligne 10 avec les termes $(7+3)$ dont il connaît la somme, et recopie les autres termes sans y toucher ni en changer l'ordre. Il indique alors sans tout recopier, sous le 16, que ce nombre se décompose en $10+6$.

Le travail consiste à réduire l'écriture additive $9+16+12+8+7+6+5+3$

sous forme de dizaines D et d'unités U.

À la troisième ligne, il rapproche de son premier 10 celui du 16, mais il n'écrit pas le 6 à la place qu'occupait le 16, il l'écrit après le 12 reporté d'au-dessus, comme s'il anticipait sur la décomposition de 12 en $10+2$, qu'il écrit dessous et qui fera la ligne suivante.

À la quatrième ligne, il rapproche donc un troisième 10 des deux premiers, et réécrit la ligne restante, en oubliant le 2. C'est qu'il rencontre maintenant une difficulté nouvelle : former un 10 supplémentaire alors qu'aucune somme partielle ne fait le compte. Il décompose alors 6 en $5+1$, de manière à obtenir un $5+5$.

À la cinquième ligne il a donc $10+10+10+10+9+6+8+\dots$ il devrait écrire le 1 restant mais écrit $5+4$, qui semble être la décomposition du 9, un peu hors de sa place attendue qui serait sous le 9.

À la sixième ligne, il écrit $10+10+10+10+10+6+8+5$, et l'on comprend qu'il ne contrôle plus vraiment la conservation du tout, mais il dégroupé encore 6 en $5+1$ pour faire apparaître une fois de plus un $5+5$.

À la septième ligne il a donc $10+10+10+10+10+10+5+1+8$, et l'on comprend qu'il a compté 10 mais enlevé un seul des deux 5, pour la deuxième fois. Le 5 restant va devenir encore un $4+1$, mais cela va venir s'ajouter à l'écriture et comme $5+4+1+8=18$, il termine en écrivant « 6D et 18 U = 618 », le résultat correct devant être 66 soit 6D et 6 U.

Le jeu entre la désignation en D et U et les techniques de décomposition et composition que la désignation au moyen des écritures additives permet n'est pas simple, lorsqu'il n'est pas systématique et que l'élève hésite entre les deux formes possibles $12=10+2$ qui est bien connue des élèves en fin d'année, et $12U=1D+2U$ qui est une écriture nouvelle permettant de démontrer les algorithmes du calcul décimal. Tous les élèves ne maîtrisent pas d'un coup ces moyens. On pourrait penser que, comme le prévoit la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998b), les élèves vont choisir la stratégie de transformations successives la plus performante, mais ce choix ne s'observe jamais que comme une tendance statistique, sa prégnance suppose que le problème soit rencontré suffisamment souvent, et que le professeur l'organise jusqu'à ce que la démonstration des réalisations réussies conduise tous les élèves à choisir cette stratégie. Ce n'est manifestement pas le cas au moment de l'observation et nous devons donc poursuivre l'enquête sur la situation de cette observation, pour en tirer une analyse plausible.

Il s'agit de déterminer l'espace des stratégies possibles pour un élève qui cherche à former la réponse attendue à partir des connaissances dont il dispose, et donc cette fois, d'analyser a priori mais après coup, l'espace de décision d'un élève.

Pour pouvoir constituer une désignation en unités de compte, il faut une stratégie d'opération dans les cas où la somme est dix ou un multiple de dix, et une stratégie de décomposition permettant de créer les conditions d'exécution de cette stratégie. C'est ce que fait l'élève. C'est sans doute ce que le professeur attend. Mais l'exécution pratique demande une organisation des calculs et des écritures qui est d'ordinaire réglée par le parenthésage. Hélas, cette technique n'est pas enseignée en CP et n'est donc pas disponible. Une autre technique d'agrégation pourrait être disponible, comme une accolade horizontale ou un surlignage des termes à agréger, mais cela non plus ne semble pas disponible et n'est sans doute pas enseigné. On voit donc l'élève s'essayer à ce qui ressemblerait à un arbre de calcul. Il développe l'écriture sur plusieurs lignes. Mais cette technique non plus n'est pas vraiment disponible ici, et ce moyen multiplie les lignes à écrire ; or, nous sommes dans un CP, et l'écriture est couteuse. Les élèves font donc soit ce qu'ils savent faire, soit ce qu'ils ont appris dans les leçons précédentes : ils s'attendent à ce que les exercices nouveaux servent à mettre en œuvre les savoirs précédemment étudiés.

L'élève observé se trouve donc rapidement confronté à la nécessité d'additionner directement des unités dont la somme ne donne pas 10, alors qu'il doit (c'est bien sûr l'attente du professeur) montrer des dizaines, le plus possible. L'élève suit un impératif contractuel qui le met en difficulté : tenter de trouver encore des dizaines dans l'addition des unités restantes. Il existe au moins deux moyens performants pour résoudre ce problème.

■ Une analyse a priori de la situation du point de vue des élèves

1) L'un correspond à l'organisation d'une désignation à partir d'un répertoire connu afin d'obtenir un 10 qui doit être aussitôt écrit à la place des deux nombres utilisés (à proximité si possible), d'autres unités pouvant faire l'objet d'un nouveau groupement. Un tel procédé devrait rapidement conduire une classe, selon le principe d'économie, à une énumération des dizaines qui pourrait jouer sur l'écriture en unités de compte : ce que l'on cherche à enseigner sous l'injonction « Faire voir des 10 dans l'écriture ». Mais dans le cas où les nombres donnés sont supérieurs à 10, il faut d'abord les décomposer en somme pour ensuite faire voir un 10. C'est ce que tente maladroitement l'élève observé.

2) L'autre consiste à calculer des sommes partielles jusqu'à obtenir un résultat au-delà de 10, tout dépend du répertoire de résultats connus, puis à séparer les dizaines des unités. Cela donne par exemple :

$$\begin{aligned}
 9+16+12+8+7+6+5+3 &= 9+10+6+10+2+15+11+3 \\
 &= 10+10+9+6+2+10+5+10+1+3 \\
 &= 10+10+10+10+15+7+4 \\
 &= 10+10+10+10+10+5+11 \\
 &= 10+10+10+10+10+10+6 \\
 &= 60+6 = 66 \\
 \text{mais la technique peut être améliorée :} \\
 9+16+12+8+7+6+5+3 &= 25+20+13+8 \\
 &= 20+20+10+3+5+8 \\
 &= 20+20+10+8+8 \\
 &= 20+20+10+16 \\
 &= 20+20+20+6 = 60+6 = 66
 \end{aligned}$$

Les techniques de calcul arithmétique des sommes, ou un répertoire additif important, développé bien au-delà du calcul sur les dizaines et les unités, règlent aussi la question. Mais on remarquera que ce rapport à l'écriture d'un nombre, qui consiste à le donner par la somme de

huit addendes, n'est pas ordinaire : bien que les élèves de cette classe de première année primaire aient eu, par exemple, à écrire $12 = 10+2 = 8+4$ ou encore $16 = 12+4 = 7+9$, l'exercice est le plus souvent formel et ne permet pas d'écrire une somme lorsque la quantité à dénombrer a une désignation aussi longue.

Certains procédés d'un troisième type, autrefois d'usage courant, s'appuient sur un dispositif de manipulations matérielles. Si ce sont des jetons à placer dans des cases déterminant leur valeur unitaire : c'est l'abaque ; si les jetons sont guidés sur des tiges qui déterminent leur valeur unitaire, c'est le boulier.

On remarquera enfin, pour conclure sur ce premier niveau d'analyse, que le procédé disponible est insuffisant et que le problème demande donc un moyen de plus haute technicité. Ce type de calcul sera fondé au CP sur l'usage des unités de compte D (dizaine) et U (unité), et C (centaine) sera sans doute nécessaire.

L'analyse a priori a donc permis d'identifier les enjeux possibles de la situation observée.

Les premiers résultats de ce travail nous engagent à étudier en parallèle l'espace des décisions du professeur et en particulier celles qui constituent le milieu de l'action des élèves. Les chercheurs réalisent ce deuxième niveau d'analyse au sein du collectif de recherche, pour nourrir l'espace de décision des professeurs dans le but pratique de développer leur professionnalité. L'identification des savoirs présents dans le problème posé à l'aide de l'analyse a priori permet maintenant d'interpréter ce qui s'observe, en le rapportant à ce qui ne s'observe pas et qui aurait pu exister dans des conditions proches.

■ **Ce qui a été observé : le raisonnement sur le schéma ligné**

Le professeur recopie au tableau la dernière ligne (n°7) produite par l'élève. Avec la classe, il vérifie l'écriture réduite : les 6 dizaines, 6 D, et les unités $5+4+1+8$, 18 U, soit 6D18U.

Au CP, tout nombre exprime une grandeur, le nombre d'entités d'une collection d'objets. On peut donc représenter par métaphore les opérations comme compositions de grandeurs. Par exemple des grandeurs géométriques, des longueurs qu'on ajoute (en lignes) ou qu'on multiplie (en surfaces rectangulaires).

Le professeur va utiliser la représentation en ligne pour traiter l'erreur de l'élève qui écrit 618 pour traduire 6 D 18 U. Il ne relève pas que la réponse produite par l'élève est erronée. Il recopie donc la dernière ligne écrite par l'élève et demande aux élèves ce qu'ils pensent de 6 D 18 U = 618. Certains élèves corrigent aussitôt : « on peut décomposer 18 en 10 et 8, on a une dizaine en plus ». Leur réponse montre qu'ils maîtrisent le deuxième moyen d'attaque que nous avons envisagé plus haut. Cependant, le professeur représente sur une ligne $10+10+10+10+10+10+18$ et rappelle « comment on faisait voir un 10 dans le 18 ». Cela fait, les dizaines et les unités sont comptabilisées sur le schéma ligné pour produire : 7D 8U = 78.

■ ***L'analyse ascendante de la transposition
à partir du traitement de l'erreur de l'élève par l'enseignant***

L'enquête que nous ouvrons alors sur le travail avec les unités de compte nous alerte sur ce que les élèves ont appris. Nous le décrivons ainsi : « (il faut) écrire les nombres sous la forme xD et yU puis enlever les signes D et U pour produire le nombre xy ». D'ordinaire en effet dans la classe nous observerons que $7D + 8U$ s'écrit sans signe somme, $7D\ 8U$, et que $7D8U = 78$. Mais la règle ne vaut que dans les cas où elle s'applique, et elle ne s'applique que « si le nombre d'unités et de dizaines ne dépasse pas 9 ! » ce qui ne permet pas de traiter des retenues, ce qui était pourtant l'enjeu.

Comment interpréter $6D\ 18U$? Le professeur a tué la possibilité d'en rendre compte, en n'imposant pas d'écrire toutes les unités de compte selon une composition additive qui caractérise le système de numération décimale de position : $7D + 8U = 70U + 8U = 78U$ est la démonstration attendue, mais maintenant impossible. À la place, le professeur laisse vivre une notation en D et U comme une notation sténographique, qui n'a plus sa fonction de modèle permettant de fabriquer une technique efficace d'addition pour tous les élèves de la classe, comme nous avons pu le constater plus haut dans le cas de l'élève avancée.

C'est ainsi qu'il n'y a pas de bon programme d'enseignement, s'il n'y a pas des professeurs pour anticiper les questions que les élèves se poseront, se préparer à y répondre au bon niveau d'explication, et être ouverts aux questions qu'ils n'avaient pas imaginées. Faute de cela, qui ne peut pas être le fait de professeurs isolés parce qu'il leur faudrait des années d'expérience et de recherche personnelle assidue pour former ces savoirs, tous les programmes se valent.

En guise de conclusion

La forme didactique nécessaire pour engager élèves et professeurs dans une enquête caractéristique d'un paradigme de questionnement du monde (au sens de Chevallard, 2010) sur les outils mathématiques qui les entourent et l'étude des résultats de cette enquête, est si absolument nouvelle que les professeurs doivent en éprouver les effets pour eux-mêmes afin de pouvoir en suivre les effets pour les élèves. Organiser l'enquête en proposant aux élèves des domaines de pratiques à explorer - comme ici, les nombres que permet d'écrire la numération décimale de position et des jeux conduisant à rencontrer progressivement les problèmes que son usage pose, puis les problèmes que sa forme permet de traiter - ne demande pas seulement la disponibilité d'un texte présentant lesdits domaines ni même les situations fondatrices des rencontres attendues. Il y faut des metteurs en scène professionnels de ces situations, capables de développer le texte dans son épaisseur. Ce métier ne s'acquiert que dans une collaboration organisée, dans des équipes réunissant comme ici professeurs ingénieurs et chercheurs.

Nous avons vu que les dialectiques entre analyse a priori du point de vue du professeur, analyse a priori du point de vue de l'élève et analyse ascendante de la transposition, éclairent sur les espaces de contrainte et les espaces de liberté de l'action enseignante.

Ainsi, comme le didacticien qui observe les élèves au travail, le professeur doit pouvoir observer, non seulement les apprentissages que l'enseignement a rendus possibles, mais encore les problèmes que les élèves rencontrent et qu'il doit identifier pour que leur résolution appartienne à la classe. Cela demande d'engager les professeurs à l'observation de leurs élèves, et suppose à la fois :

- une réflexion épistémologique, c'est-à-dire portant sur les savoirs scolaires, ceux que les professeurs enseignent et ceux dont les élèves ont besoin pour apprendre,
- une réflexion didactique, c'est-à-dire portant sur le curriculum que les élèves sont en train de produire pour eux-mêmes et sur les propriétés de cette organisation de savoir,

Selon les cas et les moments du travail, les analyses a priori et après coup engageront en effet une enquête dans l'une de ces directions. Cela suppose bien sûr que les professeurs ne travaillent pas seuls ces questions, mais qu'ils bénéficient très concrètement d'une organisation professionnelle en collectifs de travail reconnus, dont la production puisse donc être discutée par la profession et publiée, de la disponibilité de chercheurs des disciplines observant les rapports sociaux aux savoirs, de chercheurs observant les savoirs d'enseignement, et plus généralement d'un regard bienveillant de la société entière. Nous pensons, sans l'avoir montré dans ce texte, que ce dernier point demande aussi une réflexion anthropologique, c'est-à-dire portant sur les savoirs qui circulent en dehors de l'école et sur leur articulation avec les savoirs scolaires qui, si elle existe, fondera la force des savoirs scolaires en assurant de leur pertinence.

Bibliographie

- ARTIGUE M. (1990), "Ingénierie didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°9(3), p.281-308.
- ARTIGUE M. (2011), "L'ingénierie didactique comme thème d'étude", dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (éd.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques : 15^e École d'Été de didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p.15-25.
- ARTIGUE M. & DOUADY R. (1986), "Note de synthèse" [La didactique des mathématiques en France. Emergence d'un champ scientifique], *Revue française de pédagogie*, n°76(1), p.69-88.
- ASSUDE T. & MERCIER A. (2007), "L'action conjointe professeur-élève dans un système didactique orienté vers les mathématiques" dans G. Sensevy & A. Mercier (éd.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, Rennes, PUR, p.153-186.
- BESSOT A. (2011), "L'ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations didactiques", dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (éd.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques : 15^e École d'Été de didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p.29-56.
- BLANCHARD-LAVILLE C. (éd.) (1997), *Variation sur une leçon de mathématiques. Analyse d'une séquence « l'écriture des grand nombres »*, Paris, L'Harmattan.
- BLANCHARD-LAVILLE C., CHEVALLARD Y. & SCHUBAUER-LEONI M.-L. (1996), *Regards croisés sur la didactique : un colloque épistolaire*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- BRIAND J. (1999), "Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques", *Recherches en didactique des mathématiques*, n°19(1), p.41-76.
- BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques, en mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU G. & PÈRES J. (1981), *Le cas de Gaël*, Bordeaux, IREM de Bordeaux.
- CAMOS V. & BARROUILLET P. (2006), *La cognition mathématique chez l'enfant*, Paris, Solal Éditeurs
- CHAMBRIS C. (2010), "Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20^e siècle : théories et écologie", *Recherches en didactique des mathématiques*, n°30(3), p.317-366.
- CHEVALLARD Y. (1992), "Concepts fondamentaux de la didactique : perspective apportées par une approche anthropologique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°12(1), p.73-112.
- CHEVALLARD Y. (2005), "La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire", dans C. Ducourtieux & P.-L. Hennequin (éd.), *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*, Paris, APMEP et Animath, p.239-263.
- CHEVALLARD Y. (2010), "La didactique, dites-vous ?", *Éducation et didactique*, n°4(1), p.139-148, En ligne <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.771>

CHEVALLARD Y. & BOSCH M. (2000), "Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée", *Petit x*, n°55, p.5-32, En ligne <http://www-irem.ujf-grenoble.fr>

CHEVALLARD Y. & BOSCH M. (2002), "Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations", *Petit x*, n°59, p.43-76, En ligne <http://www-irem.ujf-grenoble.fr>

DEHAENE S. (2010), *La Bosse des maths : quinze ans après*, Paris, Odile Jacob (édition revue et augmentée).

DEWEY J. (1867), *Logique : la théorie de l'enquête*, Paris, PUF.

LEBESGUE H. (1935), "Sur la mesure des grandeurs", *Enseignement Mathématique*, n°34, p.176-219.

LEUTENEGGER F. (2009), *Le temps d'instruire: approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématique*. Berne : Peter Lang.

LIGOZAT F. (2009), "De la tâche prescrite à la tâche effectivement réalisée en classe. Un double feuilleté d'analyse des tâches pour l'étude du didactique ordinaire", dans S. Canelas-Trevisi, M.-C. Guernier, G. Sales-Cordeiro & D.-L. Simon (éd.), *Langage, objets enseignés et travail enseignant*, Grenoble, ELLUG, p.233-250.

MARGOLINAS C. (2002), "Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur", dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (éd.), *Actes de la 11^e École d'Été de didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p.141-156.

MARGOLINAS C. & WOZNIAC F. (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, De Boeck, Bruxelles, En ligne <http://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00779683/>

MERCIER A. (1992), *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, En ligne <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00278299>

MERCIER A. (1997), "La relation didactique et ses effets", dans C. Blanchard-Laville (éd.), *Variation sur une leçon de mathématiques. Analyse d'une séquence : l'écriture des « grands nombres »*, Paris, L'Harmattan, p.259-312.

MERCIER A. (2002), "Note de synthèse" [La transposition des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques], *Revue française de pédagogie*, n°141(1), p.135-171.

MERCIER A. (2005), "Quels apports pour le questionnement de la didactique des mathématiques ? Ce que nous avons appris sur les didactiques. Thème 1 : Généricité et spécificité des théories didactiques. Etude d'une question ouverte", dans A. Mercier & C. Margolinas (éd.), *Balises en didactique des mathématiques, Cours de la XI^e École d'Été de didactique des mathématiques*, Corps (20-29 Aout 2003), Grenoble, La Pensée Sauvage, p.65-71.

MERCIER A. (2008), "Pour une lecture anthropologique du programme didactique", *Éducation et didactique*, n°2(1), p.7-40.

MERCIER A. & SALIN M.-H. (1988), "L'analyse a priori, outil pour l'observation", *Actes de l'Université d'été de didactique des mathématiques*, Bordeaux, IREM de Bordeaux, p.203-236.

MOUNIER E. (2010), *Une analyse de l'enseignement de la numération. Vers de nouvelles pistes*, Thèse de doctorat de l'Université Paris-Diderot-Paris VII, En ligne <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00550721/>

MOUNIER E. (2013), "Y a-t-il des marges de manœuvre pour piloter la classe durant une phase de bouclage ?", *Recherches en didactique des mathématiques*, n°33(1), p.79-113.

PIAGET J. & SZEMINSKA A. (1965), *The child's conception of number*, New-York, Norton.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (2011), "L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants", dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (éd.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques : 15^e École d'Été de didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, Vol. 1, p.57-78.

PERRIN-GLORIAN M.-J. & HERSANT M. (2003), "Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°23(2), p.217-276.

QUILIO S. (2012), "Une forme caractéristique de condition de l'étude dans la réalisation d'une ingénierie didactique en mathématiques à l'école primaire", *Éducation et didactique*, n°6(2), p.9-26.

QUILIO S. & MERCIER A. (2010), "Une phase du jeu du trésor dans une zone de discrimination positive : la mise en œuvre d'un collectif de pensée en moyenne section de maternelle dans la réalisation d'un code pour la désignation d'une collection d'objets", dans L. Mottier-Lopez, C. Martinet, V. Lussi-Borer, *Actes du congrès de l'Actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF)*, Genève, En ligne <https://plone.unige.ch/aref2010/>

QUILIO S. & MORELLATO M. (2016), "La coopération entre professeurs et chercheurs pour la conception, la réalisation et l'observation d'un enseignement en mathématiques : une double interaction didactique ?" dans F. Ligozat, C. Charmillot & A. Muller, *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation*, Série Raisons éducatives (vol. 20), Bruxelles, De Boeck, p. 165-187.

RADFORD L. (2012), "Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues", *ICME-12 Regular Lecture* (July 8-15), Seoul, South Korea.

SQUALLI H. (2015), "La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels", *Actes du Colloque l'Espace Mathématique Francophone 2015*, En ligne <http://emf.unige.ch/index.php/emf-2015/>

SENSEVY G. (2011), *Le Sens du Savoir. Éléments pour une Théorie de l'Action Conjointe en Didactique*, Bruxelles, De Boeck.

SENSEVY G. & MERCIER A. (éd.) (2007), *Agir Ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, Rennes, Presses universitaires de Rennes.

SENSEVY G., QUILIO S., FOREST D. & MORALES G. (2013), "Cooperative engineering as a specific design-based research", *ZDM*, n°45(7), p.1031-1043.

SERFATI M. (2005), *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Paris Petra.

SILVY C., DELCROIX A. & MERCIER A. (2013), "Enquête sur la notion de «pedagogical content knowledge», interrogée à partir du «site local d'une question», *Éducation & didactique*, n°7(1), p.33-58.

TEMPIER F. (2013), *La numération décimale de position à l'école primaire: une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*, Thèse de doctorat de l'université de Paris 7, En ligne <http://www.theses.fr>

TONNELLE J. (1979), *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, Mémoire de DEA, Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille II.

WINSLØW C. (2012), "A comparative perspective on teacher collaboration: The cases of lesson study in Japan and of multidisciplinary teaching in Denmark", dans G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche, *From Text to 'Lived' Resources*, New York, Springer, p.291-304.

WINSLØW C., MATHERON Y. & MERCIER A. (2013), "Study and research courses as an epistemological model for didactics", *Educational Studies in Mathematics*, n°83(2), p.267-284.