Démarche d'investigation et explication au collège

Investigation and explanation activities in lower secondary school

Francesca Morselli, Elisabetta Panucci et Monica Testera

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/ree/7558>

DOI : 10.4000/ree.7558

ISSN : 1954-3077

Éditeur

Université de Nantes

Référence électronique

Francesca Morselli, Elisabetta Panucci et Monica Testera, « Démarche d'investigation et explication au collège », *Recherches en éducation* [En ligne], 21 | 2015, mis en ligne le 01 janvier 2015, consulté le 24 juin 2021. URL : <http://journals.openedition.org/ree/7558> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/ree.7558>

Recherches en éducation est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Démarche d'investigation et explication au collège

Francesca Morselli, Elisabetta Panucci, Monica Testera¹

Résumé

Nous présentons une méthode mise en œuvre en Italie à propos de la démarche d'investigation (DI) au collège. Nous souhaitons, à travers cet article, contribuer au débat issu du groupe de travail « La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques : fondements et pratiques » (Matheron, Morselli, René de Cotret, Schneider, 2012) notamment en ce qui concerne les questions suivantes : caractériser les typologies de questions à poser et les responsabilités des acteurs (enseignant, élèves, chercheurs). Tout d'abord, la DI est insérée dans le contexte de l'institution scolaire italienne. Nous présentons ensuite un cas spécial de DI, c'est-à-dire la Démarche d'investigation et explication, mise en œuvre dans le contexte d'un projet qui vise à la formation professionnelle des enseignants « pour et à travers » la mise en place de la DI. Nous présentons quelques repères théoriques qui sont à la base de la Démarche d'investigation et explication, notamment les fonctions de l'explication et les dimensions de la rationalité selon Habermas. Ces repères théoriques sont la référence pour la conception et gestion des séquences d'apprentissage. Cela est montré à travers l'analyse d'épisodes issus d'une séquence d'apprentissage au sujet des rectangles isopérimétriques.

À partir des années 2000, dans les systèmes éducatifs de nombreux pays, des nouvelles recommandations pour un enseignement des mathématiques et des sciences sont apparues. Selon ces indications, les élèves doivent être engagés dans une démarche d'investigation qui vise à l'apprentissage des notions. La notion de « Démarche d'investigation » (DI), traduction française de l'expression « Inquiry-based science education » est donc devenue l'objet d'un débat scientifique, comme le montre, par exemple, la création du groupe de travail *La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques : fondements et pratique* dans le cadre du dernier colloque *Espace mathématique francophone* (EMF, 2012). Pour une discussion sur la DI en France, et son encadrement pédagogique et épistémologique, on peut aussi se référer à Matheron (2010).

Le travail du groupe au sein de l'EMF (Matheron, Morselli, René de Cotret, Schneider, 2012) a montré que la notion de DI peut traiter des réalités différentes, et qu'il est important, pour ne pas faire de la DI un « fourre-tout », de conduire une réflexion, à partir des exemples de DI mises en œuvre, sur les fondements et les méthodes qui sont à la base de la DI.

Plus spécifiquement, il semble important de caractériser les responsabilités des acteurs (enseignant et élèves). Du côté enseignant, cela signifie caractériser le type de questions à poser et de tâches à concevoir. Cela signifie aussi prendre en compte le rôle de l'enseignant, qui doit gérer la tension entre liberté donnée aux élèves et apprentissage à viser, c'est-à-dire créer les conditions et piloter, sans pourtant tomber dans une « ostension déguisée ». Cela amène aussi à la problématique de la formation des enseignants.

Ces questions sont abordées dans la suite de l'article, à partir d'un exemple italien de DI au collège.

¹ Francesca Morselli, chercheuse, Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Université de Turin, Italie. Elisabetta Panucci, professeure de collège, Istituto Comprensivo di Carcare, Savona, Italie. Monica Testera, professeure de collège, Istituto Comprensivo di Carcare, Savona, Italie.

1. La DI dans le contexte institutionnel italien : les Indications nationales et la notion de « Laboratoire de Mathématiques »

En 2000 l'Union Mathématique Italienne (UMI), à la demande du ministère de l'Instruction, de l'Université et de la Recherche (MIUR), a constitué une Commission mixte de chercheurs universitaires et d'enseignants pour la conception d'un nouveau curriculum pour l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux. La Commission a proposé une vision des mathématiques « pour le citoyen », c'est-à-dire un corpus de connaissances et de compétences fondamentales, nécessaires pour la vie dans la société. Les travaux de la Commission ont donné lieu aux documents *Matematica 2001*, *Matematica 2003* et *Matematica 2004* (Anichini & al., 2003), où les propositions sont accompagnées d'une riche collection d'activités, cohérentes avec les propositions de la Commission, à mettre en place dans la classe de mathématiques, et d'indications sur les méthodes didactiques.

Dans les documents, une vision des mathématiques *instrumentale* et *culturelle* est proposée : les mathématiques doivent être présentées aussi bien comme instrument pour mieux comprendre la réalité que comme corpus de savoirs bien systématisés. Parmi les indications méthodologiques, les documents soulignent l'importance de la verbalisation, de la production, de l'argumentation et de la vérification d'hypothèses ainsi que du rôle de médiation de l'enseignant dans toutes les phases de l'activité.

L'idée centrale du *laboratoire de mathématiques* est présentée. Le laboratoire ne doit pas être vu comme lieu « physique », hors de la classe, mais plutôt comme une méthodologie de travail en classe, un ensemble d'activités où les élèves sont les protagonistes de la construction des significations des objets mathématiques. L'idée de laboratoire souligne la participation active des élèves, aussi bien que le rôle de guide expert de l'enseignant. Dans le laboratoire, les élèves travaillent souvent en groupes et l'enseignant gère des moments de discussion mathématique (Bartolini Bussi, 1996).

En 2012, le MIUR a proposé de nouvelles indications pour le curriculum pour l'école maternelle, l'école primaire et le collège, qui ont développé l'idée de *mathématiques pour le citoyen* et le rôle central du *laboratoire*, où l'élève est actif, projette, expérimente, discute, négocie et construit les significations. L'élève travaille à la résolution de problème et une attention spéciale doit être aussi donnée au développement des capacités à exposer les processus de résolution et les solutions trouvées, de les discuter et de les comparer avec celles des pairs.

A notre avis, l'idée de *laboratoire*, le rôle actif des élèves et de pilotage de l'enseignant, ainsi que l'accent mis sur les processus et sur l'explication et la comparaison des démarches constituent les éléments fondamentaux de la version italienne des DI.

2. La Démarche d'Investigation et Explication

Dans la suite, nous présentons la Démarche d'investigation et explication, mise au point au sein du projet *Langage et argumentation* de l'Université de Gênes. Cela peut être caractérisé par un point de départ (une situation « ouverte » proposée aux élèves) et par plusieurs tâches où les élèves, à travers un travail de type « laboratoire », formulent des conjectures, les justifient, et réfléchissent aussi sur les diverses solutions possibles et sur les façons de les présenter et justifier. Dans une démarche d'investigation et explication, l'apprentissage visé est à un double niveau : le niveau contenu (des objets mathématiques) et aussi le niveau méta (apprendre à expliquer et justifier).

Pour mieux encadrer la démarche d'investigation et explication, nous présentons quelques repères théoriques.

■ **L'explication**

Balacheff (1987) distingue *l'explication, la preuve et la démonstration*. L'explication est le discours dont l'objectif est de rendre évident le caractère de vérité d'une proposition. Les raisons adoptées peuvent être acceptées ou contestées. Certaines explications sont acceptées dans une communauté, c'est-à-dire acceptées comme des preuves. Certaines preuves sont structurées comme une séquence d'énoncés admissibles reliés par des inférences correctes : ces preuves s'appellent démonstrations et sont les preuves acceptées par la communauté des mathématiciens.

En adoptant cette distinction, nous pouvons voir les explications comme le premier pas vers les démonstrations mathématiques. Les explications peuvent être à leur tour différentes selon leur objet (ce qu'elles expliquent) et selon leur fonction dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Levenson & Barkai (2013) distinguent six fonctions de l'explication. Parmi ces fonctions, nous citons :

- Fonction 1 : description du raisonnement personnel dans la résolution d'un problème (par exemple, *explique ce que tu as fait*) ; dans ce cas, l'explication met surtout en jeu la connaissance procédurale.
- Fonction 2 : explication comme réponse à une question qui implique l'utilisation des propriétés mathématiques (*C'est vrai ou c'est faux ? Explique pourquoi*). Dans ce cas, l'explication met en jeu la connaissance relationnelle.
- Fonction 4 : explication comme point de départ pour une nouvelle exploration qui peut porter à une généralisation (*trouve toutes les solutions possibles et explique*).
- Fonction 5 : justification de la stratégie de résolution du problème et justification de la plausibilité d'un raisonnement (*explique pourquoi tu as procédé de cette manière*).

Cette classification met en évidence que plusieurs questions (*explique ce que tu as fait, explique pourquoi tu as fait ce choix, etc.*) appellent la production d'explications de la part des élèves, et que l'habitude et la capacité de fournir des explications naissent bien avant les activités du deuxième type (*explique pourquoi telle affirmation est vraie ou fausse*), qui est institutionnellement la question la plus typique pour amener les élèves à justifier en mathématiques. Les explications produites, indépendamment de leur fonction, sont des exemples d'argumentation.

■ **L'approche de la preuve en classe**

L'aspect crucial de l'argumentation et de la démonstration dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques a été amplement étudié (Hanna & De Villiers, 2012).

Dans une perspective où l'argumentation est fortement liée à la preuve (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp & Tanguay, 2012), il est important d'amener les élèves à effectuer les premiers pas dans la « culture des théorèmes » (Boero, 2007).

La recherche en didactique des mathématiques offre de nombreux exemples de séquences d'apprentissage dont le but est de favoriser cette approche à la culture des théorèmes. Lin, Yang, Lee, Tabach et Stylianides (2012) ont fait une liste de principes pour la conception de séquences visant à susciter la conjecture, la transition de la conjecture à la preuve et la preuve. Par rapport à la conjecture, il est important d'amener les élèves à observer, construire et réfléchir. Par rapport à la transition de la conjecture à la preuve, il est important d'établir des normes sociales sur l'acceptabilité des arguments proposés. Par rapport à la preuve, il est important de donner aux élèves l'occasion de travailler dans différents registres de représentation, de produire, de partager et de comparer leurs preuves, et d'évaluer aussi les preuves proposées par l'enseignant.

Stylianides (2007) a proposé la définition suivante de la preuve en classe : « *Proof is a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics: it uses statements accepted by the classroom*

community (set of accepted statements) that are true and available without further justification; it employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and it is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community. » (Stylianides, 2007, p.291)

Cela signifie que l'approche de la preuve doit être « douce » et que les élèves doivent développer la capacité de bien gérer les pas de raisonnement (modes d'argumentation) et de communiquer les arguments d'une façon intelligible. Cela est cohérent avec l'idée de l'approche de la preuve comme approche d'une forme de rationalité, proposée par Morselli et Boero (2009, 2011) à partir des travaux du philosophe Habermas (2001). Selon celui-ci, le sujet fait preuve de rationalité dans son activité s'il peut la justifier sur les trois dimensions épistémique (inhérente à la validation sur la base de prémisses partagées et en utilisant des règles de raisonnement légitimes), téléologique (inhérente aux choix stratégiques) et communicationnelle.

Dans le cas de la preuve, le sujet exprime sa rationalité dans la mesure où il est capable de justifier des affirmations en référence à une théorie ou à des principes partagés (rationalité épistémique), s'assigne un but à atteindre et se donne les moyens les plus convenables pour l'atteindre (rationalité téléologique), choisit consciemment les moyens de communication (mots, gestes et expressions) efficaces (rationalité communicationnelle).

Boero, Douek, Morselli et Pedemonte (2010) ont aussi observé que dans les séquences d'approche à la preuve, deux niveaux d'argumentation sont mis en place : l'argumentation sur le contenu, comme partie du processus de preuve, et l'argumentation au niveau méta, comme moyen de faire réfléchir sur la rationalité de l'activité de preuve. Dans la planification de la séquence d'apprentissage, il est important de créer des occasions d'argumentation au niveau méta ; dans l'exécution de la séquence, il est également important que l'enseignant soit capable de saisir les occasions de considérer d'autres argumentations.

3. Éléments caractéristiques d'une Démarche d'investigation et explication

Les références théoriques que nous avons présentées auparavant sont traduites dans un ensemble de principes de planification et d'expérimentation des séquences de tâches qui donnent lieu à une démarche d'investigation et explication.

De telles séquences sont caractérisées par une riche présence d'activités d'explication. Dans chaque séquence d'apprentissage, on trouve une tâche centrale, qui propose la situation à explorer, ainsi que des tâches supplémentaires, dans le but d'amener les élèves à prendre conscience des exigences du niveau épistémique (*c'est vrai parce que...*), du niveau téléologique (*je dois atteindre ce but...*) et du niveau communicationnel (*comment communiquer mon résultat d'une façon pertinente ?*). Tous les processus doivent être illustrés (fonction 1 de l'explication) et si possible justifiés (fonction 5 de l'explication). Si l'exploration de la situation ouverte porte à la formulation d'une propriété générale, cela doit être justifié (fonction 2 de l'explication). La séquence comporte donc la formulation de conjectures, la comparaison entre conjectures, la justification de conjectures, des débats de classe (Bartolini Bussi, 1996) et des travaux en petits groupes.

Ces choix sont cohérents avec les principes de planification d'activités pour l'apprentissage de la preuve de Lin et al. (2012). Il est aussi important d'insérer des moments de travail à niveau méta (Boero & al., 2010) pour amener les élèves à prendre conscience de leur activité ; il s'agit alors de proposer des reconstructions individuelles, suivies par des débats, sur les questions suivantes : *reconstruis ce que tu as fait ; compare ces deux méthodes de solution ; compare ces deux façons de présenter la solution ; etc.*

Dans la suite de cet article, nous donnons un exemple de séquence d'apprentissage qui donne lieu à une Démarche d'investigation et explication. Nous décrivons quelques épisodes de la séquence afin de discuter les caractéristiques de la Démarche d'investigation et explication mise en place, présenter des questions et consignes typiques et montrer son caractère « ouvert » : à partir de la séquence planifiée, les interventions des élèves peuvent créer d'autres occasions d'investigation et explication, que l'enseignant peut saisir pour donner vie à une séquence « réelle » encore plus riche.

4. Le contexte : le projet *Langage et argumentation*

Un problème crucial est celui d'amener les enseignants à mettre en place de véritables Démarches d'investigation et explication en classe. Dans ce qui suit, nous donnons quelques informations sur le projet *Langage et argumentation*, dans lequel des enseignants travaillent à la conception et mise en place de séquences d'apprentissage qui peuvent favoriser des démarches d'Investigation et explication.

En 2008, dans le cadre du projet national *Lauree scientifica*², le Département de mathématiques de l'Université de Gênes a créé le projet *Langage et argumentation*, une forme de collaboration université-école ayant pour but de concevoir et d'expérimenter des séquences d'activités autour de l'argumentation dans le domaine des mathématiques. La conception des séquences est réalisée par une collaboration entre chercheurs et enseignants (voir Morselli, 2013). Des enseignants de différents niveaux scolaires participent au projet, avec la conviction que le développement des compétences argumentatives est un processus long, qui doit commencer dans les premières années de la scolarité. Dans cet article, nous nous référons à l'équipe du niveau collège (âge des élèves : 11-14). L'équipe est composée d'un chercheur en didactique des mathématiques (l'auteur Morselli), une enseignante à la retraite ayant une riche expérience de collaboration avec l'université et sept enseignants (parmi eux, les auteurs de cet article, Panucci et Testera).

Les deux premières années du projet ont vu un riche travail de développement d'un cadre théorique et méthodologique commun. À partir de la troisième année, le travail de l'équipe a surtout été consacré à la planification de nouvelles séquences.

L'équipe avait des rencontres tous les mois, durant lesquelles les séquences étaient planifiées *a priori* et analysées au cours de l'expérimentation – *in itinere* – ainsi qu'*a posteriori*. L'auteur Morselli a pris part à la plupart des séances de classe et ses notes, vidéos et photos, ont constitué la base de données de l'analyse faite par l'équipe.

Les parcours sont progressivement expérimentés et affinés à travers des cycles d'expérimentation « en parallèle » (le même parcours effectué dans plusieurs classes) et « en série » (modifications de parcours au fil des années). Cela donne lieu à un véritable cycle de planification, d'expérimentation et d'analyse, qui est aussi une occasion de développement professionnel pour les enseignants impliqués. Plus spécifiquement, les enseignants, à travers la comparaison de ce qui se passe dans les classes, peuvent réfléchir sur la séquence, sur les degrés de liberté accordés aux élèves et aussi sur la variabilité de la séquence réelle par rapport à la séquence planifiée. La participation à toutes les phases de projet constitue aussi une véritable occasion de formation professionnelle pour les enseignants.

² En 2004 le ministère de l'Instruction, de l'Université et de la Recherche (MIUR) a constitué le projet national Lauree Scientifica (« Maîtrises scientifiques »). Le projet a pour but de promouvoir la culture scientifique des élèves et de les encourager à choisir des maîtrises scientifiques. Le projet a plusieurs axes d'intervention, y compris des stages dans les universités pour les élèves de lycée et la création de groupes mixtes université-école pour la mise au point d'activités pour les élèves.

Dans ce qui suit, nous présentons des épisodes issus des séquences d'apprentissage mises en œuvre au sein du projet.

5. Un exemple de Démarche d'investigation et explication : les rectangles isopérimétriques

Nous nous référons ici à une séquence portant sur le problème des rectangles isopérimétriques, en un échange continu entre arithmétique et géométrie. Le travail conjoint entre arithmétique et algèbre semble *a priori* important pour les raisons suivantes : amener les élèves à travailler « sans barrières » entre les domaines mathématiques, pour ne pas favoriser la naissance de conceptions sur les domaines mathématiques vus comme étant « fermés » ; utiliser la référence à la géométrie pour donner du sens aux faits de l'arithmétique.

■ L'expérimentation

Les épisodes sont issus de l'expérimentation dans deux classes de 6^e du collège, comptant au total trente élèves. Pour l'occasion, les classes ont été réunies et ont effectué un parcours comme si les élèves avaient été dans la même classe. En particulier, dans les travaux de groupe, ont été créés des groupes hétérogènes par classe d'appartenance (pour favoriser l'échange et l'interaction entre classes) mais homogènes par niveau, de manière à favoriser une participation réelle de tous les élèves.

Les deux classes, au moment de l'expérience, avaient déjà effectué l'activité « Pense à un nombre » où les élèves avaient rencontré pour la première fois les lettres comme instrument de pensée (Douek & Morselli, 2012).

■ La séquence

Le parcours a été articulé en cinq séances de trois heures chacune, effectuées toutes les semaines au second quadrimestre de l'année scolaire 2012-2013. Au cours des différentes passations, on alterne les moments de travail individuel, de travail en petits groupes et de discussions en classe.

Le parcours commence par la construction de rectangles ayant le même périmètre (dessinés sur du papier, puis découpés sur du carton). Les élèves en groupes doivent se donner une méthode pour construire les rectangles. Comme on le verra dans la suite, des questions supplémentaires portent sur les méthodes (fonctions 1 et 5 de l'explication) et sur le nombre de rectangles qu'on peut construire (fonction 4 de l'explication).

Le parcours continue par l'exploration de la situation et la production de conjectures sur l'aire maximale. Une première recherche de justifications, du fait que, parmi tous les rectangles ayant la même aire, le carré est celui qui a l'aire maximale, est effectuée (fonction 2 de l'explication). Il s'ensuit une démonstration algébrique, construite sous forme de discussion avec une médiation importante de l'enseignant.

Le parcours continue avec la reconstruction individuelle de la démonstration (avec l'aide d'une fiche-guide) ; les reconstructions individuelles sont ensuite confrontées et analysées au cours d'une discussion en classe.

Le parcours se conclut par une fiche sur tout le parcours effectué, avec des questions ayant comme objectif la réflexion sur les difficultés et l'utilité de chaque étape, et une référence particulière relative aux différentes modalités de travail (dessin, découpage sur carton, utilisation des lettres...).

On peut observer que la séquence présente des moments de véritable Démarche d'investigation et explication, ainsi que des moments de reconstruction et de réflexion méta sur la Démarche.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons de manière détaillée les activités concernant la première partie du parcours (construction des rectangles isopérimétriques).

6. La première activité : construire les rectangles

■ Méthodes de construction

La première consigne, mise en œuvre individuellement par les élèves, est la suivante : *Dessine quatre rectangles ayant tous le même périmètre de 20 cm.*

Puis les élèves, divisés en groupes, appliquent la consigne de la deuxième fiche : *Comparez les méthodes suivies pour dessiner les différents rectangles.* La deuxième fiche demande d'expliquer et de comparer les méthodes utilisées pour la construction des rectangles. Selon la classification des fonctions de l'explication illustrée par Levenson & Barkai (2013), les élèves passent de la résolution d'un problème (construire les rectangles) à la description de la stratégie adoptée (fonction 1 de l'explication : *explique ce que tu as fait*).

La stratégie la plus diffusée consiste à passer de la demande initiale (périmètre de 20 cm) à une demande équivalente (demi-périmètre de 10 cm). De cette manière, le problème géométrique de la construction des rectangles peut être ramené à un problème de type arithmétique, c'est-à-dire à déterminer deux nombres dont la somme vaut 10. Comme le montrent les extraits suivants des travaux effectués par les différents groupes, les élèves trouvent sans difficulté des couples de nombres dont la somme est 10, aidés également par la connaissance, qui remonte à l'école primaire, des « amis du 10 ».

Groupe 1: Pour former les rectangles avec le périmètre 20 cm, il faut former 10 cm, puis multiplier par 2.

À travers cette méthode, il est possible de former 9 rectangles : $6 + 4$, $7 + 3$, $8 + 2$, $9 + 1$, $4 + 6$, $3 + 7$, $2 + 8$ et $1 + 9$, mais le premier, le second, le troisième et le quatrième sont les mêmes que les quatre derniers. Il est impossible de faire $5 + 5$ parce qu'ainsi on obtient un carré.

Figure 1 - Groupe 1

Groupe 2 : Nous avons additionné les deux côtés différents dont la somme vaut à 10, qui, multiplié par deux, vaut à 20, c'est-à-dire le périmètre du rectangle.

Les solutions sont : $6\text{ cm} + 4\text{ cm} \times 2$, $8 + 2\text{ cm} \times 2$, $9 + 1\text{ cm} \times 2$, $7 + 3\text{ cm} \times 2$. D'autres périmètres sont impossibles.

$5 + 5 + 5 + 5\text{ cm} = 20$ ce n'est pas un rectangle mais un carré.

$10 + 10\text{ cm} = 20\text{ cm}$, mais ce n'est pas un rectangle.

Figure 2 - Groupe 2

Scheda 2 (gruppi)
 X Confrontate i metodi seguiti per disegnare i vari rettangoli. Sistematizzate:
 Abbiamo sommato due lati diversi la cui somma era 20 che moltiplicata per due il risultato era 40, ovvero il perimetro del rettangolo.
 Non sono possibili altri perimetri di 20 cm se non con queste lati: $6\text{ cm} + 4\text{ cm} \times 2$, $8 + 2\text{ cm} \times 2$, $9 + 1\text{ cm} \times 2$, $7 + 3\text{ cm} \times 2$.
 $5 + 5 + 5 + 5\text{ cm} = 20$, non è un rettangolo, ma un quadrato.
 $10 + 10\text{ cm} = 20\text{ cm}$, ma non è un rettangolo.

Au niveau des fonctions de l'explication, on voit que le groupe 1 fournit une explication du type 1, qui relève aussi du type 5 (la méthode est justifiée avec la référence à la formule du périmètre) et 4 (dans la dernière partie, les élèves expliquent que la méthode permet de construire neuf rectangles). Les élèves font aussi une affirmation générale qui est justifiée (fonction 2) en référence à leurs conceptions du carré et du rectangle.

Le groupe 2 adopte la même méthode, mais l'explication est surtout liée à la fonction 1 (expliquer le procédé), sans une véritable fonction 5 (sauf pour une référence aux cotés du rectangle, qui peut suggérer la formule du périmètre). On ne voit pas la fonction 4.

Au niveau des dimensions de rationalité, l'illustration de la méthode (fonction 1) a une composante épistémique et communicationnelle. La dimension téléologique est aussi présente, parce que les élèves ont un but (construire des rectangles) et choisissent une stratégie pour poursuivre ce but. Pour produire aussi une explication du type 5 (justification de la méthode), les dimensions téléologique et épistémique doivent travailler ensemble.

Par rapport à l'explication du type 2 (pourquoi le carré n'est pas acceptable) il y a un manque au niveau épistémologique, dans la référence aux définitions du rectangle et du carré.

Au niveau communicationnel, on peut observer que le groupe 1 est plus efficient que le groupe 2 dans son exposition de la méthode.

Cette analyse (pour plus de détails, voir aussi Morselli & Levenson, 2014) montre qu'une tâche peut donner lieu à divers processus d'explication. L'analyse montre aussi les dimensions de rationalité en jeu dans chaque type d'explication.

Une première analyse des réponses aux fiches 1 et 2 de tous les groupes met aussi en évidence quelques comportements récurrents. En premier lieu, les élèves construisent des rectangles ayant des mesures entières (en centimètre). Cela est compréhensible vu que la fiche 1 demande de construire un nombre limité de rectangles et donc on peut fournir la réponse sans user de mesures qui ne sont pas entières. Par ailleurs, la réponse du groupe 2 (d'autres périmètres de 20

cm ne sont pas possibles) rend nécessaire, aux yeux de l'enseignant, d'approfondir la question et de faire réfléchir les élèves sur le fait que d'autres périmètres *sont possibles*.

Une autre observation qui peut être faite est l'absence du carré parmi les rectangles ayant un périmètre de 20 cm. Le groupe 1 arrive même à refuser de prendre en compte le carré parmi les solutions possibles. Cette question aussi semble digne d'un moment d'approfondissement.

En outre, l'analyse montre que, contrairement à ce qu'ont montré d'autres expérimentations, aucun groupe n'a utilisé la méthode qui consiste à *ajouter et enlever* : en partant d'un rectangle de périmètre 20 cm, il est possible d'obtenir un autre rectangle ayant le même périmètre en ajoutant et en enlevant à la base et à la hauteur la même quantité. Cette méthode avait été jugée *a priori* importante parce qu'elle prépare à l'aspect algébrique du problème.

■ Combien de rectangles ?

En vertu des résultats de l'analyse ci-dessus, l'enseignant et l'observatrice présente pendant la séance décident de proposer, comme travail à effectuer à la maison, la consigne suivante, destinée à faire ressortir la « nécessité » des mesures qui ne sont pas entières : *Trouve des rectangles différents de ceux de tes camarades*.

La séance suivante commence par la mise en commun des rectangles trouvés à la maison. Comme le montre la photo du tableau contenant les propositions individuelles, la plupart des élèves, pour poursuivre l'objectif de trouver un rectangle *différent de ceux qui ont été trouvés par les camarades*, utilise des mesures non entières. L'élève A. B., par exemple, choisit des mesures avec trois décimales.

Ici les élèves ont un but clair à atteindre et choisissent une solution convenable (rationalité téléologique), en modifiant aussi les sous-entendus de la consigne (ils voient qu'il ne s'agit pas forcément d'utiliser des mesures entières). La dimension téléologique a un effet à niveau épistémique sur leur façon de comprendre et gérer la consigne.

Il faut remarquer que les élèves se contentent d'indiquer les mesures des rectangles, sans les dessiner. Cela rend possible, ainsi qu'on l'a observé pendant la discussion, d'imaginer également des rectangles dont les mesures comportent de nombreuses décimales et qui, dans la pratique, seraient difficilement réalisables. On peut observer ici qu'une autre voie aurait été possible : une réflexion sur la différence entre rectangle *imaginable* et rectangle pouvant être *effectivement construit*. Cela montre d'une part la richesse d'un parcours ouvert et le fait que le parcours peut donner lieu à plusieurs voies et d'autre part la nécessité d'un pilotage fort, pour ne pas prendre toutes les directions en même temps.

Figure 3 - Trouve des rectangles différents de ceux de tes camarades

■ Pourquoi ça marche ?

Au cours de la discussion en classe, apparaît la stratégie *Ajouter et enlever*. Dans la discussion, on encourage le passage de la description des stratégies (fonction 1 de l'explication) à la réflexion sur les fondements de la stratégie (fonction 5 de l'explication : *explique pourquoi tu as procédé de cette manière*). En plus de sa fonction dans la suite du parcours (il est important de trouver des stratégies pour la construction des rectangles qui soient utiles à l'élaboration algébrique de la situation problématique), cette réflexion encourage le passage de l'exécution à la réflexion et à la production d'argumentations liées à des méthodes acceptables. L'enseignant propose alors aux élèves la consigne suivante, qui vise à promouvoir d'une façon explicite une explication du type 5 : *Essaie d'écrire pourquoi, en ajoutant et en enlevant le même nombre aux deux côtés, le périmètre ne change pas.*

Les élèves illustrent d'abord la stratégie à travers des exemples numériques, puis ils introduisent des lettres pour mettre en évidence le fait que la même contribution est additionnée et par la suite enlevée, donc que les deux contributions s'annulent (en classe, les élèves ont utilisé l'expression *se neutralisent*). Il faut remarquer que les élèves, qui se rappelaient la discussion précédente sur la possibilité d'utiliser des mesures non entières, choisissent initialement une représentation littérale³ où on utilise une lettre pour la partie entière et une pour la partie décimale (X,Y et N,Y)⁴. Lors de la discussion, on arrive ensuite à une représentation littérale, où les deux côtés du rectangle de départ sont représentés par les lettres X et N, M étant est la quantité qui est ajoutée et enlevée respectivement à X et N pour obtenir un nouveau rectangle⁵.

Figure 4 - Stratégie d'ajouter et d'enlever

$$(3,5 - 1) + (6,5 + 1) = 10 \cdot 2 = 20$$

$$(X, Y - M) + (N, Y + M) = 10 \cdot 2 = 20$$

$$(X - M) + (N + M) = 2 \cdot 2 = 4$$

Les élèves sont invités à *expliquer* (fonction 5 : *explique pourquoi tu as procédé de cette manière*) la nouvelle stratégie dans les comptes rendus individuels à rédiger à la maison. Quelques élèves sont capables d'expliquer comment on trouve un nouveau rectangle et

³ Les élèves ont déjà fait l'expérience d'utilisation de lettres comme instrument de généralisation et de démonstration à l'intérieur du parcours, « Pense à un nombre » (Douek & Morselli, 2012).

⁴ On remarque que les mesures de la base et de la hauteur n'ont pas nécessairement le même chiffre après la virgule, par exemple un rectangle de base 3,2 cm et 6,8 cm de hauteur.

⁵ Au cours de la discussion, enseignant et observateur ont décidé de concentrer initialement l'attention sur la représentation littérale des deux côtés, et seulement dans un deuxième temps de réfléchir sur le signe d'égalité.

d'expliquer également pourquoi en ajoutant et en enlevant la même quantité le résultat ne change pas. On peut voir ici la mise en jeu d'une rationalité qui ne se situe pas seulement au niveau épistémique mais aussi au niveau communicationnel.

Elena, par exemple, part d'un exemple numérique, pour passer ensuite à la généralisation avec des lettres.

« Une fois écrites les deux expressions numériques, en modifiant la position des termes, nous avons vu que le résultat ne change pas. Ensuite, nous les avons généralisées par des inconnues, c'est-à-dire nous avons attribué à chaque nombre une lettre différente (inconnue). » (traduction de la figure 5)

Figure 5 - Elena, compte rendu individuel

Matteo est capable d'expliquer oralement pourquoi les deux éléments s'annulent (fonction 5 de l'explication). Il faut remarquer que les étudiants, pour justifier la « neutralisation », utilisent les propriétés des opérations étudiées précédemment, en particulier la commutativité de l'addition.

« Dans le dernier cours nous avons découvert que, en enlevant une mesure donnée et en l'ajoutant à l'autre, le périmètre ne change pas. Ensuite nous avons généralisé la règle : $(X-N)+(Y+N)=Z$. En réfléchissant sur cette règle nous avons compris que, en pratique, les zéros se « neutralisent », parce que $X+Y+N-N=Z$ » (traduction de la figure 6).

Figure 6 - Matteo, compte rendu individuel

Dans la séance suivante, l'enseignante propose d'examiner quelques comptes rendus individuels. Celui d'Achille donne lieu à un riche débat.

Achille : « Ajouter et enlever la même quantité laisse invariant le périmètre. $20 + 1 - 1 = 20 + 0 - 0$ »

Ici, les autres élèves proposent d'enlever le dernier zéro, parce que $1 - 1$ peut être remplacé par zéro, mais Achille, au début, refuse en affirmant qu'enlever zéro ne change rien, donc on peut bien le faire !

Le débat en classe porte sur le fait que l'égalité écrite par Achille n'est pas efficace du point de vue du but du problème (*expliquer pourquoi en enlevant et en ajoutant la même quantité le périmètre ne change pas*), bien que l'égalité soit correcte, puisque la propriété selon laquelle enlever zéro ne change rien est exacte. Pour convaincre Achille, il faut passer du plan épistémique (propriétés du zéro) au plan téléologique (but de l'activité). Ici on voit l'utilité du modèle de rationalité pour guider l'intervention de l'enseignant dans le débat de la classe, même si une réflexion sur les propriétés du zéro est tout à fait intéressante.

Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté la Démarche d'investigation et explication mise en place dans un contexte italien.

Tout d'abord nous avons situé la Démarche dans le contexte institutionnel italien, avec la référence aux Indications nationales et à la notion de laboratoire de mathématiques. Ensuite nous avons donné quelques repères théoriques pour la mise en place de séquence d'apprentissage qui peuvent favoriser la Démarche d'investigation et explication : les fonctions de l'explication et les dimensions de rationalité. Cela nous a amenées à une caractérisation de la Démarche d'investigation et explication en termes de tâches possibles.

Ensuite, nous avons présenté quelques extraits d'une expérience italienne de démarche d'investigation et explication au collège.

Dans la partie 6 de cet article, nous avons montré, à partir d'une consigne ouverte typique, comment les réponses des élèves peuvent être lues en termes de fonctions de l'explication et de dimensions de rationalité, selon le cadre intégré déjà présenté par Morselli & Levenson (2014).

Une caractéristique importante est le fait que la démarche d'investigation et explication donne un rôle très actif aux élèves, mais aussi à l'enseignant, qui doit être capable de gérer les contributions des élèves et de saisir toutes les occasions d'apprentissage. Nous avons montré un exemple de question supplémentaire, qui, à partir des productions effectives des élèves, peut être utilisé pour ouvrir d'autres pistes d'investigation et explication.

Ensuite nous avons illustré une autre caractéristique importante des séquences, c'est-à-dire la balance entre travail à l'école et travail à la maison, et la place donnée à l'analyse des productions des élèves, qui peuvent donner lieu à des débats au niveau méta. L'épisode d'Achille montre aussi que les repères théoriques sont utiles, pas seulement pour la conception des consignes, mais aussi pour la gestion des séquences. Dans le cas d'Achille, le cadre de rationalité guide l'enseignante à centrer le débat non seulement sur le niveau épistémique mais aussi sur le niveau téléologique.

D'une part, l'analyse se concentre donc sur les procédés mis en place par les élèves face à des consignes typiques. Les consignes ouvertes et les tâches d'explication favorisent l'approche de la preuve et la mise en jeu de comportements rationnels sur le plan soit épistémique, soit communicationnel et téléologique. Les comptes rendus sont à la fois des moments de réflexion individuelle, mais aussi des points de départ pour une activité de comparaison et de débat.

D'autre part, l'analyse permet de réfléchir sur la dialectique entre séquence planifiée et séquence réelle ainsi que sur l'importance d'un projet flexible et ouvert aux variations tenant compte des contributions et des idées des élèves. Le rôle de l'enseignant reste crucial pour saisir les occasions de variation, pour promouvoir toutes les fonctions de l'explication et pour faire vivre les trois dimensions de la rationalité au sens de Habermas.

Bibliographie

ANICHINI G., ARZARELLO F., CIARRAPICO L., ROBUTTI O. (2003), *Matematica 2001. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica*, Lucca, Matteoni Stampatore.

BALACHEFF N. (1987), « Processus de preuve et situations de validation », *Educational Studies in Mathematics*, n°18, p.147-176.

BARTOLINI BUSSI M.G. (1996), « Mathematical discussion and perspective drawing in elementary school », *Educational studies in mathematics*, n°31(1-2), p.11-41.

BOERO P. (2007), *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam, The Netherlands, Sense Publishers.

BOERO P., DOUEK N., MORSELLI F. & PEDEMONTE B. (2010), « Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation », *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Belo Horizonte, Brazil, PME, volume 1, p.179-209.

DOUEK N. & MORSELLI F. (2012), « Preuve et algèbre au collège : de la conception d'une séquence d'apprentissage à l'évolution du cadre théorique de référence », *Revue Recherches en Didactiques des mathématiques*, Numéro hors série *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*, L. Coulanges & J.P. Drouhard (éditeurs), p.283-304.

DURAND-GUERRIER V., BOERO P., DOUEK N., EPP S.S., TANGUAY D. (2012), « Argumentation and proof in the Mathematics classroom », *Proof and proving in Mathematics Education, New ICMI Study Series 15*, G. Hanna & M. de Villiers (éd.), Springer Science + Business media B.V., p.349-367.

HABERMAS J. (2001), *Vérité et justification*, Paris, Gallimard.

HANNA G. & DE VILLIERS M. (éd.) (2012), *Proof and proving in mathematics education, New ICMI Study Series 15*, G. Hanna & M. de Villiers (éd.), Springer Science + Business media B.V.

LEVENSON E. & BARKAI R. (2013), « Exploring The Functions Of Explanations In Mathematical Activities For Children Ages 3-8 Year Old: The Case Of The Israeli Curriculum », *Proceedings of CERME 8*, http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG13/WG13_Levenson.pdf

LIN F.L., YANG K.L., LEE K.H., TABACH M., STYLINANIDES G. (2012), « Principles for task design for conjecturing and proving », *Proof and proving in Mathematics Education, New ICMI Study Series 15*, G. Hanna & M. de Villiers (éd.), Springer Science + Business media B.V., p.305-325.

MATHERON Y., MORSELLI F., RENE DE COTRET S., SCHNEIDER M. (2012), « La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques, fondements et méthodes. Compte-rendu du Groupe de Travail n°10 », *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle. Actes du colloque EMF2012*, J.-L. Dorier & S. Coutat (éd.), GT10, p.1259-1281, <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>.

MATHERON Y. (2010), « "Démarche d'investigation" et Parcours d'Etude et de Recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système », *Actes du 17^e Colloque de la CORFEM*, B. Grugeon (éd.), Besançon, Université de Franche-Comté, p.17-39), <http://irem.univ-mrs.fr/site/sites/default/files/YMDémarche%20d'investigation.pdf>

MORSELLI F. & BOERO P. (2009), « Habermas' construct of rational behaviour as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof », *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education*, F.L. Lin & al. (éd.), Taipei, Taiwan, Normal University, volume 2, p.100-105.

MORSELLI F. & BOERO P. (2011), « Using Habermas' theory of rationality to gain insight into students' understanding of algebraic language », *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*, J. Cai & E. Knuth (éd.), Springer, p.453-481.

MORSELLI F. (2013), «The “Language and argumentation” project: researchers and teachers collaborating in task design». In Margolinas, C. (Ed.), *Proceedings of ICMI Study 22 – Task design in mathematics education*, p.481-490.

MORSELLI F. & LEVENSON E. (2014), « Functions of explanations and dimensions of rationality : combining frameworks ». *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, p.250-257.

STYLIANIDES A.J. (2007), «Proof and proving in school mathematics», *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, p.289-321.

La démarche d'investigation depuis la théorie anthropologique du didactique : les parcours d'étude et de recherche

Floriane Wozniak¹

Résumé

Nous aborderons la démarche d'investigation comme la mise en œuvre d'une praxéologie dont l'objet est de construire une réponse à une question. Il s'agit alors de transformer le milieu de la situation adidactique – regardé comme « un bout de nature » dénué d'intention didactique – en une source d'informations, un média. Ce processus didactique, appelé dialectique des médias et des milieux en théorie anthropologique du didactique, fournit les matériaux à partir desquels la réponse peut être produite. Le schéma herbartien qui décrit la pédagogie de l'enquête propre aux parcours d'étude et de recherche peut alors être regardé comme une modélisation de la démarche d'investigation. Nous montrerons comment ce modèle permet ainsi d'envisager les conditions sur le milieu – relatives à la topogenèse, la mésogenèse et la chronogenèse – comme conditions du recours effectif à une démarche d'investigation.

La théorie anthropologique du didactique se donne comme programme de recherche l'étude des conditions et des contraintes de la diffusion des savoirs et savoir-faire – regardés comme étroitement imbriqués et modélisés par les praxéologies – vers les personnes et les institutions. Pour Yves Chevallard (2007, p.12), « *L'idolâtrie, le fétichisme des œuvres et des savoirs a, en quelques décennies, créé un paysage scolaire ravagé, où l'on étudie des œuvres "privées de sens", comme on dit, qui ne seraient plus désirables qu'en elles-mêmes – en soi et pour soi – et non pour ce qu'elles permettraient de comprendre et de faire en le comprenant.* » Or ce fétichisme des œuvres, cette évanescence des questions qui les ont fait naître trouvent leur source selon Michel Meyer (2010, p.2), dans la quête de certitude des hommes. Ainsi, « *la crainte de ne rester qu'avec du problématique et la quête de certitude ont effacé le questionnement de l'ordre des résultats* » et « *le fondement réel de la démarche, le questionnement, a été ainsi expulsé de la pensée comme un moment inessentiel par rapport au résultat, aux réponses.* » Mais « *si les hommes préfèrent les certitudes, il n'empêche qu'elles aussi résultent de questions à résoudre. Comme elles disparaissent une fois résolues, cela conforte l'impression que tout commence avec les "réponses", qui dès lors ne répondent plus à rien, se soutenant d'elles-mêmes au nom de "la" vérité* ». Le phénomène didactique qu'Yves Chevallard (2004) appelle la « *monumentalisation des savoirs* », serait l'accomplissement de leur inéluctable destin. C'est alors à l'école de redonner vie aux savoirs pétrifiés en faisant renaître les questions dont ils sont issus. C'est pour répondre à ce besoin que la notion de parcours d'étude et de recherche fondée sur une pédagogie de l'enquête a été introduite (Chevallard, 2011a).

L'objet de ce texte est de présenter le schéma herbartien qui décrit l'étude d'une question par un système didactique comme un modèle potentiel de la démarche d'investigation. Ceci nous conduira à mettre en évidence comment les conditions sur le milieu peuvent être considérées comme des critères d'un recours à cette démarche.

¹ Maître de conférences, Université de Strasbourg, ESPE de l'académie de Strasbourg, Institut de Recherches Interdisciplinaires sur les Sciences et la Technologie (IRIST).