Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique

Examples and mathematical proving: a semantic and dialogic approach

Thomas Barrier

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/ree/6263>

DOI : 10.4000/ree.6263

ISSN : 1954-3077

Éditeur

Université de Nantes

Référence électronique

Thomas Barrier, « Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique », *Recherches en éducation* [En ligne], 27 | 2016, mis en ligne le 01 octobre 2016, consulté le 05 juin 2021. URL : <http://journals.openedition.org/ree/6263> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/ree.6263>

Recherches en éducation est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique

Thomas Barrier¹

Résumé

Cet article s'intéresse aux rôles des exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques au niveau de l'enseignement supérieur. La question est tout d'abord abordée en mobilisant la distinction introduite par Weber et Alcock (2004) entre les approches sémantique et syntaxique des démonstrations. Cette distinction est ensuite reformulée et précisée par le recours à une modélisation explicite élaborée à partir des approches dialogiques de la logique. La modélisation, construite autour du concept de jeu, permet de traiter dans un même cadre du travail sur les exemples et du travail de manipulation formelle des énoncés. Elle contribue à en clarifier les points communs et les spécificités. La contribution des exemples à la dynamique du processus de validation est alors abordée en appui sur les notions de partie et de stratégie.

Les recherches s'intéressant à l'enseignement supérieur des mathématiques sont actuellement assez vigoureuses. Un réseau international vient de voir le jour afin de contribuer à leur structuration (INDRUM²). Une nouvelle revue se propose par ailleurs d'accueillir les productions issues de ce champ (Marrongelle, Rasmussen & Thomas, 2015). D'assez nombreux travaux s'intéressent aux difficultés rencontrées par les étudiants, et aux moyens de les dépasser, notamment à l'aide de dispositifs spécifiques d'enseignement. Chaque recherche adopte bien sûr un regard particulier, lié aux choix théoriques qui la portent. Leur mise en perspective permet néanmoins de dresser un tableau riche d'un sujet complexe (Gueudet, 2008 ; Nardi et al., 2014). Les difficultés des étudiants peuvent être analysées en relation avec différents facteurs cumulatifs parmi lesquels on peut signaler : la nature spécifique des contenus mathématiques en jeu (Robert, 1998 ; Winslow, 2008), la complexité des pratiques logiques et langagières (Durand-Guerrier & Arsac, 2003 ; Chellougui, 2009), ceci dans un contexte où la démonstration devient un élément de plus en plus central dans le processus d'enseignement et d'apprentissage (Moore, 1994). Ce contexte particulier de l'enseignement supérieur conduit à de nécessaires adaptations des moyens théoriques à disposition, pour certains issus de travaux portant sur d'autres niveaux d'enseignement, par exemple lorsqu'il s'agit d'élaborer des ingénieries didactiques (Gonzalez-Martin et al., 2014 ; Artigue, 2014). Cet article s'intéresse pour sa part à la question du rôle des exemples dans le processus d'élaboration des démonstrations. Il est à vocation théorique, son objectif est de présenter un outil de modélisation permettant de décrire et d'analyser l'activité de validation et de mettre en évidence son apport pour la question à l'étude. L'argumentation prend appui sur un extrait d'un entretien avec un doctorant en mathématiques. L'extrait a déjà été étudié par ailleurs, mais à l'aide d'autres moyens théoriques, ce dont je me sers pour dégager les apports spécifiques de cette recherche.

Dans cet objectif, je commence par une revue de travaux ayant trait à la thématique de ce texte, avec une attention particulière pour ceux d'entre eux qui s'appuient sur la distinction entre les approches sémantique et syntaxique de l'élaboration des démonstrations (Weber & Alcock, 2004). Je présente en conclusion de cette première partie la manière dont je m'approprie cette distinction tout en précisant la problématisation de ce travail. Il s'agit à la fois de s'interroger sur la contribution potentielle des objets, du recours aux exemples, dans l'élaboration des démonstrations et de questionner les moyens théoriques qui sont à notre disposition pour mener à bien ce travail. Dans une deuxième partie, je m'appuie alors sur les approches dialogiques de

¹ Maître de conférences, Laboratoire de Mathématiques de Lens (LML), Université d'Artois.

² International Network for Didactic in University Mathematics.

la logique (Hintikka & Sandu, 1997 ; Rahman & Tulenheimo, 2006 ; Redmond & Fontaine, 2011) pour proposer un cadre théorique permettant la mobilisation d'outils formels et susceptible de contribuer à l'étude didactique des relations entre les exemples et l'élaboration des démonstrations. L'outil introduit est ensuite sollicité pour construire une modélisation visant à analyser le travail d'un doctorant en mathématiques ayant pour tâche d'évaluer une conjecture en arithmétique. Je discute enfin de la pertinence didactique de l'outil théorique introduit dans l'article, celui-ci ayant été élaboré en dehors du contexte de la didactique des mathématiques.

1. Exemples et preuves en mathématiques

Les mathématiques ont un rapport singulier à la généralité – pour qu'un énoncé universellement quantifié de la forme *pour tout* x $A(x)$ soit considéré comme vrai relativement à un domaine d'interprétation D il faut que la phrase ouverte $A(x)$ soit satisfaite pour chaque choix d'objet dans D – si bien que les exemples (et contre-exemples) y jouent un rôle particulier. Il s'agit en conséquence d'une thématique importante en didactique des mathématiques, comme le rappelle cet éditorial d'un numéro spécial de la revue *Educational Studies in Mathematics* consacré aux exemples : « The notion of an example, and its relation to generality, is an integral part of the discipline of mathematics. We claim that any theory of learning which does not deal with how learners and teachers act with, and on, examples is likely to be incomplete as far as mathematics is concerned. » (Bills & Watson, 2008, p.77)

Benbachir et Zaki (2001) insistent pour leur part sur le rôle essentiel qu'ont joué les exemples et les contre-exemples dans le développement historique de l'analyse réelle, en particulier à partir de la deuxième moitié du XIX^e siècle, période au cours de laquelle commence à s'installer le rapport aux exemples qui est aujourd'hui la norme parmi les mathématiciens (une implication universellement quantifiée ne peut souffrir d'aucun contre-exemple). En appui sur ce constat épistémologique, et dans le contexte d'une université du Maroc, ils étudient le comportement d'étudiants de première année en mathématiques ayant pour tâche de produire des exemples et des contre-exemples. Ils identifient alors deux types de stratégies, dites locales ou globales, les secondes étant plus productives. Du point de vue des apprentissages, ils soulignent le potentiel de ce type de tâches pour l'émergence de ce qu'ils appellent des contradictions internes chez les étudiants. Une idée semblable est développée par Zazkis et Chernoff (2008), mais dans un contexte différent puisque les deux études de cas qu'ils présentent sont empruntées à la formation initiale des professeurs du premier degré au Canada. À travers la notion d'*exemple pivot*, ces auteurs cherchent à mettre en évidence le fait que les exemples et les contre-exemples peuvent jouer des rôles psychologiques différents – générer ou non des conflits cognitifs notamment – tout en étant « identiques » sur le plan logico-mathématique³.

Je vais maintenant présenter la distinction que font Weber et Alcock (2004) entre les approches sémantique et syntaxique des démonstrations. Cette importante distinction est également portée par d'autres auteurs, d'une manière convergente selon moi. Je pense notamment à la distinction entre *jeu d'intérieur* et *jeu d'extérieur* telle que formulée par Hintikka (2007), et plus généralement à la dichotomie classique en philosophie de la logique et du langage, entre les approches formelles de la validité (qui s'établit alors de manière interne à la syntaxe) et celles qui supposent des interprétations pour les énoncés (la validité se définit alors comme vérité pour toutes les interprétations). Je reviendrai là-dessus lors de la deuxième partie de ce texte puisqu'un enjeu de ce travail est justement de discuter de l'intérêt didactique de disposer d'un référent théorique explicite tel que la logique peut en proposer. La formulation proposée par Weber et Alcock (2004) a par ailleurs été très régulièrement reprise dans divers travaux de didactique donnant ainsi lieu à un nombre important de publications (certaines d'entre elles seront présentées ci-dessous). Je

³ Un contre-exemple est susceptible de produire chez le sujet un conflit cognitif, voire de l'aider à le dépasser. Les exemples pivots (*pivotal examples*) sont des exemples qui contribuent à de tels changements conceptuels. Il s'agit donc d'une notion psychologique au sens où elle se définit en référence à l'effet de la manipulation de l'exemple sur le sujet cognitif. Les auteurs font le parallèle avec la notion d'exemple générique qui se définit également en référence au sujet, celui-ci étant susceptible d'accéder ou non à la généralité d'une preuve à partir de la considération d'un « simple » exemple (Zazkis & Chernoff, 2008, p. 197).

commence donc en la présentant pour elle-même. Voici les définitions que ces auteurs proposent : « We define a syntactic proof production as one which is written solely by manipulating correctly stated definitions and other relevant facts in a logically permissible way. In a syntactic proof production, the prover does not make use of diagrams or other intuitive and non-formal representations of mathematical concepts. In the mathematics community, a syntactic proof production can be colloquially defined as a proof in which all one does is 'unwrap the definitions' and 'push symbols'. » (Weber & Alcock, 2004, p.210)

Une production de preuve syntaxique résulte donc d'un processus formel reposant sur la seule syntaxe des énoncés considérés. Elle mobilise des ressources internes au langage : énoncés disponibles (définitions, théorèmes, axiomes...) et règles logiques de manipulation des signes (on peut par exemple penser aux règles de la déduction naturelle pour la logique du premier ordre). Les énoncés sont considérés pour eux-mêmes, indépendamment de toute interprétation sur un domaine d'objets sur le plan logique. Plus précisément, s'il est envisageable qu'il y ait sur le plan psychologique des recours à des éléments externes à la syntaxe, ces recours ne donnent lieu à aucune contrepartie sémiotique accessible à l'observateur (schéma, figure, verbalisation écrite ou orale, etc.) qui ne soit déjà présente dans les ressources initiales (énoncés disponibles). J'en viens maintenant à la production sémantique des démonstrations : « We define a semantic proof production to be a proof of a statement in which the prover uses instantiation(s) of the mathematical object(s) to which the statement applies to suggest and guide the formal inferences that he or she draws. By an instantiation, we refer to a systematically repeatable way that an individual thinks about a mathematical object, which is internally meaningful to that individual. » (*ibid.*)

Dans une telle approche, les objets mathématiques viennent s'ajouter au milieu de celui dont l'activité est réglée par la situation de validation (Brousseau, 1998) en complément des énoncés initialement disponibles. Ils contribuent de manière significative à la mise en place des stratégies de démonstration du sujet. Cette distinction est issue d'un travail portant sur les processus d'élaboration des démonstrations, les auteurs parlent donc de *semantic* (resp. *syntactic*) *proof production* mais il est possible d'étendre le domaine d'application de l'outil à des activités de lecture ou d'évaluation de preuve, c'est pourquoi je parle dans ce texte de manière plus large d'approches sémantique et syntaxique. Le critère de distinction entre les deux approches reste le même : y a-t-il ou non une contribution observable des objets mathématiques dans le processus ?

Dans le cas de la validation d'une implication universellement quantifiée de la forme « pour tout x dans D si $A(x)$ alors $B(x)$ », les processus d'instanciation relevant de l'approche sémantique prennent très souvent la forme d'une recherche d'objets du domaine d'interprétation D satisfaisant ou non la phrase ouverte « si $A(x)$ alors $B(x)$ » (Durand-Guerrier, 2003), c'est-à-dire se traduisent par la recherche d'exemples et de contre-exemples. En ce sens, la notion d'approche sémantique permet de caractériser le recours aux exemples dans le travail mathématique autour des démonstrations. Dans leur article, et dans d'autres qui suivront, Weber et Alcock entendent montrer les limitations des approches exclusivement syntaxiques des démonstrations. L'idée générale est que bien que la dimension syntaxique soit essentielle à la pratique mathématique, à plus forte raison dans l'enseignement supérieur, celle-ci ne se suffit pas à elle-même, la pratique mathématique experte se caractérisant par une dialectique étroite entre aspects syntaxiques et sémantiques (Durand-Guerrier, 2008). Dans le contexte d'une conjecture mathématique dont la forme relève d'une implication universellement quantifiée, l'idée est que le travail sur les exemples est un élément moteur du processus de validation, que ce soit pour identifier de nouveaux énoncés susceptibles d'être utilisés ou encore pour mettre en place une stratégie de démonstration (une manière d'utiliser les énoncés).

Dans leur article, Weber et Alcock rendent compte de deux études empiriques. Pour la première, le contexte est celui de l'évaluation de conjectures en théorie des groupes. Elle concerne des étudiants en début de cursus (*undergraduate students*), des étudiants-chercheurs en doctorat et des mathématiciens professionnels (algébristes), tous issus d'universités américaines. Les auteurs s'appuient sur des observations de procédures, les sujets étant invités à produire des

démonstrations tout en pensant à haute voix, et sur des entretiens semi-directifs⁴ pour mettre en évidence des différences dans la manière de traiter les conjectures : les étudiants en début de cursus ont une approche très syntaxique (avec peu de réussite) alors que les étudiants-chercheurs semblent procéder de manière plus sémantique, au moins pour certaines de leurs démonstrations, de manière consistante avec les procédures privilégiées par les mathématiciens professionnels. La seconde étude est une étude de cas réalisée auprès de deux étudiants d'une université du Royaume-Uni inscrits à un cours d'analyse mobilisant des définitions et des démonstrations formelles (le premier qu'ils ont rencontré de cette nature). La méthode consiste en des entretiens autour de conjectures en analyse à propos de suites réelles. Les auteurs montrent alors que l'approche du premier étudiant est consistante avec le mode syntaxique de raisonnement, celle du second l'étant avec le mode sémantique. Le second étudiant est considéré comme celui étant le plus à l'aise avec le contenu mathématique en jeu.

Avant de présenter le référent théorique que j'utilise pour formaliser ce type d'analyse, et d'en discuter l'intérêt, je vais présenter d'autres études prolongeant la recherche précédente dans le sens où elles concernent d'autres contextes, d'autres contenus mathématiques, ou encore d'autres types de tâches (lire une preuve plutôt qu'en produire une par exemple). Le paragraphe qui suit concerne les étudiants, celui d'après les mathématiciens professionnels.

■ *Usage des exemples par les étudiants*

Alcock et Weber (2010a) s'intéressent à des étudiants inscrits à un cours d'introduction au raisonnement mathématique dans une université américaine (transition d'une approche des mathématiques centrée sur le calcul à une approche centrée sur les démonstrations). La recherche se construit autour d'entretiens réalisés auprès de onze d'entre eux. Les auteurs cherchent à dégager les raisons qui conduisent les étudiants à utiliser des exemples au cours de l'élaboration des démonstrations et à identifier ce qui pourrait les gêner pour ce faire. Il s'agit en quelque sorte de préciser l'idée selon laquelle le recours aux exemples serait susceptible de contribuer à l'élaboration des démonstrations. Alcock et Weber (2010a) identifient alors quatre objectifs dans l'utilisation des exemples : s'approprier/comprendre un énoncé, évaluer un énoncé, construire un contre-exemple, avancer plus en avant dans le processus de validation. Ils montrent aussi que tous les étudiants n'ont pas le même comportement vis-à-vis des exemples pour la tâche qui leur est proposée (qui concerne divers contenus : relations, ensembles, fonctions, suites...). Alcock et Weber (2010b) proposent en complément deux études de cas très contrastées du point de vue des modes de raisonnement des étudiants à partir de ces mêmes données. Ces deux articles permettent de mieux saisir comment les dimensions sémantique et syntaxique peuvent s'articuler dans l'élaboration des démonstrations. Pour autant, dans de nombreux cas, le recours aux exemples n'est pas suffisant pour permettre aux étudiants d'aboutir à une démonstration. Certains échouent à exemplifier une définition car ils n'en identifient pas la structure logique (Selden & Selden, 1995). Dans d'autres cas, c'est l'exploitation formelle des ressources issues du travail sémantique qui fait défaut. Une approche sémantique se caractérise par desinstanciations, par l'introduction dans le milieu des étudiants d'objets et de signes en permettant la manipulation. La conversion du travail sur ces signes depuis le registre spontanément utilisé vers le registre verbal attendu pour la preuve, qu'il soit symbolique, formel ou encore intermédiaire (Mesnil, 2014), constitue une difficulté importante, à plus forte raison pour des domaines mathématiques qui font un usage important du dessin non verbal comme l'analyse réelle ou la géométrie élémentaire (Duval, 1995).

Il me semble par ailleurs nécessaire d'envisager ici une autre explication de la difficulté des étudiants à exploiter le travail sur les exemples dans l'élaboration des démonstrations. On pourrait également voir dans ce phénomène l'effet d'un contrat inhibiteur relatif à la démonstration selon lequel puisqu'il est bien connu qu'en mathématiques les exemples « ne prouvent rien », ceux-ci ne peuvent en rien contribuer à la validation. Cette vision repose sur une confusion entre la démonstration-produit (*proof*) et la démonstration-processus (*proving*). En

⁴ Les énoncés considérés dans l'étude portent sur des groupes particuliers (sont-ils isomorphes ?), ce qui rend selon moi la distinction entre approche sémantique et approche syntaxique plus délicate à observer que dans le cas d'un énoncé universellement quantifié (recours aux exemples). La méthode de recherche croisant des entretiens et des observations peut se comprendre comme un moyen de dépasser cette difficulté.

somme, le rôle des exemples relèverait exclusivement des *situations de décision* et non des *situations de validation* pour reprendre une formulation de Balacheff (1987). C'est à ce type d'explication que j'ai eu recours dans Barrier (2008), le contexte étant cette fois celui d'une tentative d'une démonstration en arithmétique par des élèves de dernière année de l'enseignement secondaire en France. Dans les extraits analysés, les élèves ont recours à des exemples pour se convaincre de la vérité d'un énoncé d'arithmétique, mais ceux-ci ne mobilisent pas ce travail sémantique lorsqu'ils envisagent l'élaboration d'une démonstration de l'énoncé. Tout se passe comme si le travail sur les exemples et le travail d'élaboration d'une démonstration devaient se faire de manière indépendante.

La recherche de Alcock et Inglis (2008) concerne pour sa part des étudiants-chercheurs en cours de doctorat dans une prestigieuse université du Royaume-Uni. Le contexte est celui de l'évaluation de conjectures et l'élaboration de démonstrations en arithmétique. À travers deux nouvelles études de cas, les auteurs présentent à nouveau des usages différenciés des exemples par les étudiants. Cela dit, il est difficile de donner une explication précise à ces différences. Sont-elles dues aux sujets eux-mêmes qui relèveraient de profils cognitifs différents ? Sont-elles dues à leurs niveaux de familiarité avec le contenu mathématique considéré ? À la nature de la tâche elle-même ? Les auteurs semblent pencher, avec prudence néanmoins, vers une interprétation attribuant aux sujets des profils cognitifs indépendants des tâches. Je reste pour ma part peu convaincu, à l'image de Mithalal (2013), faute d'éléments suffisants permettant d'apprécier les connaissances des doctorants relativement au domaine considéré. Une variable essentielle à prendre à compte est en effet le niveau de familiarité des sujets avec le contenu, la consistance de la tâche de démonstration relativement aux compétences du sujet.

La recherche de Weber (2015) permet d'étendre ces réflexions à d'autres catégories de sujets (quatre étudiants de mathématiques – *mathematics majors* – en réussite inscrits dans une université américaine) mais surtout à un autre type de tâches puisque l'auteur s'intéresse cette fois à la compréhension des démonstrations, et non plus à leur élaboration. Certaines difficultés des étudiants dans l'évaluation de la validité des démonstrations ont déjà été étudiées (Barrier, 2009 ; Segal, 2000 ; Selden & Selden, 2003). Au niveau de l'enseignement supérieur, les enjeux dépassent néanmoins cette seule question de la correction dans la mesure où la lecture de démonstration constitue le principal vecteur des apprentissages mathématiques. Meija-Ramos et Weber (2014) montrent d'ailleurs que la principale raison pour laquelle les mathématiciens lisent des preuves est la recherche d'éclairages relatifs à leur propre préoccupation de recherche (je reviendrai plus loin sur cette recherche). Weber (2015) cherche à identifier les compétences requises pour lire un texte de démonstration de manière efficace. Les données sont à nouveau issues d'entretiens au cours desquels les étudiants sont invités à penser tout haut au moment où une preuve leur est présentée. Le recours à des exemples fait partie des stratégies identifiées. Il s'agit alors de mieux appréhender certaines assertions ou encore de contrôler la validité de certaines inférences. Dans ce dernier cas, l'objectif n'est pas tant de s'assurer que des énoncés universellement quantifiés sont vrais (la stratégie ne relève pas d'un empirisme naïf), mais bien d'identifier si tel énoncé est ou non une conséquence logique des énoncés précédents. Les exemples considérés sont porteurs de généralité au sens où ils sont conçus par les étudiants comme des représentants de la classe qu'ils représentent, ce sont des exemples génériques au sens de Balacheff (1987). Ces analyses sont complétées par une enquête réalisée par Internet auprès de 83 mathématiciens professionnels visant à étudier si les stratégies de lecture identifiées étaient ou non considérées comme pertinentes par les enseignants. Pour ce qui est des exemples, voici l'alternative qui leur était proposée : « A. When mathematics majors read a new assertion in a proof that they find confusing, I would prefer if they sometimes checked whether that assertion is true with a numerical example. B. When mathematics majors read a new assertion in a proof, I would prefer if they try to see how that new assertion is a logical consequence of previous statements. They should not check assertions with specific examples since you cannot prove by example. » (Weber, 2015)

La formulation B fait implicitement référence à une difficulté connue des enseignants de mathématiques, les étudiants se contentant parfois de donner des arguments empiriques dans

des contextes où une démonstration formelle est attendue. Pour autant, 71% des mathématiciens ayant participé au sondage ont une préférence pour l'assertion A, contre seulement 12,5% pour l'assertion B, les autres étant neutres. Ces résultats montrent que l'épistémologie personnelle (implicite) de ces mathématiciens tend à accorder une place importante aux exemples et aux approches sémantiques. Ces résultats sont cohérents avec les résultats de Durand-Guerrier et Arsac (2003). Ceux-ci montrent que le processus de contrôle des démonstrations par les enseignants du supérieur ne peut se réduire à une évaluation syntaxique de la correction formelle des démonstrations, à un contrôle pas-à-pas de la validité logique des inférences. Leur recherche se base sur vingt-deux réponses d'enseignants travaillant dans des universités françaises à un questionnaire élaboré autour d'une preuve d'étudiant erronée en topologie. Leur étude montre que ce sont d'abord les connaissances mathématiques, la familiarité avec le contenu des énoncés, qui permettent aux enseignants de repérer que la démonstration est erronée.

■ **Usage des exemples par les mathématiciens**

Élaborer une démonstration, contrôler la validité d'une inférence, lire/comprendre une démonstration, mais aussi explorer l'extension d'un concept en considérant des exemples et des non-exemples, produire des contre-exemples, les rôles des exemples dans la pratique mathématique sont divers. Le paragraphe précédent était plutôt centré sur les étudiants, je considère dans celui-ci le cas de leurs enseignants.

L'étude de Alcock (2009) se situe dans le contexte déjà évoqué plus haut d'un cours d'introduction au raisonnement mathématique dans une université américaine. À partir d'entretiens réalisés auprès de deux enseignants intervenant dans ce cours, elle montre que malgré une certaine convergence dans leur perception des enjeux du cours, ceux-ci n'insistent pas sur les mêmes aspects avec leurs étudiants, notamment du point de vue des exemples, qui sont toujours conçus dans cet article comme des instantiations de concepts mathématiques (susceptibles de contribuer à l'émergence d'une stratégie de validation). Un premier enseignant encourage les approches sémantiques et propose même des tâches visant à faire produire des exemples par les étudiants. L'autre enseignant met pour sa part l'accent sur la maîtrise de la syntaxe mathématique sans laquelle l'engagement dans les processus de validation paraît très incertain. Les deux enseignants paraissent tous deux conscients que les deux dimensions s'articulent très étroitement dans la pratique mathématique, ils mettent néanmoins chacun l'accent sur l'un ou l'autre des deux aspects. Alcock (2010) s'appuie sur le même contexte empirique, mais rend cette fois compte de cinq entretiens avec des enseignants de ce même cours. Son analyse fait émerger quatre modes de pensée non exclusifs : trois d'entre eux relèvent d'une approche sémantique, le quatrième d'une approche syntaxique. On retrouve pour les exemples des rôles déjà dégagés plus haut à partir de l'analyse des pratiques des étudiants : comprendre un énoncé (*instantiation*), contribuer à l'élaboration d'une démonstration (*creative thinking*) ou encore évaluer la valeur de vérité d'une proposition et contrôler la validité d'une inférence (*critical thinking*). Il est par ailleurs intéressant de noter que si tous les enseignants n'ont pas le même positionnement quant au mode de raisonnement à travailler en priorité, ceux-ci tendent globalement à privilégier une approche syntaxique dans ce cours de transition (*structural thinking*). Ce constat paraît cohérent avec les choix faits dans un cours « équivalent » proposé par l'université Paris Diderot intitulé *Langage Mathématique*. Ce cours est proposé en première année de Licence, il est obligatoire pour les étudiants de Licence de mathématiques, mathématiques-informatique ou informatique, facultatif pour ceux de MASS⁵. Un rapide parcours de la programmation et des notes de cours confirme ce que l'intitulé laissait à penser : l'accent est mis sur les aspects syntaxiques de l'activité mathématique⁶.

Meija-Ramos et Weber (2014) ont réalisé une enquête par Internet auprès de 116 mathématiciens américains notamment pour étudier la manière dont ceux-ci lisent les démonstrations (déjà publiées ou dans le cadre d'un processus d'arbitrage pour une revue), et

⁵ Mathématiques Appliquées et Sciences Sociales.

⁶ Les documents relatifs à ce cours sont disponibles en suivant ce lien (consulté le 20/07/2015) : <http://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/course/index.php?cid=LM1>

pour ce qui m'intéresse spécifiquement ici, s'ils ont ou non recours aux exemples. Selon les auteurs, leur étude procure de nouveaux éléments empiriques mettant en évidence le rôle essentiel joué par les exemples à la fois pour contribuer à la compréhension des démonstrations, mais aussi pour leur évaluation.

■ ***Vers un cadre de référence pour les processus d'instanciation***

Dans la littérature relevant de la didactique des mathématiques, le terme d'exemple est parfois utilisé dans une acception beaucoup plus large que celle qui est la nôtre dans cet article. Par exemple, Zazkis et Leikin (2008) considèrent des exemples de définition (d'un carré) dans la perspective d'identifier les connaissances d'étudiants préparant le certificat d'enseignement du second degré. Ce travail s'inspire de l'approche par les espaces d'exemple (*example spaces*) de Watson et Mason (2002). Ces chercheurs proposent en effet une définition très englobante de la notion d'exemple : « We use 'example' to cover a broad range of mathematical genres, including examples of classes, examples illustrating concepts, worked examples demonstrating techniques, examples of problems and questions which can be resolved, examples of appropriate objects which satisfy certain conditions, examples of ways of answering questions, constructing proofs, and so on. » (Watson & Mason, 2002, p.378)

Dans ce texte, je m'intéresse aux exemples en tant qu'objets mathématiques subsumés par un concept. Cette perspective repose sur la distinction entre objet et concept au sens de Frege (1971). Lorsque nous parlons, nous ne parlons ni de nos représentations ni des mots, mais bien d'objets (la référence ou dénotation des noms d'objet) qui ne sont réductibles ni à une unité psychologique ni à une unité linguistique. Il faut donc distinguer entre le signe (suite de lettres, de son, schéma, etc.)⁷, notre représentation (unité psychologique), la référence (dénotation) et le sens du mot. Par exemple, les expressions arithmétiques $4 + 4$ et $10 - 2$ ont des sens différents mais dénotent bien le même objet. Dans un énoncé comme « 16 est un nombre pair », le rôle joué par le signe « 16 » est de dénoter un objet (le nombre 16) et le rôle joué par « nombre pair » est d'être un concept susceptible de subsumer différents objets. Dans le cas où l'objet tombe sous le concept, on dira qu'il en est un exemple : 16 est un exemple de nombre pair. L'introduction des exemples dans la pratique mathématique repose sur des processus d'instanciation de concept. Prenons l'implication universellement quantifiée suivante : *pour tout entier naturel n , si n est pair alors n^2 est pair*. Une instanciation visant à évaluer cette proposition universelle consiste à « se donner » un entier naturel particulier afin de voir s'il vérifie ou non l'implication ouverte *si n est pair alors n^2 est pair*. Un mathématicien « considérera » ici volontiers un exemple de nombre pair, disons le nombre 4, sans quoi l'implication matérielle obtenue (pour les distinctions entre les différentes notions d'implication, voir Durand-Guerrier, 2003) aurait son antécédent faux. Il lui resterait alors à tester si 16 est ou non un exemple de nombre pair. La perspective de cet article étant de se doter d'un outil de modélisation de l'activité de validation permettant de mieux saisir le rôle des exemples dans l'élaboration des démonstrations, il est important que l'outil en question permette de rendre compte de ces processus d'instanciation. Autrement dit, il est important qu'il permette d'aborder ce que recouvrent les verbes « se donner » et « considérer » dans les phrases précédentes.

Sur le plan logique, ce sont les logiques dites du premier ordre qui prennent en charge ces phénomènes d'instanciation. Ces logiques intègrent en effet une théorie de la quantification afin d'assurer un usage cohérent des notions de vérité, de généralité et de négation. La question de la généralité émerge de la distinction essentielle entre objet et concept lorsque l'on se pose la question d'attribuer une valeur de vérité à une expression du type $P(x)$ où P désigne un concept et x marque la place pour un objet pris dans un domaine d'interprétation donné. Une possibilité serait d'attribuer le vrai à $P(x)$ dans le cas où tous les objets du domaine d'interprétation considéré tombent sous le concept P . Il faudrait alors attribuer le faux dans le cas où ce ne serait pas le cas pour au moins un élément du domaine. Mais la difficulté porte alors sur l'attribution d'une valeur de vérité à la négation de $P(x)$: faut-il lui donner la valeur de vérité opposée à celle de $P(x)$ ou plutôt celle de $(\text{non-}P)(x)$? Ce dilemme montre la nécessité d'introduire dans la

⁷ Dans la pratique mathématique, le registre choisi pour les signes désignant les objets n'est pas nécessairement celui utilisé pour écrire formellement les preuves, ce qui peut générer des difficultés comme signalé plus haut.

syntaxe du langage utilisé des éléments permettant d'aborder la quantification des variables (par exemple $\forall$ et $\exists$ dans les notations actuelles), un langage dit du premier ordre, ainsi qu'une théorie prenant en charge les règles de manipulation de ces symboles (une théorie de la quantification) et faisant le lien avec les objets des domaines d'interprétation dans le cas d'une approche sémantique. Pour autant, si une théorie de la quantification est assurément une nécessité interne à une logique ayant fait sienne la distinction entre objet et concept, les recherches en didactique des mathématiques portant sur la validation ne font qu'exceptionnellement explicitement usage d'un tel cadre, les travaux de Durand-Guerrier faisant office d'exception confirmant la règle avec des références à la déduction naturelle de Copi et à la théorie des modèles de Tarski (Durand-Guerrier, 2008). Par exemple, si Weber et Alcock (2004, p.222) font effectivement mention de la logique du premier ordre comme système codifiant les manipulations envisageables dans les approches syntaxiques, ils ne mentionnent aucune règle d'inférence liée à la manipulation des quantificateurs et lettres de variable, et ne présentent pas de cadre de référence pour les processus d'instanciation d'objet conduisant à rendre disponibles les exemples dans le cadre d'une approche sémantique. Le tableau proposé par Alcock et Inglis (2008, p.117) confirme ce positionnement : les règles formelles qui sont explicitées relèvent du calcul propositionnel (*modus ponens* et *modus tollens*), c'est-à-dire qu'elles ne prennent pas en charge la distinction entre objet et concept, et relèvent toutes deux de la dimension syntaxique du raisonnement. Cet article entend donc discuter, d'un point de vue didactique, de la pertinence de recourir à un cadre théorique explicite pour rendre compte des processus d'instanciation dans la modélisation de l'activité de validation, dans l'objectif de mieux comprendre le rôle joué par les exemples dans l'élaboration des démonstrations. Plus précisément, la discussion portera sur la pertinence de recourir à un cadre théorique en particulier, celui des approches dialogiques de la logique. La seconde partie de ce texte est tout d'abord consacrée à une présentation rapide de ces approches. Les outils introduits sont ensuite utilisés pour contribuer à l'analyse d'un processus d'évaluation d'un énoncé d'arithmétique par un doctorant, ce processus ayant déjà été étudié par Alcock et Inglis (2008) mais sans référent théorique explicite pour les processus d'instanciation, à l'image des travaux dont j'ai rendu compte dans cette première partie. Je cherche alors à identifier les apports de la modélisation au regard des analyses qui ont été produites indépendamment de celle-ci.

2. Une modélisation dialogique pour le rôle des exemples

Hintikka distingue deux types de jeux dans les procédures de validation. Il les qualifie de *jeux d'intérieur* et de *jeux d'extérieur* : « Malgré ces liens, il est philosophiquement très important de les distinguer nettement l'un de l'autre. Les jeux sémantiques sont des jeux d'extérieur (outdoor games). On les joue sur les objets du langage que l'on parle, et ils consistent principalement pour les deux joueurs à choisir entre différents objets. À l'opposé, les jeux de preuve sont des jeux d'intérieur (indoor games). On les joue avec un crayon et du papier, avec une craie et un tableau, ou de nos jours avec un ordinateur. » (Hintikka, 2007, p.67)

Les jeux d'extérieur se caractérisent par des références externes au langage, par des choix d'objets au sein d'un domaine d'interprétation pour le « langage que l'on parle ». Le terme d'objet est ici à interpréter au sens de la distinction explicitée plus haut entre concept et objet. Dans la perspective de cet article, on pourrait aussi dire qu'il s'agit de choix d'exemples, dans la mesure où ces choix porteraient sur des objets tombant sous les concepts considérés. La sémantique selon la théorie des jeux de Hintikka propose un système de règles précisant les contextes dans lesquels ces choix peuvent être faits (Hintikka & Sandu, 1997). La quantification est au cœur de ses préoccupations théoriques ce qui en fait un bon candidat pour contribuer à l'analyse des difficultés des étudiants relativement aux énoncés comportant une quantification complexe (Barrier, 2011). Les jeux d'intérieur sont pour leur part des jeux formels, qui se jouent de manière interne au langage, les manipulations portent seulement sur la syntaxe du langage, et non sur la référence des noms d'objet. Ce sont des jeux de démonstration qui se préoccupent de la validité logique des propositions, à la manière d'une théorie de la démonstration, là où les jeux d'extérieur sont des jeux s'intéressant aux valeurs de vérité des propositions relativement à un

domaine d'interprétation (un modèle). La logique dialogique s'inscrit dans cette deuxième tradition focalisée sur la validité formelle. Dans cet article, j'utiliserai la description de cette approche proposée par Redmond et Fontaine (2011).

Il faut ici relever une variation entre les deux distinctions utilisées (jeu d'intérieur / jeu d'extérieur ci-dessus et approche syntaxique / approche sémantique dans la première partie). Dans le cadre d'une approche sémantique, les instanciations d'objets jouent un rôle heuristique pour un jeu d'intérieur, un jeu de démonstration. Les perspectives de la vérité et de la validité logique sont toutes deux intégrées au sein d'une même notion englobante. Les jeux d'extérieur, pour leur part, ne sont pas des jeux de démonstration mais des jeux de vérification et de falsification des propositions. S'intéresser au rôle des exemples dans l'émergence des stratégies de démonstration, s'intéresser aux approches sémantiques, revient donc à s'intéresser à l'articulation entre les jeux d'extérieur portant sur les objets et les jeux d'intérieur au sein desquels s'expriment les stratégies de démonstration. D'un point de vue logique, il existe un lien entre ces deux types de jeux puisqu'une autre possibilité pour caractériser la notion de validité consiste à la définir comme « vérité générale », c'est-à-dire comme vérité pour toutes les interprétations (les deux notions coïncidant pour les systèmes de déduction dits complets). On trouvera une étude logique et philosophique, d'un point de vue dialogique, de cette correspondance dans Rahman et Tulenheimo (2006). Pour construire une stratégie de démonstration au sein d'un jeu d'intérieur à partir de jeux d'extérieur, l'idée générale consiste à spécifier les informations relatives aux objets du domaine d'interprétation grâce aux ressources propres du langage dans le registre sémiotique du jeu d'intérieur⁸. D'un point de vue didactique, ce qui est particulièrement intéressant est le fait que le contexte dialogique est susceptible d'offrir un contexte théorique à même d'accueillir les deux points de vue des jeux d'intérieur (validité logique) et d'extérieur (vérité dans un domaine d'interprétation) moyennant des variations sur certaines règles des jeux de validation, les autres restant inchangées (Rückert, 2011). Ceci en fait un bon candidat pour contribuer à penser la contribution des exemples à l'élaboration des démonstrations. Ces aspects sont développés dans la section qui vient.

■ *Les modélisations dialogiques*

Dans certains travaux de didactique, le langage de la logique du premier ordre est parfois utilisé comme langage de référence avec comme finalité l'étude du langage des mathématiciens (Mesnil, 2014 ; Hache, 2015). La logique du premier ordre (son langage) sert alors de structure pour reformuler les énoncés permettant ainsi de caractériser certaines manières de dire ou encore d'identifier certaines ambiguïtés quant à leur signification. Le terme signification est ici à comprendre dans une perspective « descriptive », on s'intéresse à ce que dit l'énoncé des objets dont il parle, leurs propriétés, les relations qu'ils entretiennent. Les approches dialogiques de la logique du premier ordre visent pour leur part à offrir une structure pour rendre compte de l'usage des énoncés dans le contexte d'un raisonnement. La perspective portée sur le langage est pragmatique et située, les énoncés sont appréhendés en relation étroite avec le jeu de langage dans lequel ils s'insèrent. Elle bénéficie des dimensions systémique et téléologique des modélisations s'appuyant sur le concept de jeu (Sensevy, 2012). Considérons l'énoncé suivant dont je me resservirai par la suite : « Quel que soit l'entier naturel n , si n s'écrit sous la forme $n = 2k+1$ avec k entier alors n est un entier impair » (α)

Plusieurs formulations logiquement équivalentes peuvent contribuer à l'analyse de cet énoncé, notamment les deux suivantes (les variables n et k étant astreintes à l'ensemble des entiers) :

$$\forall n \forall k (n = 2k+1 \rightarrow n \text{ est impair}) \text{ (}\beta\text{)} \text{ et } \forall n [(\exists k / n = 2k+1) \rightarrow n \text{ est impair}] \text{ (}\gamma\text{)}$$

Ce niveau d'analyse pourrait inciter à penser que la quantification liée à la lettre k dans l'énoncé (α) est incertaine ou vague puisque les énoncés (β) et (γ) utilisent deux quantifications différentes

⁸ La preuve que Rahman et Tulenheimo proposent est constructive mais la perspective logique reposant sur une hypothèse d'omniscience des joueurs, supposés maîtriser parfaitement les informations relatives aux objets du domaine d'interprétation (sous forme de valeur de vérité des propositions les concernant ou sous forme d'un équivalent formel), elle n'éclaire pas beaucoup l'analyse didactique, si ce n'est à un niveau très général.

pour cette même lettre. Je propose maintenant de prendre en considération un potentiel contexte d'énonciation pour (α) . Supposons par exemple que l'on souhaite utiliser (α) pour montrer que le nombre 17 est un entier impair : il suffit que je trouve un entier k tel que $17 = 2k+1$ pour que je puisse affirmer que 17 est impair. D'un point de vue pragmatique, il semble donc que l'usage de la lettre k soit bien univoque. La modélisation dialogique va permettre de préciser cela.

Il m'est ici impossible de présenter de manière vraiment précise les approches dialogiques en logique. Le « manuel » de Redmond et Fontaine (2011) propose une introduction efficace pour se familiariser avec l'approche formelle (jeux d'intérieur) de la logique dialogique. Pour ma part, je vais présenter de manière générale les approches dialogiques de la validation tout en signalant au fil de l'eau les points sur lesquels les jeux d'intérieur et d'extérieur se distinguent (quitte à perdre un peu plus en précision et en rigueur). Les tableaux de modélisation s'inspireront néanmoins du formalisme de cet ouvrage.

Dans les approches dialogiques, la validation d'une proposition prend la forme d'un dialogue opposant deux joueurs selon un ensemble de règles du jeu. Le joueur qui propose l'énoncé à valider est appelé Proposant, son adversaire est l'Opposant. Certaines règles associées aux constantes logiques régissent le déroulement pas-à-pas du dialogue dans le respect d'autres règles plus globales qui sont appelées règles structurelles. Chaque joueur réalise chacun à son tour une action : une assertion, une question, un choix de lettre (jeu d'intérieur) ou un choix d'objet de la structure d'interprétation (jeu d'extérieur). Le jeu commence par l'assertion de la thèse, il se termine après un nombre fini de coups par la victoire de l'un des deux joueurs. Une proposition sera dite logiquement valide (jeu d'intérieur) ou vraie relativement à une interprétation dans un modèle (jeu d'extérieur) s'il existe une stratégie gagnante pour le Proposant dans le dialogue qui l'oppose à l'Opposant.

- *Règles pour les constantes logiques*

R-ET: Lorsqu'un énoncé de la forme $A \wedge B$ est en jeu, une attaque consiste à choisir l'un des deux membres de la conjonction, une défense consiste à faire l'assertion du membre choisi par l'attaquant.

R-OU : Lorsqu'un énoncé de la forme $A \vee B$ est en jeu, une attaque consiste à demander à son adversaire de choisir l'un des deux membres de la disjonction, une défense consiste à choisir ce membre et à en faire l'assertion.

R-IMPLIQUE : Lorsqu'un énoncé de la forme $A \rightarrow B$ est en jeu, une attaque consiste à faire l'assertion A , une défense à faire l'assertion B . Dans le cas d'un jeu d'extérieur, faire l'assertion A conduit à l'ouverture d'un sous-jeu qui doit être gagné par celui qui fait l'assertion.

R-NON : Lorsqu'un énoncé de la forme $\neg A$ est en jeu, une attaque consiste à faire l'assertion de A , et il n'y a pas de défense possible.

R-UNIV : Lorsqu'un énoncé de la forme $\forall x P(x)$ est en jeu, une attaque consiste à choisir un symbole a (jeu d'intérieur) ou un objet noté a du domaine d'interprétation (jeu d'extérieur), une défense consiste à faire l'assertion $P(a)$.

R-EXIST : Lorsqu'un énoncé de la forme $\exists x P(x)$ est en jeu, une attaque consiste à demander à son adversaire de choisir un symbole (jeu d'intérieur) ou un objet du domaine d'interprétation (jeu d'extérieur), une défense consiste à réaliser ce choix d'un certain a (symbole ou objet selon les cas) et à faire l'assertion de $P(a)$.

- *Règles structurelles*

R-Lancement du jeu : Le jeu commence par l'assertion par le Proposant de la proposition qui fait l'objet de la validation. Les joueurs jouent ensuite chacun à leur tour.

R-Fin de partie :

- Cas des jeux d'intérieur : Le jeu se termine lorsqu'un joueur ne peut plus produire de coup, l'autre joueur a gagné la partie.

- Cas des jeux d'extérieur : Le jeu se termine lorsqu'un joueur fait l'assertion d'une proposition atomique $P(a)$ (c'est-à-dire élémentaire, ne comportant plus de constantes logiques)⁹. Cette proposition est conjointement évaluée. Si a est un exemple de P alors ce joueur gagne la partie.
 R-Jeu formel (seulement pour les jeux d'intérieur) : Le Proposant ne peut pas faire l'assertion de proposition atomique, à moins que la proposition ait été préalablement avancée par l'Opposant.
 R-Classique : Chaque joueur peut soit attaquer toute assertion (non élémentaire) faite par son adversaire, soit se défendre contre toute attaque de son adversaire.

Remarques :

1) Le choix opéré ici concernant la version relative aux jeux d'extérieur de *R-Fin de partie* est emprunté à Vernant (2011). Cette règle donne la possibilité aux joueurs de prendre des informations sur les objets qu'ils manipulent en cours de partie, ce qui ne peut pas être le cas dans une perspective de logique « fondationnelle » (le domaine d'interprétation est supposé déjà parfaitement connu des joueurs). Le point de vue pragmatique de Vernant est mieux adapté à nos préoccupations didactiques dans la mesure où il autorise l'enrichissement du milieu en cours de validation (Barrier, 2008).

2) *R-jeu formel* garantit le caractère formel du jeu. Concrètement, cette règle signifie qu'il n'est pas possible d'affirmer un énoncé élémentaire à moins que celui-ci ne soit une hypothèse (on peut voir les assertions de l'Opposant comme des hypothèses pour le Proposant).

3) Weber et Alcock (2004) caractérisent une démarche sémantique d'élaboration d'une démonstration par le recours à des instanciations d'objet (*cf.* première partie). La notion d'instanciation est alors une notion psychologique, il s'agit selon la définition citée en début d'article d'une manière reproductible et significative pour un individu de penser à un objet mathématique auquel la conjecture s'applique. Les règles décrites ci-dessus permettent de formuler une caractérisation logique de la notion. Une instanciation est conçue comme une application par l'un des joueurs de l'une des règles R-UNIV ou R-EXIST, une instanciation d'objet comme l'application de l'une de ces règles dans le contexte d'un jeu d'extérieur.

- *Retour à l'exemple*

Je retourne ici à l'exemple introduit plus haut concernant les nombres impairs. Il s'agit de donner une première illustration des règles précédentes tout en montrant en quoi l'analyse dialogique permet de préciser les questions de quantifications relatives à l'énoncé (α). Imaginons que pour valider logiquement un énoncé quelconque (E), le Proposant ait besoin de recourir à l'énoncé « 17 est impair » sous les hypothèses (α) et « $17=2*8+1$ » considérées comme concessions initiales de l'Opposant. Le jeu d'intérieur de validation prendrait alors l'une des formes suivantes selon que la proposition (α) est interprétée sous la forme (β) ou (γ) :

- forme (β)

Opposant		Proposant	
-2	$\forall n \forall k (n = 2k+1 \rightarrow n \text{ est impair})$		
-1	$17 = 2*8+1$		
	[...]	E	0
	[...]	[...]	
n+1	$\forall k (17 = 2k+1 \rightarrow 17 \text{ est impair})$	-2	$?-\forall [17]$ n
n+3	$17 = 2*8+1 \rightarrow 17 \text{ est impair}$	n+1	$?-\forall [8]$ n+2
n+5	17 est impair	n+3	$17 = 2*8+1$ n+4
	[...]	[...]	

Commentaires de lecture : dans ce tableau, comme dans ceux qui suivent, les nombres figurant dans les deux colonnes extérieures rendent compte de la chronologie des coups qui sont joués. En cas d'attaque, les énoncés (les coups) qui sont visés sont signalés dans l'une des deux

⁹ P peut tout aussi bien être une relation à n arguments. Dans ce cas a désigne un n -uplet.

colonnes centrales (celle du côté de l'attaque). Une défense figure sur la même ligne que l'attaque à laquelle elle répond. La case de la colonne centrale côté défense reste alors vide. Les coups -1 et -2 sont des concessions initiales de l'Opposant : ils représentent les hypothèses à partir desquelles le Proposant peut travailler. Après avoir avancé sa thèse (E) au coup n°0 (R-Lancement de jeu) et, après un début de dialogue portant sur E ([...]), le Proposant souhaite pouvoir utiliser l'assertion « 17 est impair ». Il commence alors à attaquer l'hypothèse -2 lors de son n -ième coup en faisant le choix du symbole 17 (R-UNIV)¹⁰. L'Opposant se défend par le coup $n+1$ (R-UNIV). Le Proposant poursuit en attaquant cette défense $n+1$ au coup $n+2$ avec le symbole 8 (R-UNIV) et l'Opposant se défend (coup $n+3$, R-UNIV). Le Proposant attaque à nouveau la défense de l'Opposant (coup $n+4$, R-IMPLIQUE, R-Jeu formel). Le coup $n+5$ est une défense de l'Opposant face à cette nouvelle attaque (R-IMPLIQUE). Celui-ci concède l'énoncé « 17 est impair » qui est dorénavant susceptible d'être utilisé par le Proposant (R-Jeu formel). L'argumentation peut alors se poursuivre ([...]).

- forme (γ)

Opposant		Proposant	
-2	$\forall n [(\exists k / n = 2k+1) \rightarrow n \text{ est impair}]$		
-1	$17 = 2*8+1$		
		E	0
	[...]	[...]	
$n+1$	$(\exists k / 17 = 2k+1) \rightarrow 17 \text{ est impair}$	-2	$?-\forall [17]$ n
$n+5$	17 est impair	$n+1$	$\exists k / 17 = 2k+1$ $n+2$
$n+3$	$?-\exists$ $n+2$		$17 = 2*8+1 [8]$ $n+4$
	[...]		[...]

Commentaires de lecture : le début du jeu est identique au précédent moyennant une variation dans la concession initiale -2. Le n -ième coup est une attaque par le Proposant de la concession initiale -2. C'est le Proposant qui choisit le symbole 17 (R-UNIV). L'Opposant se défend en $n+1$ (R-UNIV). En $n+2$, le Proposant attaque le coup $n+1$ de l'Opposant (R-IMPLIQUE). Plutôt que de répondre tout de suite et de concéder l'énoncé « 17 est impair », l'Opposant (contre-)attaque le coup $n+2$ en sollicitant le choix d'un symbole (coup $n+3$, R-IMPLIQUE, R-Classique). Le Proposant se défend : il choisit 8 (coup $n+4$, R-EXIST, R-Jeu formel). Au coup suivant, l'Opposant n'a plus d'autre choix que de se défendre de l'attaque du Proposant qui était resté en suspens (coup $n+2$), il concède l'énoncé « 17 est impair » (coup $n+5$, R-IMPLIQUE) qui pourra alors être utilisé par son adversaire (R-Jeu formel).

Je vais maintenant m'intéresser à la dimension stratégique de ces deux extraits de jeu d'intérieur relativement à la quantification exercée sur la lettre k . Cette dimension s'analyse en observant quels symboles ont été choisis, par qui et dans quel ordre. En l'occurrence, les choix des mêmes symboles ont dans les deux cas été faits par le même joueur (le Proposant). Du point de vue de la dimension stratégique du jeu, c'est-à-dire celle qui est liée à la notion de validité logique, le fait qu'il y ait trois coups intercalés ($n+1$, $n+2$ et $n+3$) entre ces choix dans le tableau associé à la forme (γ) alors qu'il n'y en a qu'un seul ($n+1$) dans l'autre tableau n'est pas significatif puisque le choix du symbole 8 est avant tout lié à l'hypothèse -1 (R-Jeu formel). La modélisation dialogique permet donc d'analyser en quoi le fait qu'il y ait deux traductions possibles dans le langage de la logique du premier ordre ne remet pas en cause le caractère univoque de la signification stratégique de la proposition (α). Ceci m'amène à clarifier le point de vue porté sur le langage dans ce texte. Lorsque j'évoque ci-dessus le langage de la logique du premier ordre, il faut comprendre le terme langage dans son acception logique, c'est-à-dire comme recouvrant l'ensemble des formules qu'il est possible de construire à partir de l'alphabet de la logique du

¹⁰ La modélisation comme un jeu d'intérieur conduit à regarder $17 = 2*8+1$ comme un énoncé ayant fonction d'hypothèse reprise par le Proposant en $n+4$ (R-jeu formel) plutôt que comme un fait qui serait établi en cours de partie par une évaluation conjointe (R-Fin de partie, jeu d'extérieur). Dans ce contexte, 17 fonctionne comme un symbole plutôt que comme un signe dénotant un objet.

premier ordre (symboles de prédicat, lettres de variable, noms d'objet, symboles de fonction, connecteurs et quantificateurs). Dans ce texte, ma posture consiste à chercher à analyser les énoncés non pas (ou pas seulement) en cherchant à les reformuler dans ce langage des prédicats, au sens logique donc, mais en situant ces énoncés au sein des pratiques langagières qui leur servent d'arrière-plan, en les identifiant à des coups dans des jeux de langage de validation. Les règles des approches dialogiques peuvent être perçues comme une contribution à la description de la grammaire de ces jeux de validation. Il est important de repérer que ces jeux de langage ne sont pas purement « linguistiques » au sens où ils consisteraient en une manipulation de symboles de l'alphabet de la logique du premier ordre (le langage au sens logique). Ils peuvent mettre en jeu des objets d'un domaine d'interprétation, des exemples liés à l'instanciation des concepts. Les jeux d'extérieur rendent compte de cette possibilité.

■ Exemple d'usage

Je propose ici un exemple d'usage de l'approche dialogique précédemment décrite. Les données sont empruntées à Alcock et Inglis (2008). Je m'intéresse à l'élaboration d'une preuve d'un énoncé d'arithmétique par un doctorant en mathématiques appelé Chris. Les objets en jeu sont élémentaires puisqu'il s'agit de nombres entiers naturels non nuls, et les concepts relativement simples. Le fait d'utiliser des données déjà analysées a pour objectif de faciliter la discussion concernant les apports de la modélisation dialogique. La conjecture est la suivante : « Pour tous entiers naturels non nul n et k , si n est parfait, alors $k*n$ est abondant ». Un entier naturel non nul n est dit parfait si la somme de ses diviseurs vaut $2n$, il est dit abondant si cette somme vaut strictement plus que $2n$. L'ensemble des diviseurs de 6 étant $\{1, 2, 3, 6\}$, 6 est un exemple de nombre parfait. L'ensemble des diviseurs de 12 étant $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, 12 est un nombre abondant. Cette conjecture est vraie dès lors que $k > 1$. Voici ci-dessous la manière dont Alcock et Inglis (2008, p.123) rendent compte du travail de Chris.

« Chris commented that the conjecture “seems reasonable” and began this time with a syntactic approach, introducing general notation for the divisors of n and, like David, explaining that,

C: ... summing the elements of this set [the divisors of kn] is going to give you k times er , this sum here [the sum of the divisors of n]. I'm including 1 and n in this set, and we know that the divisors add up to $2n$. So this is $2kn$. So that shows that if I can find just one more divisor of kn , then we're done, and it shows that kn is abundant. [...] So if k were...let's assume k is bigger than 1, so then k itself is a divisor so we're done. [...] Oh, so, of course, k could be equal to one of these [the divisors of n]. So if k did not divide n If the highest common factor of k and n were 1 and k was not equal to 1, then we'd be done I think.

Asked by the interviewer whether this meant that k was a “spare divisor,” he tentatively agreed, and then used an example to further develop his understanding.

C: Yeah, yes. Umm, if, let's see, if k were 2. And 2 appeared in here [...] yeah there is still going to be a spare divisor here I think. So why is that? Umm, [long pause] so 6 was an example of a perfect number. If we had 2 or 3 in this set, 2 and 3, or rather 1, 2, 3 and 6 would be the divisors of 6. Now if I multiply this up by any number, I'm still going to get a strictly larger set of numbers although, I'll try and write down a proof.

I: So you're going to multiply that up by k ?

C: Yeah, so if k were 2 then the divisors will be 1, 2...oh dear, what am I doing? Multiplying by 2. Yes, so you'd get the 1, 2, 4, 6, 12, is a strictly larger set.

Asked about where the 1 came from, he summarised his argument (using configurations from the representation system of proof) and adjusted it appropriately:

C: My argument was multiplying each of these up by k sums to $2kn$, but 1 is not included in the set unless k is 1. So this is true for k greater than 1. Um, if k were equal to 1 then it's going to be perfect because you're left with the same number. »

- *Approche par un jeu d'extérieur*

Je commence ici par me doter d'un outil pour rendre compte des aspects sémantiques du travail de Chris en proposant une modélisation sous forme de jeu d'extérieur. Le domaine d'interprétation pour l'énoncé est l'ensemble des entiers naturels non nuls.

<i>Opposant</i>			<i>Proposant</i>	
			$\forall n \forall k (n \text{ est parfait} \rightarrow kn \text{ est abondant})$	0
1	?- $\forall$ [6]	0	$\forall k (6 \text{ est parfait} \rightarrow 6k \text{ est abondant})$	2
3	?- $\forall$ [2]	2	6 est parfait $\rightarrow 2*6$ est abondant	4
5	6 est parfait [évaluation : ok]	4	$2*6$ est abondant [évaluation : ok]	6

Commentaires de lecture : au coup 0, le Proposant avance la thèse qu'il souhaite défendre, c'est-à-dire la conjecture qui est évaluée (R-Lancement de jeu). L'Opposant attaque cette thèse en faisant le choix du nombre 6 (coup n°1, R-UNIV). Le Proposant se défend (coup n°2, R-UNIV). L'Opposant continue ensuite d'attaquer en faisant le choix du nombre 2 et le Proposant se défend (coups n°3 et n°4, R-UNIV). L'énoncé en jeu est alors une implication matérielle (Durand-Guerrier, 2003). L'Opposant attaque le coup n°4 en faisant l'assertion de l'antécédent de l'implication (6 est parfait), ce qui ouvre un sous-jeu qu'il doit gagner (R-IMPLIQUE). Une évaluation conjointe de la proposition atomique montre que 6 est bien un exemple de nombre parfait. L'Opposant gagne le sous-jeu (R-Fin de partie). Ceci justifie *a posteriori* le choix d'objet effectué par l'Opposant au coup n°1. Le Proposant propose alors une défense, laquelle consiste à faire l'assertion du conséquent de l'implication, à savoir que $2*6$ est abondant (coup n°6, R-IMPLIQUE). Une évaluation conjointe montre que l'assertion rend compte d'un fait, le Proposant gagne la partie (R-Fin de partie). Pour autant, ses choix ne constituent pas une stratégie gagnante dans la mesure où le résultat de l'évaluation conjointe au coup n°6 dépend *a priori* des choix d'objet réalisés par l'Opposant aux coups n°1 et n°3. D'ailleurs, la conjecture est fausse pour le cas $k = 1$.

- *Approche par un jeu d'intérieur*

Je me donne maintenant un outil pour rendre compte des aspects du travail de Chris en lien avec un jeu d'intérieur. Cette fois, le domaine d'interprétation ne joue plus de rôle sur le plan logique. Ceci amène à amender la conjecture en introduisant la condition $k > 1$. Formulée ainsi, elle est une conséquence logique des hypothèses utilisées.

<i>Opposant</i>			<i>Proposant</i>	
-4	$\forall n (n \text{ est parfait} \rightarrow \sum d_n = 2n)$ [les d_n étant les diviseurs de n]			
-3	$\forall n (\sum d_n > 2n \rightarrow n \text{ est abondant})$ [les d_n étant les diviseurs de n]			
-2	$\forall m \forall n \forall l (m = n \rightarrow l*m = l*n)$			
-1	$\forall n \forall k [(\sum k*d_n = 2k*n \wedge k > 1) \rightarrow \sum d_{kn} > 2k*n]$			
			$\forall n \forall k [(n \text{ est parfait} \wedge k > 1) \rightarrow k*n \text{ est abondant}]$	0
1	?- $\forall$ [a]	0	$\forall k [(a \text{ est parfait} \wedge k > 1) \rightarrow k*a \text{ est abondant}]$	2
3	?- $\forall$ [b]	2	$(a \text{ est parfait} \wedge b > 1) \rightarrow b*a \text{ est abondant}$	4
5	$a \text{ est parfait} \wedge b > 1$	4	$b*a \text{ est abondant}$	30
7	$a \text{ est parfait}$		5 ? $\wedge (1)$	6

9	$b > 1$	5	$? \wedge (2)$	8
11	$a \text{ est parfait} \rightarrow \sum d_a = 2a$	-4	$?-\forall [a]$	10
13	$\sum d_a = 2a$	11	$a \text{ est parfait}$	12
15	$\sum d_a = 2a \rightarrow b^*(\sum d_a) = b^*2a$	-2	$???-\forall [\sum d_a; 2a; b]$	14
17	$b^*(\sum d_a) = b^*2a$	15	$\sum d_a = 2a$	16
19	$(\sum b^*d_a = 2b^*a \wedge b > 1) \rightarrow \sum d_{ba} > 2b^*a$	-1	$??-\forall [a; b]$	18
25	$\sum d_{ba} > 2b^*a$	19	$\sum b^*d_a = 2b^*a \wedge k > 1$	20
21	$? \wedge (1)$	20	$\sum b^*d_a = 2b^*a$	22
23	$? \wedge (2)$	20	$b > 1$	24
27	$\sum d_{ba} > 2b^*a \rightarrow b^*a \text{ est abondant}$	-3	$?-\forall [b^*a]$	26
29	$b^*a \text{ est abondant}$	27	$\sum d_{ba} > 2b^*a$	28

Commentaires de lecture : les quatre coups négatifs sont les hypothèses que le Proposant va pouvoir exploiter dans la partie. Les deux premières rendent compte des définitions des concepts de nombre parfait et de nombre abondant (coups n°-4 et n°-3). Le coup n°-2 explicite une règle de calcul à la base d'un lien entre la somme des diviseurs de n et la somme des diviseurs de k^*n . L'hypothèse n°-1 rend compte de l'argument central de la preuve : dès lors que $k > 1$, 1 est un diviseur de k^*n qui n'est un multiple par k d'aucun diviseur de n , si bien que si la somme des multiples par k des diviseurs de n (qui sont des diviseurs de k^*n) vaut $2k^*n$ alors la somme des diviseurs de k^*n est strictement plus grande que $2k^*n$. Le Proposant ouvre le jeu avec la conjecture à valider (coup n°0, R-Lancement de partie). L'Opposant attaque cette thèse en introduisant la lettre de variable a , puis la lettre b (coups n°1 et n°3, R-UNIV). Le Proposant se défend (coups n°2 et n°4, R-UNIV), ce qui revient à éliminer les quantificateurs. L'Opposant attaque le dernier coup du Proposant en soutenant l'antécédent de l'implication (coup n°5, R-IMPLIQUE). Le Proposant ne peut pas se défendre dans l'immédiat par l'assertion du conséquent, la proposition atomique en jeu n'ayant pas préalablement été concédée par l'Opposant (R-Jeu formel). Par la suite, les coups successifs du Proposant peuvent être interprétés comme ayant pour finalité l'obtention de cette concession, à partir des hypothèses (les coups négatifs). Le Proposant commence par (contre-)attaquer en attaquant successivement les deux membres de la conjonction qui vient d'être avancée par l'Opposant (coups n°6 et n°8, R-ET, R-Classique). L'Opposant se défend en concédant deux propositions atomiques (coups n°7 et n°9, R-ET). Le Proposant dispose maintenant de nouvelles ressources pour exploiter les hypothèses (R-Jeu formel). Il commence par attaquer l'hypothèse n°-4 (coup n°10, R-UNIV, R-Classique) en reprenant à son compte le symbole introduit au coup n°1 par l'Opposant. L'Opposant propose une défense (coup n°11, R-UNIV) qui est de suite attaquée par le Proposant (coup n°12, R-IMPLIQUE, R-Jeu formel). L'Opposant se défend à nouveau (coup n°13, R-IMPLIQUE), ce qui rend disponible une nouvelle proposition atomique (R-Jeu formel). Le Proposant poursuit ses attaques en visant cette fois l'hypothèse n°-2 et en reprenant à son compte les choix de lettres de variable de l'Opposant (coup « triple » n°14, R-UNIV). L'Opposant se défend (coup n°15, R-UNIV) puis le Proposant attaque cette défense (coup n°16, R-IMPLIQUE, R-Jeu formel). L'Opposant concède une nouvelle proposition atomique (coup n°17, R-IMPLIQUE). Le Proposant dispose maintenant des éléments pour exploiter l'hypothèse -1, c'est-à-dire qu'il est en mesure de faire l'assertion des deux conditions figurant dans l'antécédent de cette implication. Il attaque donc cette hypothèse en faisant un choix opportun de lettres de variable (coup « double » n°18, R-UNIV). L'Opposant se défend en faisant l'assertion d'une implication (coup n°19, R-UNIV) que le Proposant attaque en affirmant l'antécédent qui est une conjonction (coup n°20, R-UNIV). L'Opposant remet à plus tard sa défense et contre-attaque en demandant au Proposant de prendre en charge chacun des membres de la conjonction (coups n°21 et n°23, R-ET, R-Classique), ce qu'il fait (coups n°22 et n°24, R-ET, R-Jeu formel). On pourra remarquer que la proposition atomique concédée par l'Opposant au coup n°17 n'est pas formellement identique à celle du coup n°22, alors qu'il s'agit d'une des conditions de possibilité de ce coup (R-Jeu formel). Nous ferons néanmoins comme si ces propositions atomiques étaient identiques afin de ne pas avoir à intégrer à la modélisation de nouvelles règles

formelles justifiant de cette identité (distributivité et commutativité). Ceci complexifierait inutilement le tableau ci-dessus. L'Opposant poursuit en se défendant d'une attaque restée en suspens, le coup n°20 du Proposant (coup n°25, R-IMPLIQUE, R-Classique). Cette nouvelle concession permet au Proposant d'envisager d'attaquer l'hypothèse n°-3, c'est-à-dire de s'appuyer sur la définition du concept de nombre abondant. Il le fait en reprenant à son compte les lettres de variable mises en jeu par l'Opposant au début de la partie (coup « double » n° 26, R-UNIV). L'Opposant fait la défense attendue en faisant l'assertion d'une implication (coup n°27, R-UNIV) que le Proposant attaque (coup n°28, R-IMPLIQUE, R-Jeu formel). L'Opposant concède alors une nouvelle proposition atomique (coup n°29, R-IMPLIQUE) laquelle permet au Proposant de revenir sur une défense laissée en suspens en début de partie (coup n°30, R-IMPLIQUE, R-Jeu formel, R-Classique). L'Opposant n'a plus de coup à jouer, il perd la partie (R-fin de partie). Les choix du Proposant constituent ici une stratégie gagnante : la conjecture est formellement valide sous les hypothèses considérées, elle est une conséquence logique de ces hypothèses.

- *Analyse*

Un premier niveau d'analyse de l'extrait présenté par Alcock et Inglis (2008) permet de dégager trois temps dans le travail de Chris. Chris paraît commencer par une approche syntaxique au cours de laquelle il convoque les définitions des concepts de nombres parfait et abondant, procède à quelques manipulations algébriques en vue de comparer les diviseurs de n et de kn mais ne parvient pas à conclure. Il s'engage ensuite dans un jeu d'extérieur, en appui sur l'exemple de nombre parfait 6 et l'exemple de nombre abondant 12. Ceci lui permet de compléter son argument syntaxique initial en identifiant que 1 est un diviseur de 12 qui ne peut être obtenu comme multiple non trivial d'un diviseur de 6. Voici la manière dont Alcock et Inglis (2008, p.123) explicitent cette observation :

« Chris also began with syntactic manipulations but broke off from this approach and used a specific example (with $k=2$ and $n=6$) to increase his conviction in his general argument, obtaining a new insight as he did so and incorporating this into his final general statement, phrased (and later written) using the representation system of proof. That is, Chris used a semantic strategy to support the production of a syntactic product. »

Je vais maintenant m'appuyer sur les tableaux ci-dessus pour poursuivre l'analyse. Si l'on rapproche le premier temps du travail syntaxique de Chris de la modélisation de la démonstration par un jeu d'intérieur, on peut observer que ce travail repose sur le recours formel aux définitions des concepts en jeu (hypothèses -4 et -3) et à des manipulations algébriques (l'hypothèse -2 par exemple). Certains composants syntaxiques font néanmoins défaut en vue de l'élaboration d'une démonstration, je les ai regroupés dans les hypothèses -1 : dès lors que $k > 1$, 1 est un diviseur de $k*n$ qui n'est un multiple par k d'aucun diviseur de n , si bien que si la somme des multiples par k des diviseurs de n (qui sont des diviseurs de $k*n$) vaut $2k*n$ alors la somme des diviseurs de $k*n$ est strictement plus grande que $2k*n$.

Sur le plan du jeu d'extérieur, les hypothèses de ce jeu d'intérieur ne sont plus appréhendées du point de vue de leur seule forme syntaxique mais plutôt du point de vue de leur contribution aux évaluations conjointes des propositions atomiques (coups n°5 et n°6). Ces évaluations permettent au Proposant de gagner la partie considérée. Cette victoire ne constitue néanmoins pas en elle-même une stratégie gagnante dans la mesure où les résultats des évaluations conjointes dépendent *a priori* des objets particuliers qu'elles considèrent. La distinction entre le niveau de la partie et celui de la stratégie permet de thématiser la question de la généricité des procédures d'évaluation conjointe des propositions atomiques. Du point de vue dialogique et sémantique, ce ne sont pas tant les exemples qui sont susceptibles d'être qualifiés de *génériques* mais plutôt les procédures d'évaluation des propositions atomiques qui portent sur les objets choisis en cours de partie. La transition vers les jeux d'intérieur consiste alors à convertir les aspects génériques de ces procédures d'évaluation sous la forme d'hypothèses dans le registre syntaxique du jeu d'intérieur (hypothèses modélisées comme des concessions initiales de l'Opposant).

Approfondissons un peu l'analyse. Dans le cas d'un jeu d'extérieur, une partie est porteuse de généralité dans le cas où la stratégie utilisée est « réutilisable » pour d'autres exemples, c'est-à-dire dans les termes du modèle dialogique pour d'autres choix d'objet de la part de l'Opposant¹¹. Une stratégie a d'autant plus de chances d'être réutilisable qu'elle est élaborée face à un Opposant qui joue bien, qui est lui-même stratégique dans ses choix en faisant en sorte de rendre autant que possible inopérantes les stratégies utilisées par le Proposant au cours des parties précédentes. Proposant et Opposant étant des positions dans le dialogue de validation qui peuvent toutes deux servir à analyser le comportement d'un même sujet, on retrouve l'idée de ne pas « se faire de cadeau » qui est associée à la notion d'expérience cruciale de Balacheff (1987). Ce n'est néanmoins pas la direction empruntée par Chris dans l'extrait analysé puisque celui-ci élabore sa preuve à partir d'un unique exemple de couple d'entiers. Pour la conjecture en jeu, l'essentiel de la liberté stratégique laissée au Proposant au cours de parties du jeu d'extérieur repose sur la manière de procéder aux évaluations conjointes. Considérons une première manière de procéder pour les exemples utilisés par Chris ($k=2$ et $n=6$) : il est possible de rechercher les diviseurs de 6 et de 12 puis d'additionner respectivement les diviseurs de chacun des deux nombres avant de conclure. Mais cette stratégie n'est pas réutilisable dans le sens où la recherche des diviseurs de 12 dépend des propriétés particulières de ce nombre. Rien ne garantit *a priori*, en cas de nouvelles parties avec de nouveaux choix d'objet par l'Opposant, que l'issue soit la même si le Proposant recourt au même procédé. Dans la perspective d'un gain de généralité, un levier pour le Proposant peut être de rechercher parmi les diviseurs de 12 ceux dont la présence peut être mise en rapport avec les diviseurs de 6 et la première évaluation positive (6 est un nombre parfait). Plus précisément, il lui faut chercher à élaborer une procédure pour la deuxième évaluation qui lui assure de gagner et qui ne dépende que du caractère positif de la première évaluation¹², et non du caractère particulier des nombres en jeu. C'est ce que Chris semble faire lorsqu'il considère les seuls diviseurs 1, 2, 4, 6 et 12 du nombre 12¹³. Les diviseurs 2, 4, 6 et 12 sont des multiples par k des diviseurs de n , ce sont des diviseurs de kn dont la somme vaut $2kn$ (première évaluation positive). Le diviseur 1 est un diviseur supplémentaire dès lors que $k > 1$ ce qui permet de s'assurer que l'évaluation sera positive. Chris dispose alors des éléments nécessaires pour formuler un argument dans le cadre d'un jeu d'intérieur.

Mais comment expliquer que le travail sémantique puisse être réinvesti au sein du jeu d'intérieur ? Au-delà des difficultés inhérentes liées aux changements de registres (les signes utilisés dans les jeux d'extérieur comportent ici des noms d'objet alors que les jeux d'intérieur mobilisent des symboles, dont des lettres de variable), il est important de souligner que cette transition est possible du fait d'une certaine proximité structurelle entre les jeux d'intérieur et d'extérieur. J'ai fait plus haut le choix d'une présentation commune de ces jeux avec pour finalité de rendre visible leur similitude : les différences sont constituées de variations au sein d'une structure commune. L'approche dialogique est en effet un cadre théorique au sein duquel diverses logiques peuvent être élaborées en fonction des objectifs que l'on se donne (Rückert, 2011). Dans les modélisations ci-dessus, la proximité structurelle des approches sémantique et syntaxique se traduit par la proximité de deux suites de coup : les coups n^0 - n^1 - n^2 - n^3 - n^4 - n^5 - n^6 du jeu d'extérieur peuvent être rapprochés des coups n^0 - n^1 - n^2 - n^3 - n^4 - n^5 - n^6 du jeu d'intérieur. La variation de nature entre les deux types de jeu est caractérisée par le fait que le coup conduisant le Proposant à la victoire est « retardé » (coup n^6 , R-IMPLIQUE, R-Jeu formel, R-Classique) puisque dans le cadre du jeu d'intérieur le Proposant doit exploiter les nouveaux éléments syntaxiques issus de l'observation des aspects génériques des procédures d'évaluation conjointe du jeu d'extérieur afin de tenir compte du caractère formel du jeu (R-Jeu formel).

Un dernier commentaire pour clore cette analyse. Les trois coups les plus importants du jeu d'intérieur sont les coups n^4 - n^5 - n^6 . Ils correspondent du point de vue déductif à l'introduction d'une implication, nécessaire dans le cas où l'énoncé à démontrer est une implication. Le coup

¹¹ Je me restreins ici au cas des énoncés universellement quantifiés.

¹² Le choix d'objet par l'Opposant doit conduire cette première évaluation à être positive sans quoi l'Opposant offrirait le gain de la partie au Proposant mais avec un caractère de généralité faible pour la stratégie en jeu.

¹³ Le nombre 3 n'est pas considéré contrairement à la première stratégie mentionnée.

n°30 est rendu possible du fait de l'exploitation d'hypothèses qui s'expriment sous forme d'implications universellement quantifiées. Une telle utilisation d'une implication peut être rapprochée, après élimination du quantificateur, de l'application d'un *Modus Ponens*, règle de raisonnement souvent mise en avant en didactique des mathématiques et qui a fait l'objet de nombreuses recherches, notamment celles de Duval (1995) pour citer l'une des plus connues. Dans le contexte d'une analyse didactique d'une démonstration de topologie mettant en jeu un usage complexe des quantificateurs, Durand-Guerrier et Arsac (2003) ont montré qu'il était nécessaire de se doter d'outils d'analyse plus fins que ceux offerts par le calcul propositionnel, et à plus forte raison le seul *Modus Ponens*. Les modélisations précédentes permettent de prolonger l'argument de ces auteurs à un nouveau contexte mathématique et logique puisque dans l'exemple traité la quantification ne pose pas de problème particulier¹⁴. Les modélisations dialogiques offrent en effet un regard sur le processus de démonstration qui souligne des enjeux se situant à l'articulation entre le travail sur les exemples et la mise en place d'un ensemble d'hypothèses susceptibles d'être utilisées dans une approche formelle. La prise en considération des questions de quantification conduit à mettre en évidence des éléments de continuité dans le raisonnement mathématique entre le travail sur le « contenu » des énoncés, les objets auxquels ils renvoient, et le travail de déduction formelle, là où d'autres recherches ont eu tendance à insister sur les spécificités cognitives de la déduction. Comme je l'ai déjà évoqué, le passage des jeux d'extérieur aux jeux d'intérieur peut poser des difficultés relatives aux conversions entre registres, à plus forte raison en géométrie qui est l'un des domaines les plus étudiés par Duval (1995). Les parties de jeu d'extérieur peuvent en effet prendre appui sur différents registres sémiotiques selon le type de signes choisis par le sujet pour représenter et manipuler les objets (figures, schémas, représentations graphiques, écritures chiffrées ou autres). La transition vers un jeu d'intérieur suppose un passage vers l'un des registres d'usage pour la formulation des démonstrations. La congruence entre les registres sémiotiques utilisés dans les jeux d'intérieur et d'extérieur ne peut être présupposée. Néanmoins, dans le cas où les hypothèses nécessaires à la formulation de la démonstration ne sont pas toutes « déjà là », ce qui est souvent le cas lorsqu'il faut aller chercher au-delà des seules définitions, l'approche qui a été utilisée permet d'explicitier plus précisément ce qui est en jeu dans le travail d'élaboration de la démonstration et en quoi la considération d'exemples peut y contribuer.

Conclusion Apports d'une modélisation dialogique

Dans cet article, je me suis intéressé aux rôles des exemples dans l'enseignement supérieur des mathématiques. Cette thématique a d'abord été abordée en mobilisant la distinction entre les approches sémantique et syntaxique des démonstrations introduite par Weber et Alcock (2004). Le recours aux exemples, les instanciations d'objets relativement à certains concepts, sont des éléments caractéristiques des approches sémantiques. J'ai alors rendu compte de plusieurs recherches s'inscrivant dans la perspective ouverte par cette distinction, dégagant ainsi divers rôles pour les exemples dans la pratique et dans l'enseignement des mathématiques. Je me suis ensuite concentré sur un rôle en particulier, celui de la contribution des exemples aux processus d'élaboration des démonstrations. Une hypothèse sous-jacente à divers travaux de recherche est que la manipulation d'exemples est susceptible de contribuer à guider le processus formel d'inférence. Par la suite, j'ai proposé un cadre théorique de référence, issu des approches dialogiques de la logique, de manière à disposer d'outils formels pour contribuer à l'exploration de cette hypothèse. Le principal enjeu de ce travail est d'identifier les apports de ces outils au regard de ce qui peut être perçu indépendamment d'eux.

D'une manière générale, l'utilisation d'outils formels permet de renforcer la précision des arguments. Ces outils peuvent aussi contribuer à identifier de nouvelles questions, ou à en reformuler de plus anciennes. Dans cet article, il s'est agi de se réapproprier une problématique vive de la recherche en didactique des mathématiques pour en proposer une nouvelle lecture. La modélisation par les approches dialogiques a permis une réécriture du corpus, une

¹⁴ De nombreux énoncés de la géométrie du collège ont la même forme : « pour tout x dans D si $P(x)$ alors $Q(x)$ ».

reconstruction autour de notions centrales de notre questionnement didactique : la signification des énoncés considérée du point de vue de leurs règles de manipulation dans un jeu ; le recours aux exemples comme choix d'objets tombant ou non sous certains concepts (évaluation conjointe des propositions atomiques) ; la validité formelle comme stratégie gagnante dans un jeu d'intérieur. Ce choix est cohérent avec la manière dont la théorie des situations didactiques aborde les situations de validation, Brousseau ayant trouvé dans l'approche dialogique de Lorenzen une inspiration pour sa modélisation des situations de validation : « La représentation des mathématiques la plus répandue est celle d'un système complètement déductif. Elle consiste en gros à considérer la logique mathématique et l'ensemble des énoncés constituant la connaissance actuelle d'une théorie mathématique comme un répertoire de règles. Le jeu consiste alors, conformément à ces règles, à construire de nouveaux énoncés valides portant sur les objets de la théorie. [...] Sur la même représentation théorique, il met en scène la production de certains théorèmes et axiomes de logique comme moyen de régler des conflits entre un proposant et un opposant. C'est exactement ce "jeu" proposé par P. Lorenzen en 1967 dans son ouvrage *Métamathématique* qui est à l'origine de la théorie des situations. » (Brousseau, 2002, p.101-102)

La logique dialogique à laquelle j'ai fait référence dans cet article s'inscrit dans la tradition de recherche ouverte par Lorenzen¹⁵. Une des marques de fabrique de la théorie des situations didactiques est de proposer une perspective située sur les apprentissages, le comportement des sujets étant étudié comme l'effet d'une situation particulière. Nous avons vu plus haut avec l'analyse de l'énoncé « Quel que soit l'entier naturel n , si n s'écrit sous la forme $n = 2k+1$ avec k entier alors n est un entier impair » que l'approche dialogique s'accordait avec une telle perspective appliquée au langage. L'interprétation d'un énoncé passe en effet par l'identification d'une situation de validation d'arrière-plan. Le cadre théorique mis à l'étude dans cet article propose une grammaire pour les jeux de langage de validation en mathématiques. Il met à disposition des outils génériques pour la description des situations de validation¹⁶. L'analyse des pratiques langagières s'identifie alors avec l'analyse de stratégies d'usage des énoncés, des symboles (dont des lettres de variable) et des objets au sein d'un système de règles de manipulation.

La vérité d'une proposition relativement à un modèle, comme la validité formelle d'une telle proposition, se définissent de manière dialogique par l'existence d'une stratégie gagnante pour le Proposant (le joueur qui ouvre le jeu). Cependant, il est possible et usuel pour un sujet de s'engager dans une partie d'un jeu en l'absence de stratégie gagnante. On peut ainsi observer Chris s'engager dans un jeu sémantique, manipuler des exemples et gagner une partie, sans pour autant disposer d'une stratégie conçue *a priori*. De même, il est en mesure dès l'entrée dans le processus de validation de produire les premiers coups d'une partie de jeu d'intérieur de manière prospective, simplement en manipulant les définitions qui sont à sa disposition. La distinction entre le niveau de la partie et le niveau de la stratégie permet de distinguer entre comprendre un énoncé, être capable de le manipuler, et disposer d'une preuve de sa vérité relativement à une structure d'interprétation ou d'une démonstration de sa validité formelle. Ceci offre un cadre pour l'analyse du processus d'élaboration des démonstrations au sens de l'analyse de ce qui nourrit la dynamique des parties. Une partie d'un jeu d'extérieur étant jouée, il est possible de prendre de manière réflexive cette partie pour objet et de s'interroger sur le caractère plus ou moins stratégique des choix qui ont été faits. Du point de vue de l'avancée du processus de validation, ce qui importe est l'émergence de stratégies de validation qui soient réutilisables. Dans le cas traité, ceci revient à interroger le caractère générique des procédures mises en œuvre pour évaluer les propositions atomiques, c'est-à-dire pour décider si tel objet qui a été choisi est ou non un exemple d'un concept donné. Ce ne sont pas à proprement parler les exemples qui sont génériques mais bien les procédures d'évaluation qui y sont associées. Chris repère une procédure susceptible d'être appliquée pour tous les choix d'objet et en convertit les éléments significatifs de manière à les rendre disponibles dans un jeu d'intérieur : de nouvelles

¹⁵ Cette filiation est revendiquée par Rahman, par exemple dans la préface de Redmond & Fontaine (2011, p.xiv) : « Dialogic Logic was suggested at the end of the 1950s by Paul Lorenzen and worked out by Kuno Lorenz ».

¹⁶ Une description plus complète de la situation aurait supposé un contexte effectif, ici inexistant.

concessions de l'Opposant (de nouvelles hypothèses) pourront être manipulées pour produire de nouvelles parties et avancer vers l'identification d'une stratégie gagnante.

Mieux identifier ce qu'il peut y avoir de générique dans le travail sur les exemples permet de mieux comprendre la manière dont leur prise en considération peut contribuer à l'élaboration des preuves. Il s'agit d'un premier résultat que l'on peut attribuer au référent théorique utilisé dans cette recherche. Au-delà de l'étude du processus d'élaboration des démonstrations, je fais par ailleurs l'hypothèse que la distinction entre le niveau de la partie et celui de la stratégie pourrait contribuer à l'analyse didactique de la lecture des démonstrations et à leur usage dans l'enseignement. Suivre pas à pas une démonstration ne signifie pas pour autant en percevoir la dimension stratégique tout comme suivre coup par coup une partie d'échecs n'est pas en suivre la logique. Se pose alors la question de la gestion de cette dimension stratégique par les enseignants lorsque ceux-ci présentent des démonstrations aux étudiants : reste-t-elle transparente ? Est-elle prise en charge ? Par quels moyens (gestes, oral, écrit, etc.) ?

Dans ses travaux fondateurs sur les processus de preuve, Balacheff (1987) caractérise les exemples génériques par le fait qu'ils sont traités non pour eux-mêmes mais comme représentants caractéristiques d'une classe. Une originalité de cette recherche tient dans le fait que la caractérisation pragmatique de la relation sujet-objet est intégrée à un cadre théorique explicite. Celui-ci permet notamment une déconstruction du processus de traitement des objets et des énoncés qui contribue à éclairer l'analyse. Néanmoins, le principal résultat de ce travail concerne l'articulation des jeux d'intérieur et des jeux d'extérieur ou, pour le dire indépendamment de l'outil de modélisation, la contribution de la manipulation des exemples à l'élaboration d'une démonstration. Notre analyse du travail de Chris prolonge celle de Alcock et Inglis (2008) en ce qu'elle met au jour des éléments de continuité entre le travail sur les exemples et le travail déductif. Cette observation a été rendue possible grâce à la dimension unificatrice des approches dialogiques, des variations entre les règles des jeux de langage autorisant aussi bien la description de la manipulation des objets que celle des énoncés et des lettres de variable qui est nécessaire au travail déductif. J'ai rendu compte de ces éléments de continuité en identifiant des proximités entre des ensembles de coups. Ceci n'aurait pu se faire en l'absence d'une déconstruction explicite des processus impliqués.

Cette question des traits communs et des différences entre les modes de validation pragmatique et intellectuel, pour reprendre les termes de la classification de Balacheff, est une question vive de la recherche en didactique des mathématiques sur la validation. Durand-Guerrier a proposé des cadres théoriques issus de la (philosophie de) la logique afin de rendre disponible et opératoire la distinction entre les notions de vérité et de validité logique pour les analyses didactiques (voir par exemple Durand-Guerrier, 2008). L'auteur considère que cette posture théorique ouvre la perspective d'une reconsidération de l'idée qu'il y aurait une rupture entre le raisonnement « naturel » et le raisonnement mathématique : « Our epistemological considerations show clearly how methods of logic that simultaneously take into account semantic and syntactic point of view remain close both to natural reasoning and to mathematical reasoning and proof. These considerations open up the possibility of reconsidering the widely held view that there is a difference in nature between natural and mathematical reasoning. » (Durand-Guerrier, 2008, p. 382)

Cette recherche se situe dans le prolongement de ces travaux. Elle contribue à préciser ce qu'il peut y avoir de commun entre le travail sémantique sur les exemples et les raisonnements de nature syntaxique. Dans ce sens, elle contribue aussi à l'étude des rapports entre le raisonnement « naturel » et le raisonnement mathématique. Une centration exclusive sur les règles syntaxiques liées à la notion de validité logique (à plus forte raison celles du calcul des propositions et le *modus ponens*), au détriment de la dimension sémantique du raisonnement mathématique qui a été mise en avant dans ce texte, peut conduire à surévaluer les spécificités des raisonnements mathématiques déductifs. Dans ses travaux, Durand-Guerrier utilise d'une part la théorie des modèles de Tarski pour son explication pour la logique du premier ordre du concept de vérité (et de validité comme vérité « générale », c'est-à-dire pour toute interprétation dans un modèle), et d'autre part la déduction naturelle de Copi (1954) pour les outils qu'elle

procure afin d'analyser la validité logique des démonstrations mathématiques. La sémantique *game-theoretic* (Hintikka & Sandu, 1997), dont je me suis inspiré pour modéliser les jeux d'extérieur, est une reformulation dialogique de l'approche sémantique *model-theoretic* de Tarski. De même, la logique dialogique est réinterprétation dialogique des systèmes monologiques de déduction naturelle. L'intérêt des modélisations dialogiques est d'autoriser l'intégration dans un même cadre théorique englobant d'une approche ayant pour objet la vérité des propositions relativement à un domaine d'interprétation et d'une autre se focalisant sur la validité logique. On obtient l'une ou l'autre des approches en jouant sur des variations de certaines règles structurelles du jeu. Ce cadre englobant a donc permis de mettre en évidence une structure commune entre le jeu d'extérieur au cours duquel l'étudiant a manipulé des exemples et le jeu d'intérieur dans lequel celui-ci a formulé sa démonstration, même si bien évidemment les deux jeux possèdent des spécificités, en particulier au niveau de la gestion des propositions atomiques (s'appuyer sur les concessions de l'Opposant versus précéder à des évaluations conjointes) ou du type de signe utilisé.

Je poursuis en signalant une variation entre la manière d'appréhender les signes qui a été mise en œuvre dans ce texte et celle qui est proposée par Durand-Guerrier et Arsac (2003). Pour ce qui est de la modélisation du travail de Chris par un jeu d'extérieur, les processus d'instanciation de concept reposant sur les règles R-UNIV et R-EXIST conduisent à des manipulations d'objet. Ces objets n'étant pas matériels, ces manipulations ont recours à des signes, des noms d'objet, qui sont dans le cas qui nous intéresse des écritures chiffrées mais qui peuvent être dans d'autres cas des dessins, des mots, des figures, etc. Dans le cas du jeu d'intérieur, il n'y a plus d'objet et de signe pour les représenter mais des symboles, en l'occurrence des lettres de variable. Une variable liée par un quantificateur devient libre suite à un processus d'instanciation (l'énoncé dit alors quelque chose de la variable). Les jeux d'extérieur sont relatifs à un domaine d'interprétation sur lequel est interprétée la conjecture en cours d'évaluation. Ce n'est pas le cas des jeux d'intérieur qui se jouent avec les ressources propres au langage. Pour autant, dans la pratique mathématique, le lien avec le domaine d'interprétation n'est pas perdu lorsque l'on produit des démonstrations. Les signes manipulés ne le sont pas de manière purement formelle, sans considération pour le domaine d'objet dont traitent les énoncés. Durand-Guerrier et Arsac (2003) rendent compte de ce fait en ayant recours à la déduction naturelle de Copi (1954) comme référent théorique pour l'analyse des démonstrations. Il s'agit selon eux d'un outil de modélisation pour la démonstration qui ne rompt pas avec l'ancrage sémantique des démonstrations mathématiques, et qui permet en particulier d'aborder les démonstrations par exemple ou élément générique, c'est-à-dire les démonstrations d'un énoncé universel qui reposent sur un exemple générique. Dans cette approche, les instanciations d'objet peuvent produire des éléments génériques, c'est-à-dire des objets qui ne sont considérés que du point de vue de leur appartenance au domaine d'interprétation. La posture de recherche est donc intermédiaire, entre la mobilisation d'un outil de modélisation complètement formalisé sur le plan logique et une approche qui laisserait la question essentielle de la nature des signes utilisés sans référent théorique explicite. Dans ce texte, j'ai choisi de ne considérer que des noms d'objet, au sens d'un élément particulier du domaine d'interprétation, et des lettres de variable (des symboles). La question de la généricité a été abordée par l'intermédiaire de la notion de stratégie. L'apport de ce choix théorique réside dans l'espace qu'il ouvre pour étudier la manière dont le sujet parvient à élaborer de la généricité au cours du processus de démonstration depuis la considération d'exemples particuliers jusqu'à la mise en place d'une stratégie de démonstration.

La problématique de la validation des énoncés n'étant pas une spécificité des mathématiques, ni même le mode de raisonnement déductif même s'il prend certainement plus de place dans cette discipline que dans d'autres, on pourrait s'interroger sur le domaine de pertinence de l'outil théorique qui a été présenté. Vernant (2011) mobilise par exemple sa logique dialogique de la véridicité pour analyser des dialogues entre des médecins et une patiente. Le cadre dialogique est-il susceptible de contribuer à des travaux relevant d'autres didactiques disciplinaires ? De contribuer aux travaux s'intéressant de manière plus générale à l'argumentation et à ses liens avec le raisonnement logique ? Cette question dépasse de loin les ambitions de ce texte et les compétences de son auteur mais il ne me semble pas y avoir de raison *a priori* pour limiter le

champ d'utilisation des outils de modélisation liés aux approches dialogiques. D'autant plus que les outils mis en avant dans ce texte ne rendent compte que d'une portion très limitée des possibilités de modélisation offertes par l'approche dialogique prise dans un sens large, de nombreuses autres variations sur les règles du jeu étant envisageables (Ruckert, 2011). Dans un texte portant sur le raisonnement juridique et le raisonnement logique, Rahman (2014) conteste l'idée défendue notamment par Toulmin (1958), un auteur régulièrement convoqué par des didacticiens des disciplines pour sa modélisation de l'argumentation, d'une incommensurabilité entre l'argumentation et le raisonnement logique. Pour Rahman, cette conception repose sur une vision datée et trop étroite de ce que recouvre le raisonnement logique : « The very conception of the opposition is mistaken and this comes from the lack of understanding on what was going in logic since the 1960's. It is significant that the period when Perelman and Toulmin wrote their manifestos against logic, represents at the same time the period that can be signaled as the birth of the dynamic or dialogical turn in logic. A turn that, in fact, provides the procedural means they were looking for. » (Rahman, 2014, p.3)

J'ai moi-même proposé un début de discussion autour des modèles de Toulmin et de Duval dans ma thèse (Barrier, 2009, p.60-78), dans le contexte de la didactique des mathématiques. L'idée générale était que l'arrière-plan logique de leurs travaux était susceptible d'influencer leur approche des relations entre argumentation et démonstration. La question des fondements logiques de la didactique des mathématiques, et des didactiques disciplinaires en général, est une question vive dès lors que l'on s'intéresse au raisonnement.

Bibliographie

- ALCOCK L. (2009), « Teaching proof to undergraduates: semantic and syntactic approaches », *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving, volume 1*, F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (éds.), Taipei, National Taiwan Normal University, p.29-34.
- ALCOCK L. (2010), « Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof », *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. VII, p.63-92.
- ALCOCK L. & INGLIS M. (2008), « Doctoral students use of examples in evaluating and proving conjectures », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 69, p.111-129.
- ALCOCK L. & WEBER K. (2010a), « Undergraduates' example use in proof construction: purposes and effectiveness », *Investigations in Mathematics Learning*, vol. 3, n°1, p.1-22
- ALCOCK L. & WEBER K. (2010b), « Referential and syntactic approaches to proving: case studies from a transition-to-proof course », *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. VII, p.93-114.
- ARTIGUE M. (2014), « Potentialities and limitations of the Theory of Didactic Situations for addressing the teaching and learning of mathematics at university level », *Research in Mathematics Education*, vol. 16, n°2, p.135-138.
- BALACHEFF N. (1987), « Processus de preuve et situations de validation », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, n°2, p.147-176.
- BARRIER T. (2008), « Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques », *Éducation et didactique*, vol. 2, n°3, p.35-58.
- BARRIER T. (2009), *Une perspective sémantique et dialogique sur les situations de validation en mathématiques*, Thèse de doctorat de l'Université Lyon 1, France.
- BARRIER T. (2011), « Les pratiques langagières des étudiants en analyse réelle », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 31, n°3, p.259-290.
- BENBACHIR A. & ZAKI M. (2001), « Production d'exemples et de contre-exemples en analyse : étude de cas en première d'Université », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 47, p.273-295.

- BILLS L. & WATSON A. (2008), « Editorial introduction », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 69, p.77-79.
- BROUSSEAU G. (1998), *Théories des situations didactiques*, Grenoble, La pensée Sauvage.
- BROUSSEAU G. (2002), « Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques », *Revue du Centre de Recherche en Éducation*, vol. 22-23, p.83-155.
- CHELLOUGUI F. (2009), « L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 29, n°2, p.123-154.
- COPI I. (1954), *Symbolic Logic*, New York, Macmillan.
- DURAND-GUERRIER V. (2003), « Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 53, n°1, p.5-34.
- DURAND-GUERRIER V. (2008), « Truth versus validity in mathematical proof », *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 40, p.373-384.
- DURAND-GUERRIER V. & ARSAC G. (2003), « Méthode de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? », *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol. 23, n°3, p.295-342.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Bern, Peter Lang.
- FREGE G. (1971), *Écrits logiques et philosophiques* (C. Imbert, Trad.), Paris, Seuil.
- GONZALEZ-MARTIN A.S., BLOCH I., DURAND-GUERRIER V. & MASCHIETTO M. (2014), « Didactic Situations and Didactical Engineering in university mathematics: Cases from the study of Calculus and proof », *Research in Mathematics Education*, vol. 16, n°2, p.117-134.
- GUEUDET G. (2008), « Investigating the secondary-tertiary transition », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 67, n°3, p.237-254.
- HACHE C. (2015), « Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec "avec" », *Petit x*, vol. 97, p.27-43.
- HINTIKKA J. (2007), *Les Principes des Mathématiques Revisités* (M. Rebuschi, Trad.), Paris, Vrin.
- HINTIKKA J. & SANDU G. (1997), « Game-theoretical semantics », *Handbook of Logic and Language*, J. van Benthem & A. ter Meulen (éds.), Amsterdam, Elsevier, p.361-410.
- MARRONGELLE K., RASMUSSEN C. & THOMAS M.O.J. (2015), « Editorial », *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, vol. 1, p.1-2.
- MEIJA-RAMOS R.-P. & WEBER K. (2014), « Why and How mathematicians read proofs: further evidence from a survey study », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 85, p.161-173.
- MESNIL Z. (2014), *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*, Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, France.
- MITHALAL J. (2013), « Fiche de lecture critique de Alcock et Inglis M. (2008) », *Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz*, vol. 7, p.31-36.
- MOORE R.-C. (1994), « Making the transition to formal proof », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 27, n°3, p.249-266.
- NARDI E., BIZA I., GONZALEZ-MARTIN A.S., GUEUDET G. & WINSLOW K. (2014), « Institutional, sociocultural and discursive approaches to research in university mathematics education », *Research in Mathematics Education*, vol. 16, n°2, p.91-94.
- RAHMAN S. (2014), « What is wrong about Pereleman-Toulmin's opposition between Legal Reasoning and Logic ? », *Al-Mukhatabat. Trilingual Journal for Logic, Epistemology and Analytic Philosophy*, vol. 12.

- RAHMAN S. & TULENHEIMO T. (2006), « From Games to Dialogues and Back », *Games: Unifying Logic, Language, and Philosophy*, O. Majer, A.-V. Pietarinen & T. Tullenheimo (éds.), Dordrecht, Springer, p.153-208.
- REDMOND J. & FONTAINE M. (2011), *How to Play Dialogues. An Introduction to Dialogic logic*, Londres, College Publications.
- ROBERT A. (1998), « Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, n°2, p.139-190.
- RUCKERT H. (2011), *Dialogues as a Dynamic Framework for Logic* (Chapter 1 : Why Dialogical Logic ?), Londres, College Publications.
- SEGAL J. (2000), « Learning about mathematical proof: conviction and validity », *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 18, p.191-210.
- SELDEN J. & SELDEN A. (1995), « Unpacking the Logic of Mathematical Statements », *Educational studies in mathematics*, vol. 29, n°2, p.123-151.
- SELDEN A. & et SELDEN J. (2003), « Validations of proofs considered as texts: can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 34, n°1, p.4-36.
- SENSEVY G. (2012), « Le jeu comme modèle de l'activité humaine et comme modèle en théorie de l'action conjointe en didactique. Quelques remarques », *Nouvelles perspectives en sciences sociales*, vol. 7, n°2, p.105-132.
- TOULMIN S.E. (1958), *The Uses of Argument*, Cambridge, Cambridge University Press.
- VERNANT D. (2011), « The dialogical Logic of Veridicity », *Logical Properties of Dialogues*, A. Trognon, M. Batt, J. Caelen & D. Vernant (éds.), Nancy, Presses Universitaires de Nancy, p.123-145.
- WATSON A. & MASON J. (2002), « Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics », *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4), A. Cockburn & E. Nardi (éds.), Norwich, PME, p.377-385.
- WEBER K. (2015), « Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs », *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, vol. 1, n°3, p. 289-314.
- WEBER K. & ALCOCK L. (2004), « Semantic and syntactic proof productions », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 56, p.209-234.
- WEBER K. & MEJIA-RAMOS J.P. (2014), « Mathematics majors' beliefs about proof reading », *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, vol. 45, p.89-103.
- WINSLOW C. (2008), « Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle », *Actes de la XIII^e école d'été de didactique des mathématiques*, A. Rouchier & I. Bloch (éds.), Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions.
- ZAZKIS R. & CHERNOFF E.J. (2008), « What makes a counter-example exemplary ? », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 68, p.195-208.
- ZAZKIS R. & LEIKIN R. (2008), « Exemplifying definitions: a case of a square », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 69, p.131-148.