

CONNAISSANCE COMMUNE ET CONSENSUS (*)

Mots-clés : Connaissance, commerce, consensus.

Key words : Common Knowledge, Consensus.

I. — INTRODUCTION

La question de la connaissance des agents est essentielle en économie et en théorie des jeux. Son imperfection est une contrainte dans le programme des agents au même titre qu'une limite technologique. Une entreprise en situation de monopole qui connaît les disponibilités à payer des consommateurs peut pratiquer une discrimination par les prix, un employeur qui observe l'effort de ses salariés peut leur offrir le salaire tel qu'il les incite à fournir l'effort optimal. Prenons l'exemple de deux firmes *A* et *B* qui se font concurrence en quantité sur un marché. Si aucune des deux firmes ne connaît le niveau de production de l'autre, toutes les deux produisent leur meilleure réponse face à leurs croyances sur la production de l'autre. Supposons maintenant que la firme *A* ait la possibilité de connaître le niveau de production de la firme *B* avant de produire elle-même. Elle va pouvoir produire sa meilleure réponse face au niveau de production effectif de *B* et faire plus de profit. Dans ce cas la firme *A* tire avantage de sa meilleure connaissance. Ce n'est plus le cas si la firme *B* apprend que la firme *A* peut observer son niveau de production avant de produire. Dans ce cas, la firme *B* devient *leader* de Stackelberg. Elle choisit alors son niveau de production en anticipant la meilleure réponse de la firme *A*, et

(*) Je tiens à remercier David Encaoua, Françoise Forges, Frédéric Koessler, Philippe Solal, Jean-Marc Tallon et Nicolas Vieille, ainsi que deux rapporteurs anonymes pour leurs nombreuses remarques sur cet article. Réalisé avec le soutien financier du ministère français de la Recherche (Actions Concertées Incitatives).

recupère la plus grande part du surplus. Cet exemple simple montre que, plus encore que la connaissance des agents, c'est la connaissance de la connaissance des agents, ou connaissance interactive, qui est importante.

Un état de connaissance interactive particulier est la connaissance commune. Un événement est connaissance commune dans un groupe d'agents si tous les agents connaissent l'événement, tous les agents savent que tous les agents connaissent l'événement, tous les agents savent que tous les agents savent que tous les agents connaissent l'événement, etc. L'exemple le plus connu impliquant un raisonnement basé sur de la connaissance commune est celui des trois chapeaux. Trois petites filles sont assises en cercle, chacune portant un chapeau pouvant être rouge ou blanc. Chacune observe les autres, mais aucune ne peut voir la couleur de son propre chapeau. Supposons que les trois chapeaux soient rouges. Si on demande aux trois filles si elles peuvent affirmer avec certitude qu'elle est la couleur de leur chapeau, toutes répondent non. Supposons maintenant qu'on leur dise qu'au moins un chapeau est rouge, et qu'on leur pose à nouveau la question. À première vue, la réponse devrait être la même puisque, chaque fille observant deux chapeaux rouges, chacune savait déjà qu'au moins un des chapeaux était rouge. La première fille à qui l'on pose la question ne peut pas répondre. La deuxième non plus. Pourtant, la troisième fille peut affirmer avec certitude que son chapeau est rouge. Pourquoi? Chaque fille savait déjà qu'au moins un chapeau était rouge, mais lorsque le professeur le leur a annoncé publiquement, il a rendu l'information *connaissance commune*. La première fille observe deux chapeaux rouges mais ne peut rien en déduire. Elle révèle ainsi aux deux autres filles qu'au moins un de leurs chapeaux est rouge. La deuxième ne peut rien en déduire non plus. Or la troisième sait que si son chapeau était blanc, la deuxième aurait déduit du fait que la première ne connaisse pas la couleur de son chapeau que son propre chapeau était rouge. Comme elle ne l'a pas fait, la troisième comprend que son chapeau est rouge.

Une définition formelle et opératoire de la notion de connaissance commune a été introduite en économie par Aumann [1976]. Suivant les développements du modèle d'*espace des états* de Savage [1954] et Harsanyi [1967], il suppose que l'information des agents peut être représentée par une partition de l'ensemble des états du monde, et il définit la partition de connaissance commune dans un groupe d'agents en se basant sur leurs partitions individuelles. Dans ce cadre, Aumann [1976] montre qu'« il est impossible d'être d'accord sur un désaccord », c'est-à-dire que si deux agents ont les mêmes croyances *a priori* et que leurs croyances *a posteriori* sont connaissance commune en un état, alors ces croyances *a posteriori* sont identiques. Le résultat d'Aumann, et plus généralement la notion de connaissance commune, ont des implications importantes pour l'analyse théorique des paris et des échanges entre individus rationnels. Considérons le cas de deux spéculateurs sur le marché d'une action ayant reçu des informations contraires sur l'évolution future du prix de l'action. Le spéculateur *A*, qui pense que le cours de l'action va baisser, rencontre le spéculateur *B* et lui offre ses actions à un prix inférieur à celui du marché.

Le marché est conclu, et cet événement est rendu connaissance commune entre A et B par une poignée de main. Si le fait que A et B veulent échanger est connaissance commune, alors il est également connaissance commune entre eux que A croit que le prix de l'action va baisser et que B croit que le prix de l'action va monter. Or d'après le théorème d'Aumann, c'est impossible ! Peut-on alors expliquer la spéculation et les paris par des différences d'information entre les agents ?

Le résultat d'Aumann a donné lieu à une vaste littérature traitant des implications de la connaissance commune sur le comportement des agents, et de l'émergence de situations de connaissance commune. Geanakoplos [1994] passe en revue cette littérature dans un article très complet et relativement technique, tandis que Samuelson [2004] en adopte une présentation plus accessible. On prend ici le parti de présenter en détail les résultats de la littérature, ainsi que les techniques de modélisation de la connaissance. Cependant, on ne traite pas des implications de la connaissance commune de la rationalité en termes de sélection d'équilibres en théorie des jeux. Dans les sections 2 et 3, on présente la modélisation de la connaissance et de la connaissance commune dans le modèle des partitions d'information. En section 4, on présente le résultat fondateur d'Aumann, selon lequel il ne peut pas être connaissance commune entre deux agents rationnels qu'ils ont des croyances *a priori* différentes. Certains auteurs ont étudié les conditions sous lesquelles la communication permet de créer des situations de connaissance commune. On passe en revue ces résultats dans la section 5. Enfin, on détaille les nombreux travaux qui se sont attachés à affaiblir les conditions du théorème d'Aumann dans la section 6.

II. — MODÉLISER LA CONNAISSANCE

L'outil fondamental que l'on utilise en général pour modéliser la connaissance en théorie de la décision et en théorie des jeux est *l'état du monde*. Un état du monde décrit tous les faits pertinents pour les propriétés du modèle. Il décrit les faits objectifs passés, présents et futurs, c'est-à-dire l'environnement physique, les actions des agents, et leurs fonctions d'utilité ; il décrit également les faits de croyances, c'est-à-dire non seulement les croyances sur les faits objectifs, mais aussi les croyances sur les croyances des agents à tous les niveaux d'itération. L'ensemble des états du monde est noté Ω . Les propriétés que le modèle permet de discuter s'identifient par hypothèse aux sous-ensembles de Ω , ou *événements*, vérifiant ces propriétés. Considérons par exemple le cas où un état du monde décrit le résultat du lancement d'un dé à six faces. Il y a alors six états du monde, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$, $\omega_4 = 4$, $\omega_5 = 5$ et $\omega_6 = 6$. Si on s'intéresse au fait que le tirage du dé est pair ou impair, on s'intéresse aux événements $I = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ et $P = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ qui sont équivalents aux propriétés « le tirage est impair » et « le tirage est pair ». On dit qu'un événement E est vrai ou est réalisé en l'état ω si $\omega \in E$. Ici, l'événement « le tira-

ge est impair » est vrai si le tirage est 1, ou 3, ou 5, c'est-à-dire si l'état du monde réalisé est ω_1 , ω_3 ou ω_5 .

On décrit la connaissance d'un agent i à l'aide d'un *opérateur de connaissance individuel* K_i . Un opérateur de connaissance est une fonction $K_i : 2^\Omega \rightarrow 2^\Omega$, qui à tout événement E associe l'ensemble des états où l'agent i connaît E . Ainsi, la propriété « l'agent i sait E » est traitée comme un événement particulier : c'est l'ensemble des états du monde où la proposition « l'agent i sait E » est vraie. On le note $K_i(E)$. $\bar{K}_i(E)$ désigne l'événement « i ne sait pas K ». On suppose que pour tout i , K_i vérifie les cinq axiomes suivants.

A1. $\Omega \subseteq K_i(\Omega)$. Cet axiome est appelé *l'axiome de conscience*, car il signifie que i peut identifier l'ensemble des mondes possibles : en chaque état du monde, l'agent connaît l'ensemble des possibles Ω . Ainsi, il ne peut pas être surpris par une contingence qu'il n'aurait pas anticipée.

A2. $K_i(E \cap F) = K_i(E) \cap K_i(F)$. i connaît les événements E et F si et seulement s'il connaît l'événement E et il connaît l'événement F . Cet axiome a pour conséquence la propriété *d'omniscience logique*. Si $E \subseteq F$, alors $K_i(E) \subseteq K_i(F)$, ce qui signifie que lorsque qu'un agent connaît un événement, il connaît aussi toutes les implications logiques de cet événement.

A3. $K_i(E) \subseteq E$. Cet axiome est appelé *l'axiome de vérité*, car il signifie que si i connaît un événement, alors cet événement est vrai. Si i connaît l'événement E en un état ω , alors E est réalisé en ω . Cet axiome implique que les agents ne peuvent pas se tromper en croyant impossible l'état qui s'est effectivement réalisé.

A4. $\bar{K}_i(E) \subseteq K_i(\bar{K}_i(E))$. Cet axiome est appelé *l'axiome d'introspection positive*. Il signifie que si i connaît un événement, alors il sait qu'il le connaît. Les agents sont conscients de ce qu'ils savent.

A5. $\bar{K}_i(E) \subseteq K_i(\bar{K}_i(E))$. Cet axiome est celui *d'introspection négative*. Si i ne connaît pas l'événement E , alors il sait qu'il ne le connaît pas. Cet axiome interdit aux agents d'ignorer leur propre ignorance.

Prenons l'exemple d'un individu qui en observe un autre d'une distance de 30 mètres. La personne observée a deux caractéristiques : elle peut être petite (P) ou grande (G), et elle porte un manteau qui peut être noir (N), vert (V) ou rouge (R). L'ensemble des états du monde pertinent est alors

$$\Omega = \{(P,N),(P,V),(P,R),(G,N),(G,V),(G,R)\}$$

On suppose qu'on informe l'observateur de l'ensemble des états du monde pertinent en lui disant qu'il va devoir répondre aux questions : *Le manteau porté par cette personne est-il noir, rouge ou vert ?* et *Cette personne est-elle grande ou petite ?* L'axiome A1 est donc vérifié.

Considérons dans un premier temps que l'observateur est myope, et qu'à cette distance, il ne peut pas distinguer une personne grande d'une personne petite. Cependant, il parvient très bien à distinguer les couleurs. Dans ce cas, les cinq axiomes sont vérifiés. En chaque état du monde, l'observateur connaît la couleur du manteau et il ne se trompe pas. Par contre, il ne sait jamais si la personne est grande ou petite, et pense toujours que les deux tailles sont possibles.

Supposons maintenant que l'observateur, en plus d'être myope, soit très sensible au fait que le noir allonge les silhouettes et n'en ait pas conscience. Dès que le manteau est noir, il pense que la personne est grande. Dans ce cas, l'axiome de vérité n'est pas vérifié, car l'observateur se trompe. En effet, l'ensemble des états où il pense observer une grande personne vêtue de noir est $K(\{(G,N)\}) = \{(P,N),(G,N)\} \not\subseteq \{(G,N)\}$.

Imaginons à présent que l'observateur soit daltonien mais pas myope. Il arrive à distinguer le rouge du noir, mais il ne distingue ni le rouge du vert, ni le noir du vert. Sous l'état (P,R) , l'observateur sait que le manteau est rouge ou vert, et sait qu'il n'est pas noir, puisqu'il distingue le rouge du noir. Cependant, l'observateur ne sait pas qu'il sait que le manteau n'est pas noir. Pour lui, il est possible que le manteau soit vert, et il sait que si le manteau était vert, il n'arriverait pas à savoir si le manteau est vert ou noir. Ainsi l'axiome d'introspection positive n'est pas vérifié.

De plus, sous l'état (P,R) , l'observateur ne sait pas que le manteau est rouge, puisqu'il pense qu'il est possible que le manteau soit vert. Or si le manteau était vert, l'observateur ne saurait pas s'il est vert ou noir, mais il saurait que le manteau n'est pas rouge, puisqu'il distingue le noir du rouge. Ainsi, sous l'état (P,R) , l'observateur ne sait pas que le manteau est rouge, mais il ne sait pas non plus qu'il ne le sait pas, puisqu'il pense possible un état où il saurait que le manteau n'est pas rouge. Ainsi, l'axiome d'introspection négative n'est pas non plus vérifié.

Un système de connaissance satisfaisant ces cinq axiomes est appelé système $S5$ par Kripke [1963], ou *modèle épistémique fort* par Bacharach [1985], ou encore *structure à la Aumann*. En termes de représentation, supposer que la connaissance des agents vérifie le système $S5$ est équivalent à supposer qu'elle est représentée par une *partition d'information*. On appelle partition d'information d'un agent i une partition (1) Π de Ω qui représente la capacité de l'agent à distinguer entre eux les états du monde. On note $\Pi(\omega)$ la cellule de la partition Π qui contient ω . Quand l'état $\omega \in \Omega$ se réalise, l'agent sait que la

- (1) Π est une partition de Ω si
- $\forall A \in \Pi, A \subseteq \Omega$
 - $\cup_{A \in \Pi} A = \Omega$
 - $\forall A, A' \in \Pi, A \neq A', A \cap A' = \emptyset$

cellule de sa partition contenant ω , $\Pi(\omega)$, se réalise, mais il ne sait pas quel état dans $\Pi(\omega)$ s'est réalisé. Ainsi, plus la partition d'un agent est fine (2), plus son information est précise. On dit qu'un agent muni de la partition Π connaît l'événement E en l'état ω si et seulement si :

$$\Pi(\omega) \subseteq E$$

L'idée sous-jacente est que si l'événement E est vrai en tout état que l'agent croit possible en ω , alors l'agent est informé que E est vrai. On dit qu'un événement est *auto-évident* pour cet agent si l'agent connaît E en tout état où E est vrai, c'est-à-dire si :

$$\forall \omega \in E, \Pi(\omega) \subseteq E$$

Un événement auto-évident pour un agent ne peut pas se réaliser à moins que l'agent ne le connaisse. Bacharach [1985] a montré qu'un modèle de connaissance avec partition d'information est complètement caractérisé par les cinq axiomes du système S5.

Théorème 1 (Bacharach [1985]) Soit K un opérateur de connaissance sur Ω . K satisfait le système S5 si et seulement si il existe une partition d'information de Ω notée Π telle que $\forall E \subseteq \Omega$,

$$K(E) = \{ \omega' \in \Omega \mid \Pi(\omega') \subseteq E \}$$

Dans la suite, on se placera toujours dans un système de représentation partitionnel. L'intérêt d'avoir une axiomatisation du modèle des partitions d'information est de pouvoir l'affaiblir en choisissant quels axiomes supprimer. On verra dans la suite que de nombreux travaux ont été consacrés à l'affaiblissement du modèle des partitions d'information, en particulier à la suppression de l'axiome d'introspection négative.

III. — MODÉLISER LA CONNAISSANCE COMMUNE

Jusqu'à présent, nous avons utilisé la notion de connaissance commune en nous basant sur sa définition informelle, attribuée à Lewis [1969]. Un événement est connaissance commune dans un groupe d'agents quand tout le monde sait l'événement, tout le monde sait que tout le monde sait l'événement, etc. Formellement, en notant K_i l'opérateur de croyance de l'agent i , on dit qu'un événement E est connaissance commune en un état ω parmi un ensemble d'agents I si pour tout entier n , et pour toute suite (i_1, \dots, i_n) , telle que $i_k \in I$,

(2) Une partition Π est plus fine qu'une partition Π' si et seulement si chaque cellule de Π est contenue dans une cellule de Π' .

on a $\omega \in K_{i_1}(K_{i_2}(\dots K_{i_n}(E) \dots))$. Ainsi, même si le nombre d'agents et les partitions sont finis, il y a un nombre infini de conditions à vérifier pour savoir si un événement est connaissance commune. Dans le modèle des partitions d'information, Aumann [1976] a montré l'équivalence de cette définition avec une autre, plus opératoire, selon laquelle il ne suffit que d'un nombre fini d'étapes pour vérifier qu'un événement est connaissance commune, lorsque le nombre d'agents et si les partitions d'information sont finis.

On définit l'union (3) des partitions $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ comme le plus fin grossissement commun des partitions $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$, c'est-à-dire la plus fine partition M telle que $\forall \omega \in \Omega, \forall i = 1, \dots, n, \Pi_i(\omega) \subseteq M(\omega)$.

Théorème 2 (Aumann [1976]) Soient $(\Pi_i)_{i \in I}$ les partitions d'information des agents $i \in I$. Un événement E est connaissance commune parmi les agents sous l'état ω si et seulement si $M(\omega) \subseteq E$, M désignant l'union des partitions $(\Pi_i)_{i \in I}$.

Considérons deux agents A et B munis des partitions suivantes :

$$\begin{aligned} \Pi_A &: \{\omega_1\} \{\omega_2, \omega_3\} \{\omega_4, \omega_5\} \\ \Pi_B &: \{\omega_1, \omega_2\} \{\omega_3\} \{\omega_4\} \{\omega_5\} \end{aligned}$$

L'union de ces deux partitions est $M : \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \{\omega_4, \omega_5\}$. D'après la caractérisation d'Aumann [1976], tout événement E contenant $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ est connaissance commune en ω_1, ω_2 ou ω_3 . Comment interpréter le fait que l'événement $F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ est connaissance commune en ω_1 ? En ω_1 , B sait F puisque $\Pi_B(\omega_1) = \{\omega_1, \omega_2\} \subseteq F$. L'événement « B sait F », c'est-à-dire l'ensemble des états sous lesquels B sait F , est $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Par conséquent l'événement « B sait F » est identique à l'événement F . A sait F puisque $\Pi_A(\omega_1) = \{\omega_1\} \subseteq F$. Peut-on en déduire que A sait que B sait F ? Comment A sait-il que F est aussi l'événement « B sait F »? Il faut évidemment supposer que A « connaît » la partition de B . L'événement « A sait que B sait F » est $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ c'est-à-dire F . B sait F mais on ne peut en déduire que B sait que A sait que B sait F que si A « connaît » la partition de B et si B sait que A « connaît » sa partition. En continuant le raisonnement, on voit que pour que M représente la partition de connaissance commune, il faut nécessairement supposer que les partitions de A et B soient connaissance commune entre eux. Quel est le sens de cette hypothèse? D'après Aumann [1987, pp. 9-10], la connaissance commune des partitions n'est pas une hypothèse mais une tautologie, implicite dans le modèle lui-même. Un état du monde est une description complète du monde, incluant les partitions de A et B . Si A ne connaissait pas la partition de B mais avait une croyance sur un ensemble de partitions possibles, alors cet incertain serait capturé dans l'espace des états. Ainsi, la doctrine Harsanyi-

(3) Une union de partitions est appelée *meet* en anglais.

Aumann suggère que la connaissance commune des partitions est une tautologie, dès lors que l'on considère un ensemble d'états du monde suffisamment grand. Illustrons l'argument d'Aumann avec un exemple simple. Partons d'une situation où l'ensemble des états du monde est $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. Considérons le cas où il est connaissance commune entre A et B que la partition de A est $P_A : \{s_1, s_2\} \{s_3\}$, et où A ne sait pas si la partition de B est $P_B^1 : \{s_1\} \{s_2, s_3\}$ ou $P_B^2 = \{s_1, s_2, s_3\}$. En incorporant l'incertitude de A dans la description des états du monde, on obtient six états du monde, qui décrivent l'état s et la partition de B :

$$\omega_1 = (s_1, P_B^1), \omega_2 = (s_1, P_B^2), \omega_3 = (s_2, P_B^1), \omega_4 = (s_2, P_B^2), \omega_5 = (s_3, P_B^1), \omega_6 = (s_3, P_B^2)$$

Dans cet espace d'états du monde, les partitions d'information sont $\Pi_A : \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \{\omega_5, \omega_6\}$ et $\Pi_B : \{\omega_1\} \{\omega_3, \omega_5\} \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, et elles sont connaissance commune entre A et B . En effet, sous les états $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 , A pense que l'état du monde s peut être s_1 ou s_2 , et que la partition de B sur S peut être P_B^1 ou P_B^2 . A sait que si la partition de B est P_B^1 , B distingue entre s_1 d'une part, et s_2 et s_3 d'autre part. Ainsi, A sait que B distingue entre $\{\omega_1\}$ et $\{\omega_3, \omega_5\}$. A sait aussi que si la partition de B est P_B^2 , B ne fait pas la différence entre s_1, s_2 et s_3 . Par conséquent, A sait que B ne distingue pas entre ω_2, ω_4 et ω_6 . Ainsi, sous les états $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 , A sait que la partition de B est Π_B . Le même raisonnement s'applique aux états ω_5 et ω_6 et peut être itéré à l'infini d'après la doctrine Harsanyi-Aumann. En fait, cette doctrine n'est vraie que sous certaines conditions. Même dans le plus « gros » ensemble d'états du monde possible, où un état du monde décrit toutes les hiérarchies de croyances des agents sur les partitions des autres, certains joueurs peuvent encore avoir plusieurs partitions possibles (Fagin *et al.* [1991]). Cependant, Fagin *et al.* [1992] montrent que pour chaque agent, il existe une unique partition d'information du « gros » ensemble d'états du monde dont les cellules sont des ensemble fermés.

Reconsidérons maintenant l'exemple des trois chapeaux d'un point de vue formel. Étant donné le problème qui nous intéresse ici, un état du monde décrit les couleurs des chapeaux des trois filles. Il y a ainsi huit états du monde. Avant la remarque du professeur, chaque petite fille observe les chapeaux des deux autres, mais ne connaît pas la couleur de son propre chapeau. Ainsi, les partitions des trois filles sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \{(RRR), (BRR)\} \{(RBR), (BBR)\} \{(RRB), (BRB)\} \{(RBB), (BBB)\} \\ \Pi_2 &: \{(RRR), (RBR)\} \{(BRR), (BBR)\} \{(RRB), (RBB)\} \{(BRB), (BBB)\} \\ \Pi_3 &: \{(RRR), (RRB)\} \{(BRR), (BRB)\} \{(RBR), (RBB)\} \{(BBR), (BBB)\} \end{aligned}$$

Si les trois chapeaux sont rouges, c'est-à-dire si l'état (RRR) se réalise, la fille 1 est informée de $\{(RRR), (BRR)\}$. Elle sait que les chapeaux des deux autres sont rouges, mais elle ne sait pas si le sien est rouge ou blanc, donc elle ne peut pas distinguer entre les états (RRR) et (BRR) . Lorsque le professeur annonce aux trois filles qu'au moins un des chapeaux est rouge, il devient connaissance commune que chaque fille peut distinguer l'état (BBB) de tous

les autres états. Par conséquent, il devient connaissance commune entre les trois filles que leurs partitions sont :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &: \{(RRR),(BRR)\}\{(RBR),(BBR)\}\{(RRB),(BRB)\}\{(RBB)\}\{(BBB)\} \\ \Pi_2 &: \{(RRR),(RBR)\}\{(BRR),(BBR)\}\{(RRB),(RBB)\}\{(BRB)\}\{(BBB)\} \\ \Pi_3 &: \{(RRR),(RRB)\}\{(BRR),(BRB)\}\{(RBR),(RBB)\}\{(BBR)\}\{(BBB)\}\end{aligned}$$

À ce stade, la fille 1 ne connaît la couleur de son chapeau que sous les états (RBB) et (BBB) . Sous l'état (RRR) , elle ne peut pas distinguer (RRR) et (BRR) . Les filles 2 et 3 en infèrent que l'état (RBB) est à distinguer des autres états du monde. Les partitions deviennent :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &: \{(RRR),(BRR)\}\{(RBR),(BBR)\}\{(RRB),(BRB)\}\{(RBB)\}\{(BBB)\} \\ \Pi_2 &: \{(RRR),(RBR)\}\{(BRR),(BBR)\}\{(RRB)\}\{(RBB)\}\{(BRB)\}\{(BBB)\} \\ \Pi_3 &: \{(RRR),(RRB)\}\{(BRR),(BRB)\}\{(RBR)\}\{(RBB)\}\{(BBR)\}\{(BBB)\}\end{aligned}$$

À ce stade, la fille 2 connaît la couleur de son chapeau sous les états (RRB) , (RBB) , (BRB) et (BBB) . Le fait qu'elle annonce qu'elle connaît sa couleur ou pas permet alors aux autres de distinguer entre les états $\{(RRB),(RBB),(BRB),(BBB)\}$ et les états $\{(RRR),(RBR),(BRR),(BBR)\}$. Par conséquent, la fille 3 apprend de l'information et révisé sa partition, tandis que la fille 1 n'apprend rien.

$$\begin{aligned}\Pi_1 &: \{(RRR),(BRR)\}\{(RBR),(BBR)\}\{(RRB),(BRB)\}\{(RBB)\}\{(BBB)\} \\ \Pi_2 &: \{(RRR),(RBR)\}\{(BRR),(BBR)\}\{(RRB)\}\{(RBB)\}\{(BRB)\}\{(BBB)\} \\ \Pi_3 &: \{(RRR)\}\{(RRB)\}\{(BRR)\}\{(BRB)\}\{(RBR)\}\{(RBB)\}\{(BBR)\}\{(BBB)\}\end{aligned}$$

La fille 3 est alors capable de donner la couleur de son chapeau en chacun des états, tandis que les filles 1 et 2 en sont incapables.

IV. — « AGREEING TO DISAGREE »

Considérons à nouveau l'exemple des deux spéculateurs donné dans l'introduction d'un point de vue formel. Supposons que l'ensemble des états du monde Ω permette de considérer l'événement E : « le cours de l'action X va monter » et son complémentaire \bar{E} : « le cours de l'action X va baisser ». Les spéculateurs A et B sont munis de partitions Π_A et Π_B sur Ω , et ont la même croyance *a priori* P sur Ω . On suppose que les spéculateurs se comportent de la manière suivante. S'ils pensent que le cours de l'action va monter avec une probabilité supérieure à $1/2$, ils achètent l'action. S'ils pensent que le cours va baisser avec une probabilité supérieure à $1/2$, ils vendent l'action. S'ils pensent que le cours va monter ou baisser avec la même probabilité, ils n'échangent pas. Lorsque l'état ω se réalise, les spéculateurs reçoivent chacun l'information privée $\Pi_A(\omega)$ et $\Pi_B(\omega)$. Chacun révisé sa croyance sur l'événement E qui devient $P(E | \Pi_A(\omega))$ et $P(E | \Pi_B(\omega))$. A propose à B de lui vendre ses actions, ce qui signifie que $P(E | \Pi_A(\omega)) < 1/2$, et B accepte de les acheter, ce qui signi-

fié que $P(E | \Pi_B(\omega)) > 1/2$. Or si A et B acceptent l'échange, le fait qu'ils acceptent l'échange devient automatiquement connaissance commune entre les deux. Par conséquent, il est connaissance commune en ω que la probabilité de E a posteriori pour A est strictement inférieure à $1/2$, et est strictement supérieure à $1/2$ pour B . En notant M la partition de connaissance commune entre les deux agents, cela s'écrit :

$$M(\omega) \subseteq \{\omega' \in \Omega \mid P(E | \Pi_A(\omega')) < 1/2 \text{ et } P(E | \Pi_B(\omega')) > 1/2\}$$

D'après la définition de l'union de deux partitions, la partition M est telle que pour tout ω , $\Pi_A(\omega) \subseteq M(\omega)$ et $\Pi_B(\omega) \subseteq M(\omega)$. Par conséquent, chaque cellule de la partition de connaissance commune est une union (nécessairement disjointe) de cellules de Π_A et une union de cellules de Π_B . Comme $M(\omega)$ est une union disjointe de cellules de Π_A , $P(E | M(\omega))$ est une combinaison convexe des valeurs $P(E | \Pi_A(\omega'))$ telles que $\Pi_A(\omega') \subseteq M(\omega)$. Or pour tout $\omega' \in M(\omega)$, on a $P(E | \Pi_A(\omega')) < 1/2$. Par conséquent, $P(E | M(\omega)) < 1/2$. Comme $M(\omega)$ est aussi une union disjointe de cellules de Π_B , on applique le même raisonnement avec Π_B et on obtient $P(E | M(\omega)) > 1/2$.

Ainsi, il ne peut pas être connaissance commune entre deux agents que la croyance a posteriori de l'un soit strictement supérieure à une certaine valeur et que celle de l'autre soit inférieure à cette valeur. Ce résultat est une légère généralisation du théorème fondateur d'Aumann [1976], qui s'énonce généralement comme « *Il est impossible que des agents rationnels soient d'accord sur un désaccord* ».

Théorème 3 (Aumann [1976]) *Si deux agents ont la même croyance a priori sur Ω , et si leurs croyances a posteriori pour un événement sont connaissance commune en un état, alors il est connaissance commune en cet état que ces croyances a posteriori sont les mêmes.*

En fait, c'est un abus de langage de dire que des agents rationnels ne peuvent pas être d'accord sur un désaccord. Il peut être connaissance commune entre deux agents qu'ils n'ont pas les mêmes croyances a posteriori. Considérons deux agents A et B munis des partitions $\Pi_A : \{\omega_1, \omega_2\} \{ \omega_3, \omega_4 \}$ et $\Pi_B : \{\omega_1\} \{ \omega_2, \omega_3, \omega_4 \}$. Ils ont une croyance a priori uniforme sur Ω ($P(\omega_k) = 1/4 \forall k$) et expriment leur croyance a posteriori pour l'événement $\{\omega_2, \omega_3\}$.

$$\begin{aligned} \Pi_A &: \{\omega_1, \omega_2\}_{1/2} \{ \omega_3, \omega_4 \}_{1/2} \\ \Pi_B &: \{\omega_1\}_0 \{ \omega_2, \omega_3, \omega_4 \}_1 \end{aligned}$$

On voit bien qu'il est connaissance commune en chacun des états du monde que les croyances des deux spéculateurs sont différentes, c'est-à-dire qu'il est connaissance commune que les agents sont en désaccord. Formellement, on a pour tout $\omega \in \Omega$, $M(\omega) \subseteq \{\omega' \in \Omega \mid P(\{\omega_2, \omega_3\} | \Pi_A(\omega')) \neq P(\{\omega_2, \omega_3\} | \Pi_B(\omega'))\}$. Ainsi, le résultat d'Aumann ne dit pas qu'il ne peut pas être connaissance commune que des agents soient en désaccord, mais que si les croyances des agents sont connaissance commune, alors ils doivent être d'accord sur leurs croyances.

Dans cet exemple, la croyance de B n'est pas connaissance commune puisqu'elle n'est pas la même en chacun des états de connaissance commune.

Le résultat d'Aumann [1976] dépend crucialement de l'hypothèse de croyance *a priori* commune. Sans elle, il est évident que le résultat ne tient plus. Considérons l'exemple suivant. Il y a deux états du monde ω_1 et ω_2 , et les deux spéculateurs ont tous les deux la partition grossière $\Pi_A = \Pi_B = \{\omega_1, \omega_2\}$. Si A a une croyance *a priori* uniforme $P_A(\omega_1) = P_A(\omega_2)$, et B une croyance dégénérée $P_B(\omega_1) = 1, P_B(\omega_2) = 0$, alors il est connaissance commune que A pense que la probabilité de l'événement $\{\omega_2\}$ est $1/2$, tandis que B pense que la probabilité de ω_2 est 0 . Une des critiques couramment adressée à l'encontre de l'hypothèse de croyance *a priori* commune concerne sa pertinence dans le modèle d'espace des états. En effet, puisque les états du monde doivent décrire les croyances des agents, comment les croyances *a posteriori* peuvent-elles être une conséquence du modèle ? Une réponse possible est de considérer le fait que les agents ont une croyance *a priori* commune comme une hypothèse comportementale plutôt que cognitive. La croyance *a posteriori* pour un événement est une opinion, et le résultat d'Aumann [1976] répond à la question de savoir si des différences d'opinions peuvent être expliquées par des différences d'information. Sans l'hypothèse de croyance *a priori* commune, les agents peuvent avoir des opinions différentes même lorsqu'ils possèdent la même information. Il est alors impossible de savoir si les agents ont des opinions différentes parce qu'ils n'ont pas la même information privée ou parce qu'ils n'ont pas la même croyance *a priori*. Dans ce cas, l'hypothèse est justifiée de fait par l'objet de l'analyse. Ainsi, le fait que les agents aient une même croyance *a priori* est une condition suffisante au résultat d'Aumann. Samet [1998] montre qu'elle est également nécessaire, c'est-à-dire qu'il ne peut pas y avoir « impossibilité de s'accorder sur un désaccord » si les agents n'ont pas la même croyance *a priori*.

V. — COMMUNICATION ET CONNAISSANCE COMMUNE

D'après le résultat d'Aumann [1976], si deux agents ont la même probabilité *a priori* sur l'ensemble des états du monde, alors la connaissance commune de leurs probabilités *a posteriori* pour un événement donné implique l'égalité de ces probabilités *a posteriori*. Ce résultat dépend ainsi tout aussi crucialement de l'hypothèse que les probabilités *a posteriori* sont connaissance commune. Si ce n'est pas le cas, l'hypothèse que les agents aient la même probabilité *a priori* ne suffit pas à l'égalité des probabilités *a posteriori* pour un événement quelconque. Considérons le cas où il y a quatre états du monde, et où les deux spéculateurs ont une croyance uniforme sur Ω ($P(\omega_k) = 1/4 \forall k$) et sont munis des partitions suivantes $\Pi_A : \{\omega_1, \omega_2\} \{\omega_3, \omega_4\}$ et $\Pi_B : \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \{\omega_4\}$. Soit E l'événement $\{\omega_2, \omega_3\}$. On met en indice les croyances *a posteriori* pour l'événement E .

$$\begin{aligned} \Pi_A &: \{\omega_1, \omega_2\}_{1/2} \{\omega_3, \omega_4\}_{1/2} \\ \Pi_B &: \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}_{2/3} \{\omega_4\}_0 \end{aligned}$$

Sous l'état ω_1 , A attache une probabilité $1/2$ à l'événement E , et B le sait puisque la probabilité de E pour A est $1/2$ en tous les états que B croit possibles sous ω_1 . Pour B la probabilité de E sous l'état ω_1 est $2/3$ et A le sait, puisque c'est le cas en chacun des états que A croit possibles sous ω_1 . Pourtant, ces croyances *a posteriori* diffèrent parce qu'elles ne sont pas connaissance commune. En particulier, B ne sait pas que A sait que sa croyance *a posteriori* est $2/3$. En effet, sous l'état ω_1 , B pense que l'état ω_3 est possible, par conséquent, il ne peut pas exclure la possibilité que A pense que ω_4 est possible, et donc que A pense que la croyance *a posteriori* de B est 0 .

L'importance de l'hypothèse de connaissance commune des croyances *a posteriori* pose la question de sa pertinence. Comment des croyances, ou plus généralement des événements peuvent-ils devenir connaissance commune? Dans le modèle d'espace des états lui-même, la question n'a pas de sens, puisque la connaissance commune d'un événement est juste une propriété vérifiée dans certains états et pas dans d'autres. Par contre, comment interpréter l'assertion qu'un événement est connaissance commune au moment d'appliquer le modèle? Pour que quelque chose soit connaissance commune, il ne suffit pas de le dire à tout le monde, dans la mesure où cela garantit que tout le monde le sait, mais pas que tout le monde sait que tout le monde le sait. Il pourrait être suffisant de le dire à tout le monde, et de dire à tout le monde que tout le monde le sait, mais il faut alors que tout le monde ait entendu et compris, que tout le monde pense que tout le monde ait entendu et compris, etc. Dès lors, il paraît difficile d'observer une situation de connaissance commune. Cependant, si l'on impose suffisamment de structure sur les interactions entre les agents, notamment si l'on suppose que les agents comprennent ce qu'ils entendent et sont capables d'en faire les bonnes inférences, alors on peut modéliser un processus au cours duquel la connaissance devient effectivement connaissance commune. Reprenons l'exemple décrit ci-dessus. Supposons que l'agent A annonce sa croyance à l'agent B . Quel que soit l'état du monde, sa croyance est $1/2$, donc B n'apprend rien de l'annonce de A , et A le sait. La partition de B reste inchangée.

$$\Pi_B : \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}_{2/3} \{\omega_4\}_0$$

À son tour, il annonce sa croyance. Sous les états ω_1 , ω_2 et ω_3 , sa croyance est $2/3$, tandis que sous l'état ω_4 sa croyance est 0 . Ainsi, son annonce permet à A de distinguer entre les états $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ d'une part, et l'état ω_4 d'autre part. L'agent A pouvait déjà distinguer entre les états $\{\omega_1, \omega_2\}$ et les états $\{\omega_3, \omega_4\}$. L'annonce de B lui permet maintenant de distinguer ω_3 de ω_4 . Sa partition devient :

$$\Pi_A : \{\omega_1, \omega_2\}_{1/2} \{\omega_3\}_1 \{\omega_4\}_0$$

A annonce sa croyance à nouveau. Maintenant, sa croyance est différente selon que l'état du monde appartient à $\{\omega_1, \omega_2\}$, ou à $\{\omega_3\}$, ou à $\{\omega_4\}$. Ainsi, B peut maintenant distinguer entre les états ω_1 et ω_2 d'une part, et l'état ω_3 d'autre part. Sa partition devient :

$$\Pi_B : \{\omega_1, \omega_2\}_{1/2} \{\omega_3\}_1 \{\omega_4\}_0$$

À partir de ce moment, A et B ne s'apprennent plus rien en se communiquant leurs croyances, et pour cause : elles sont devenues connaissance commune. Elles sont par conséquent égales d'après le théorème d'Aumann [1976].

Geanakoplos et Polemarchakis [1982] ont montré qu'« on ne peut pas être en désaccord pour toujours », c'est-à-dire que si les croyances *a posteriori* des agents sont différentes, un processus itératif au cours duquel les agents annoncent simultanément leurs croyances, révisent leur information privée puis annoncent leurs croyances à nouveau mène à l'égalité des croyances *a posteriori*.

Théorème 4 (Geanakoplos et Polemarchakis [1982]) *Si deux agents ont les mêmes croyances a priori sur Ω , et si leur partitions d'information sont finies, alors un processus itératif de communication simultanée et de révision des croyances a posteriori converge en temps fini vers un équilibre caractérisé par l'égalité des croyances a posteriori.*

Durant le processus, l'information peut s'accumuler sans donner lieu à des révisions de croyances, jusqu'au moment où tous les agents révisent leurs croyances d'un coup. Prenons à nouveau l'exemple des trois chapeaux, en supposant cette fois qu'on pose la question de la couleur de leur chapeau aux trois filles en même temps. Si les trois chapeaux sont rouges, au premier tour aucune ne sait répondre, au deuxième tour non plus, et au troisième tour toutes les filles peuvent affirmer avec certitude que leur chapeau est rouge. Geanakoplos et Polemarchakis [1982] montrent que pour tout entier n , on peut construire un exemple où le processus de révision des croyances converge en n étapes et n'implique aucune révision évidente jusqu'à la n -ième étape où tous les agents révisent leurs croyances en même temps. Nielsen [1984] généralise le résultat de Geanakoplos et Polemarchakis [1982] au cas où les agents communiquent l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Dans Geanakoplos et Polemarchakis [1982], les agents annoncent simultanément et publiquement leurs croyances aux autres. On peut montrer facilement que le résultat de convergence vers la connaissance commune tient toujours sans l'hypothèse de simultanéité. Houy et Ménager [2006] montrent que la croyance commune obtenue à l'issue du processus dépend alors de l'ordre de parole choisi. En revanche, le résultat tient-il toujours si le processus de communication n'est pas public ? La connaissance commune peut-elle être obtenue par un processus de communication de *bouche à oreille* ? Supposons que les trois petites filles, au lieu d'annoncer publiquement si elles connaissent ou non la couleur de leur chapeau, chuchotent à l'oreille de leur voisine la probabilité qu'elles attribuent à l'événement « au moins deux chapeaux sont rouges », qui correspond à $\{(RRR),(BRR),(RBR),(BRR)\}$.

$$\Pi_1 = \{(RRR),(BRR)\}_1 \{(RBR),(BBR)\}_{1/2} \{(RRB),(BRB)\}_{1/2} \{(RBB),(BBB)\}_0$$

Lorsque la première fille chuchote sa croyance à la fille 2, celle-ci peut alors distinguer entre les états où sa croyance est 1, les états où sa croyance est 1/2, et les états où sa croyance est 0. La fille 2 peut maintenant distinguer parfaitement tous les états :

$$\Pi_2 = \{(RRR)\}_1\{(RBR)\}_1\{(BRR)\}_1\{(BBR)\}_0\{(RRB)\}_1\{(RBB)\}_0\{(BRB)\}_0\{(BBB)\}_0$$

La fille 3 n'entend pas le message chuchoté par la fille 1 à la fille 2. Mais elle connaît les partitions des deux filles, et sait quelles inférences la fille 2 a pu faire en entendant le message de la fille 1, et donc quelle est sa partition au moment où la fille 2 lui chuchote sa croyance. Cela lui permet de distinguer entre les états $\{(RRR),(BRR),(RBR),(BBR)\}$ et les autres états :

$$\Pi_3 = \{(RRR),(RRB)\}_1\{(BRR)\}_1\{(BRB)\}_0\{(RBR)\}_1\{(RBB)\}_0\{(BBR),(BBB)\}_0$$

La fille 1, qui elle aussi sait quelles inférences la fille 3 a faites à partir des inférences faites par la fille 2, peut distinguer entre les états où la croyance de la fille 3 est 1 et ceux où sa croyance est 0. Sa partition devient :

$$\Pi_1 = \{(RRR),(BRR)\}_1\{(RBR)\}_1\{(BBR)\}_0\{(RRB)\}_1\{(BRB)\}_0\{(RBB),(BBB)\}_0$$

Ensuite, plus aucune fille n'apprend d'information supplémentaire en entendant les croyances des autres, car les croyances sont devenues connaissance commune.

Cet exemple est une application du résultat de Parikh et Krasucki [1990]. Ils étudient sous quelles conditions la communication de *bouche à oreille* entre agents permet d'implémenter la situation de connaissance commune. Ils supposent que les agents se communiquent la valeur d'une fonction f selon un protocole sur lequel ils se sont mis d'accord au préalable, qui détermine l'émetteur et le récepteur de la communication à chaque date. Ils montrent que deux conditions sont suffisantes pour que la communication conduise à la connaissance commune. Le protocole doit être *équitable*, c'est-à-dire que chaque agent doit être l'émetteur et le récepteur de la communication une infinité de fois. Cette condition est nécessaire pour que l'information privée de tous les agents soit utilisée, et pour que chaque agent reçoive suffisamment d'information pour réviser son information privée. De plus, la fonction dont les agents se communiquent la valeur doit être *convexe*, c'est-à-dire que f est définie de $2^\Omega \setminus \emptyset \rightarrow \mathbb{R}$ et doit être telle que $\forall I, I' \subseteq \Omega, I \cap I' = \emptyset, \exists a \in]0, 1[$ tel que $f(I \cup I') = af(I) + (1 - a)f(I')$. Les probabilités conditionnelles et les espérances conditionnelles sont convexes au sens de Parikh et Krasucki [1990].

Théorème 5 (Parikh et Krasucki [1990]) *Si le protocole de communication est équitable, et si la fonction dont la valeur est communiquée est convexe, alors le processus itératif de communication et de révision de la valeur de la*

fonction converge vers un équilibre où tous les agents communiquent la même valeur.

Parikh et Krasucki considèrent un protocole de *bouche à oreille* qui, à chaque date, implique deux agents dans une communication privée. On peut immédiatement étendre le résultat de Parikh et Krasucki à des protocoles de communication plus généraux, n'entraînant pas de restrictions sur le nombre d'agents impliqués dans la communication à chaque date ou sur son caractère public ou privé. En notant T l'ensemble des agents, un protocole de communication Pr est alors un couple de fonctions $(s,r) : \mathbb{N} \rightarrow 2^T \times 2^T$, où $s(t)$ et $r(t)$ sont respectivement les ensembles d'émetteurs et de récepteurs de la communication à la date t . Cette définition permet alors de considérer l'ensemble des protocoles de communication n'impliquant pas d'agent extérieur à la communication, du type médiateur.

VI. — EXTENSIONS DU RÉSULTAT « AGREEING TO DISAGREE »

Aumann [1976] a montré qu'il est impossible d'être d'accord sur un désaccord dans un cadre dont les caractéristiques sont les suivantes :

— le résultat du modèle pour chaque agent est sa probabilité *a posteriori* pour un événement donné,

— la connaissance commune porte sur les résultats *individuels*,

— l'information des agents est conforme au modèle des partitions d'information.

Ces caractéristiques ont ouvert la voie à trois types de généralisation. Le premier concerne ce que les agents expriment à partir de leur information privée. Dans le cadre d'Aumann, les agents expriment leur probabilité *a posteriori* pour un événement E donné, c'est-à-dire qu'ils expriment la valeur d'une fonction $f : 2^{\Omega} \setminus \emptyset \rightarrow [0,1]$ définie par $f(X) = P(E \setminus X)$. Jusqu'à quel point peut-on généraliser la fonction f tout en conservant l'impossibilité d'être d'accord sur un désaccord? Le deuxième type généralise le fait que la connaissance commune porte sur les probabilités *a posteriori* individuelles. Quelles inférences les agents peuvent-ils faire s'ils apprennent la valeur d'un agrégat des probabilités individuelles, par exemple la moyenne? Le troisième type de généralisations porte sur le modèle de connaissance des agents. Une fois qu'on a formalisé la notion de connaissance commune dans le modèle des partitions d'information, le résultat d'Aumann est quasiment trivial. Est-ce que l'impossibilité d'être d'accord sur un désaccord tient toujours dans un modèle de connaissance plus général que celui des partitions d'information, c'est-à-dire hors du système $S5$?

6.1. Généralisation du message exprimé

6.1.1. Des croyances aux actions

Que se passe-t-il si la connaissance commune des agents porte non pas sur leurs croyances individuelles, mais sur les décisions qu'ils prennent? Considérons l'exemple suivant, dû à Bacharach. Deux détectives, Maigret et Columbo, ont été formés à la même école de police. Leur enseignement consiste en une règle de décision bien définie qui spécifie quel suspect arrêter en fonction des indices découverts. Un meurtre a lieu, et Maigret et Columbo mènent chacun leur enquête de leur propre côté. Ils récoltent différents indices, et prévoient éventuellement d'arrêter différents suspects. Supposons que sur le chemin du retour au commissariat, Maigret et Columbo se rencontrent et se disent qui ils prévoient d'arrêter. Comme ils ont reçu la même formation, l'annonce de l'un est informative pour l'autre. Maigret peut déduire des conclusions de Columbo que celui-ci a récolté tel ou tel indice. Par conséquent, son opinion sur le coupable peut changer. Dans un cadre où les agents observent les actions des autres, est-ce que l'hétérogénéité des actions prises par les agents peut être due à des différences d'information privée? Cave [1983] et Bacharach [1985] généralisent le résultat d'Aumann en montrant qu'il suffit que la fonction exprimée f satisfasse une condition de stabilité par l'union (4) pour qu'il soit impossible pour des agents rationnels d'être d'accord sur un désaccord. Soit A un ensemble d'actions. Une fonction $f: 2^\Omega \rightarrow A$ est stable par l'union si et seulement si $\forall E, E' \subseteq \Omega, E \cap E' = \emptyset \Rightarrow f(E) = f(E') \Rightarrow f(E \cup E') = f(E) = f(E')$. L'intuition derrière cette condition est la suivante. Supposons que, étant donné les indices qu'il possède, Maigret prévoit d'arrêter le maître d'hôtel si son groupe sanguin est A, B, AB ou O . Alors étant donné ses indices, Maigret n'a pas besoin de faire analyser le sang du maître d'hôtel pour l'arrêter.

Théorème 6 (Cave [1983], Bacharach [1985]) *Si les agents suivent tous la même règle de décision, et si cette règle de décision est stable par l'union, alors la connaissance commune des décisions individuelles des agents implique l'égalité des décisions individuelles.*

Le fait que les agents suivent tous la même règle de décision joue le même rôle que l'hypothèse d'*a priori* commune dans le résultat d'Aumann : pour montrer que des différences de comportements ne peuvent pas s'expliquer par des différentiels d'information dès lors que les comportements sont connaissance commune, il faut supposer que les agents se comportent de la même manière lorsqu'ils possèdent la même information.

(4) Nous avons traduit l'anglais *union consistency* par *stabilité par l'union*.

Les probabilités conditionnelles, les espérances conditionnelles ou encore les fonctions convexes au sens de Parikh et Krasucki [1990] sont stables par l'union. Ainsi, le résultat de Cave [1983] et Bacharach [1985] implique certains des résultats dans les articles de Milgrom et Stokey [1982] et Rubinstein et Wolinsky [1990].

Théorème 7 (Milgrom et Stokey [1982], Rubinstein et Wolinsky [1990])
Soit X une variable aléatoire sur Ω , et a et b deux réels distincts. Soient deux agents A et B munis de partitions Π_A et Π_B sur Ω . Il ne peut pas être connaissance commune en ω que $E(X | \Pi_A(\omega)) = a$ et $E(X | \Pi_B(\omega)) = b$.

Peut-on étendre le résultat de Cave et Bacharach au cas où les agents communiquent par bouche à oreille, comme dans le cadre de Parikh et Krasucki [1990] ? Parikh et Krasucki [1990] montrent que si la fonction dont la valeur est communiquée est stable par l'union mais n'est pas convexe, les agents peuvent ne pas atteindre le consensus par la communication de bouche à oreille. Or la condition de convexité ne s'applique pas à toutes les situations. Supposons par exemple que des fermiers aient le choix entre deux technologies, une ancienne et une nouvelle. S'il existe deux événements disjoints X et Y tels que les fermiers choisissent l'ancienne technologie sachant X , et la nouvelle technologie sachant Y , même en re-nommant les deux technologies par des nombres réels, la condition de convexité implique que les fermiers doivent choisir une troisième technologie, différente des deux premières, sachant $X \cup Y$. Ainsi, il est possible qu'on ne puisse pas appliquer la condition de convexité de Parikh et Krasucki [1990] lorsque l'ensemble des actions disponibles est fini. On peut néanmoins se demander ce qui se passera si chaque fermier observe le choix de ses voisins directs, mais pas celui de ses voisins indirects. Est-ce qu'au bout d'un certain temps on va observer un consensus technologique dans la communauté des fermiers ? Pour prendre en compte les cas où les agents communiquent la valeur d'une fonction stable par l'union $f: 2^\Omega \setminus \emptyset \rightarrow A$, applicable par conséquent à n'importe quel ensemble d'actions, Krasucki [1996] montre qu'il suffit d'imposer que le protocole de communication ne contienne pas de cycle pour garantir le consensus. Cette restriction est assez forte puisqu'elle exclut certains réseaux de communication typiques comme le cercle. Ménager [2006] montre que si les actions communiquées par les agents sont celles qui maximisent leur espérance d'utilité, c'est-à-dire si $f(I) = \operatorname{argmax}_{a \in A} E[U(a, \cdot) | I]$, alors on n'a besoin d'aucune restriction particulière sur le protocole pour garantir la convergence vers le consensus. Ces fonctions, appelées fonctions *argmax*, sont stables par l'union. Cependant, il n'y a pas de relation d'inclusion entre les fonctions *argmax* et les fonctions convexes.

6.1.2. Des croyances aux espérances conditionnelles : les théorèmes de non-échange

À la question de savoir pourquoi les agents échangent, on peut répondre que c'est à cause de leurs préférences et de leurs dotations initiales. Si l'agent A a

deux pommes, l'agent B deux poires, et que l'agent A préfère les poires aux pommes et l'agent B les pommes aux poires, ou encore si les deux préfèrent avoir une pomme et une poire, il est mutuellement avantageux pour les deux agents d'échanger leurs paniers. Cependant, dans le cas des paris et des marchés financiers, si les agents ont la même aversion au risque on peut supposer qu'ils ont les mêmes préférences. Ils veulent gagner le plus d'argent possible, et on peut supposer que leur dotation initiale n'a pas d'importance. Par conséquent, on explique traditionnellement les paris et la spéculation financière par des différences d'information privée : deux agents sont prêts à échanger car ils ont reçu des informations opposées sur la valeur de l'échange. Cependant, Sebenius et Geanakoplos [1983] ainsi que Milgrom et Stokey [1982] ont montré qu'un différentiel d'information entre des agents rationnels ne peut pas expliquer l'échange dès que celui-ci est connaissance commune.

Considérons l'exemple suivant. Un père dit à ses deux fils qu'il a placé 10^n euros dans une enveloppe et 10^{n+1} euros dans une autre enveloppe, avec n choisi aléatoirement parmi les six premiers entiers. Le père tire au sort et donne à chacun de ses fils une enveloppe. L'aîné regarde à l'intérieur et voit 10 000 euros. Le cadet regarde dans son enveloppe et voit 1 000 euros. Le père demande en privé à chacun de ses fils s'ils sont prêts à payer 1 euro pour échanger les enveloppes. L'aîné calcule qu'il y a une chance sur deux pour que l'autre enveloppe contienne 1 000 euros, et une chance sur deux pour qu'elle contienne 100 000 euros. Ainsi, son espérance de gain à échanger les enveloppes est $(50\,500 - 1)$ euros. Comme l'espérance de gain est supérieure au montant de sa propre enveloppe, il accepte l'échange. Pour le cadet, l'espérance de gain à échanger est $(5\,500 - 1)$ euros. Il accepte également l'échange. Le père répète à chacun la réponse de son frère. Chacun comprend que l'autre n'a pas 1 000 000 d'euros dans son enveloppe, seul état où ils n'auraient pas intérêt à échanger. Le père répète la question, et les deux frères acceptent à nouveau l'échange. Sachant que l'autre n'a pas 10 000 000 d'euros, celui qui aurait 100 000 euros n'aurait pas intérêt à échanger. Par conséquent, la réponse positive des deux frères leur apprend à chacun que l'autre n'a pas 100 000 euros dans son enveloppe. Le père réitère sa question. Le cadet accepte l'échange mais l'aîné refuse. Ayant compris que son frère n'a pas 100 000 euros, il n'a plus intérêt à échanger.

Cet exemple illustre les résultats de Sebenius et Geanakoplos [1983] et Milgrom et Stokey [1982]. Sebenius et Geanakoplos montrent qu'il ne peut pas être connaissance commune entre deux agents que l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire pour un agent soit supérieure à une certaine valeur a , et soit inférieure à a pour un autre agent.

Théorème 8 (Sebenius et Geanakoplos [1983]) *Soit X une variable aléatoire sur Ω , et a un réel. Soient deux agents A et B munis de partitions Π_A et Π_B sur Ω . Il ne peut pas être connaissance commune en ω que $E(X | \Pi_A(\omega)) > a$ et $E(X | \Pi_B(\omega)) \leq a$.*

Ce résultat peut être interprété comme un théorème d'impossibilité de pari. Supposons que la variable aléatoire X représente un pari entre deux agents, c'est-à-dire que sous l'état ω , l'agent A reçoit $X(\omega)$ et l'agent B reçoit $-X(\omega)$. Les deux agents sont neutres au risque, donc le gain du pari est aussi l'utilité du gain. Si les deux agents acceptent le pari sous l'état ω , il devient connaissance commune entre eux en ω que A et B attendent tous les deux un rendement positif du pari. Autrement dit, il est connaissance commune entre A et B que $E(X(\cdot) | \Pi_A(\omega)) > 0$ et $E(-X(\cdot) | \Pi_B(\omega)) > 0$, c'est-à-dire que $E(X(\cdot) | \Pi_A(\omega)) > 0$ et $E(X(\cdot) | \Pi_B(\omega)) < 0$, ce qui est impossible d'après le résultat de Geanakoplos et Sebenius.

Dans la même veine, Milgrom [1981] et Milgrom et Stokey [1982] considèrent une pure économie d'échange où n agents averses au risque échangent dans un environnement incertain. Leur dotation initiale dépend de l'état du monde, donc les agents ne connaissent pas précisément leur dotation. Les agents sont rationnels, dans le sens où ils utilisent toute l'information disponible avant de prendre leurs décisions, et la rationalité des agents est connaissance commune parmi eux. Lorsque les agents se trouvent à un équilibre à anticipations rationnelles, il est connaissance commune parmi eux que l'équilibre est réalisable et mutuellement acceptable. Il y a l biens, et l'ensemble de consommation de chaque agent est \mathbb{R}_+^l . Chaque agent i est décrit par sa dotation initiale $e_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^l$, sa fonction d'utilité $U_i : \Omega \times \mathbb{R}_+^l \rightarrow \mathbb{R}$ et sa partition d'information Π_i . Un échange est une fonction $t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{nl}$, où $t_i(\omega)$ est la demande nette de l'agent i en ω . Un échange est réalisable si la quantité de chaque bien possédée par un agent après l'échange est positive quel que soit l'état du monde, et si la somme des quantités individuelles demandées d'un bien sous un état du monde n'excède pas la quantité totale disponible de ce bien sous cet état du monde. Milgrom et Stokey [1982] montrent que si l'allocation initiale est Pareto-optimale *ex ante*, c'est-à-dire si les agents sont dans une situation où il n'existe pas d'échange mutuellement avantageux, alors le fait que les agents reçoivent de l'information privée ne peut pas créer d'incitation à l'échange (5).

Théorème 9 (Milgrom et Stokey [1982]) *Soient un ensemble d'agents faiblement averses au risque ayant la même croyance a priori sur Ω , et une allocation initiale Pareto-optimale. S'il est connaissance commune en ω que $t(\omega)$ est un échange réalisable et que chaque agent préfère faiblement $t(\omega)$ à l'échange nul, alors chaque agent est indifférent en ω entre $t(\omega)$ et préfère ne pas échanger. Si les agents sont strictement averses au risque, alors la connaissance commune que t est un échange réalisable en ω implique que $t(\omega)$ est l'échange nul.*

(5) On a traduit l'anglais *no-trade theorems* par *théorèmes de non-échange*.

6.2. Généralisation de la nature de l'information

Dans tous les résultats cités précédemment, la connaissance commune porte sur une information *individuelle*. Les probabilités *a posteriori* individuelles, les décisions individuelles, ou encore les espérances conditionnelles individuelles sont connaissance commune. En apprenant la décision d'un agent, un autre agent peut en inférer partiellement son information privée en se basant sur sa partition d'information. Que se passe-t-il si les agents apprennent une statistique des décisions individuelles, et par conséquent ne peuvent plus associer les décisions aux partitions d'information individuelles au moment de faire leurs inférences? McKelvey et Page [1986] montrent que si une statistique des probabilités *a posteriori* pour un événement satisfait une condition de *régularité stochastique*, alors la connaissance commune de cette statistique implique l'égalité des probabilités *a posteriori*. Une fonction stochastiquement régulière est une transformation injective d'une fonction *stochastiquement monotone*. Bergin et Brandenburger [1990] ont fourni une caractérisation simple des fonctions stochastiquement monotones. Ils montrent qu'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est stochastiquement monotone si et seulement si elle est additivement séparable en composantes strictement croissantes, c'est-à-dire qu'elle peut être écrite sous la forme $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, où x_i désigne la i ème coordonnée du vecteur x , avec chaque $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante.

Théorème 10 (McKelvey et Page [1986]) *Soient un ensemble d'agents ayant une probabilité a priori commune sur Ω et f une fonction stochastiquement régulière des probabilités a posteriori pour un événement. Si la valeur de f est connaissance commune en un état ω , alors les probabilités a posteriori individuelles sont égales en ω .*

Nielsen, Brandenburger, Geanakoplos, McKelvey et Page [1990] étendent le résultat de McKelvey et Page [1986] aux espérances conditionnelles d'une variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 11 (Nielsen et alii [1990]) *Soit f une fonction stochastiquement régulière des espérances conditionnelles d'une variable aléatoire X . Si la valeur de f est connaissance commune en un état ω , alors les espérances conditionnelles de X sont égales en ω .*

Nielsen [1995] va plus loin en généralisant ce dernier résultat au cas de vecteurs aléatoires. Pour cela, il adapte la définition de monotonie stochastique au cas multivarié. Dans ce cas, une fonction est stochastiquement monotone si elle est additivement séparable en composantes strictement comonotones.

Tous ces résultats concernent des messages bayésiens, dans le sens où ils sont fonctions d'une probabilité *a priori* (croyances *a posteriori*, espérances conditionnelles, etc.). Ainsi, ils ne s'appliquent pas toujours au cas où les messages appartiennent à un ensemble discret, comme chez Cave [1983] et Bacharach [1985]. Considérons l'exemple suivant. Les Français sont appelés

à voter par référendum sur l'adoption du projet de Constitution européenne. Un mois avant le référendum, un premier sondage annonce le « Non » gagnant à 51 %. Un deuxième sondage annonce le « Non » gagnant à 52 %. De nombreux sondages plus tard, le « Non » l'emporte à environ 55 %. Ménager [2006] montre que si les agents suivent tous la même règle de vote, et si cette règle de vote satisfait une condition de stabilité par l'union plus forte que celle de Cave [1983] et Bacharach [1985], appelée *stabilité par l'union équilibrée* (6) alors l'annonce successive de sondages d'intentions de vote fait converger le résultat du vote vers un plébiscite. Une règle de décision d est stable par l'union équilibrée si pour toute famille d'événements B équilibrée (7) $d(S) = a \forall S \in B \Rightarrow d(\cup_{S \in B} S) = a$. Le résultat tient plus généralement pour toute statistique *exhaustive*. Une statistique est exhaustive si la connaissance de sa valeur implique la connaissance du nombre d'agents ayant pris chaque décision.

Théorème 12 (Ménager [2006]) *Supposons que les agents suivent tous la même règle de décision stable par l'union équilibrée. Si une statistique exhaustive des décisions individuelles est connaissance commune en ω , alors les décisions individuelles sont égales en ω .*

Enfin, en s'inspirant du résultat de Sebenius et Geanakoplos [1983], Hanson [1998] montre qu'il suffit que les espérances conditionnelles des « extrémistes » soient bien identifiées pour garantir le consensus.

Théorème 13 (Hanson [1998]) *Soient un ensemble d'agents ayant une probabilité a priori commune sur Ω et une variable aléatoire X . La connaissance commune de l'identité de l'agent ayant la plus petite (ou la plus grande) espérance conditionnelle de X implique l'égalité de toutes les espérances conditionnelles.*

Comme il implique de pouvoir comparer les messages au sens de plus grand ou plus petit, ce résultat n'est pas généralisable à une règle de décision stable par l'union quelconque.

6.3. Généralisation du modèle de connaissance

Une fois définie la notion de connaissance commune dans le modèle des partitions d'information, le résultat d'Aumann [1976] est quasiment trivial. Par

- (6) On a traduit l'anglais *balanced union consistency* par *stabilité par l'union équilibrée*.
- (7) La définition d'une famille équilibrée est ici inspirée de celle de Shapley [1967]: une famille non vide $B \subseteq 2^\Omega$ est équilibrée s'il existe une famille de réels positifs $\{\lambda_S\}_{S \in B}$ telle que $\sum_{S \in B, \omega \in S} \lambda_S = 1 \forall \omega \in \cup_{S \in B} S$.

conséquent, il n'est pas étonnant qu'une partie de la littérature se soit attachée à généraliser le résultat d'Aumann à des modèles de connaissance moins restrictifs. On a vu en section 1 que le modèle des partitions d'information est une représentation du système axiomatique $S5$. Quels axiomes du système $S5$ peut-on affaiblir tout en conservant l'impossibilité d'être d'accord sur un désaccord? Le modèle des partitions d'information décrit des agents tellement rationnels qu'ils savent leur connaissance et leur ignorance. Or savons-nous toujours ce que nous savons? Il arrive souvent que nous prenions conscience d'un aspect de la situation à l'instant seulement où cet aspect se modifie, par exemple on découvre la présence d'un bruit de fond quand celui-ci s'arrête. De même, savons-nous toujours ce que nous ne savons pas? Un exemple classique pour décrire les erreurs de raisonnement qui peuvent être faites met en scène deux personnages, le parfaitement logique Sherlock Holmes et le plus humain Docteur Watson. Un meurtre est commis de nuit dans une maison où vit un chien qui aboie sur les inconnus mais pas sur les gens qu'il connaît. Sherlock Holmes, accompagné du Dr Watson, interroge les domestiques pour savoir s'ils ont remarqué quelque chose de spécial pendant la nuit du meurtre. Les domestiques répondent qu'il ne s'est rien passé. Plus tard, Sherlock Holmes attire l'attention de Watson sur le curieux incident du chien pendant la nuit. Dr Watson répond que le chien n'a rien fait pendant la nuit, ce à quoi Sherlock Holmes répond qu'il s'agit justement du curieux incident. Pourquoi, alors qu'ils ont reçu la même information, Holmes et Watson ont des conclusions différentes? Parce que l'opérateur de connaissance de Holmes satisfait les cinq axiomes du système $S5$, contrairement à celui de Watson. Holmes sait qu'il ne sait pas l'événement « le chien a aboyé », ce qui ici est équivalent au fait qu'il sait l'événement « le chien n'a pas aboyé ». Sa connaissance vérifie l'axiome d'introspection négative. Comme elle vérifie aussi la propriété d'omniscience logique, il déduit que si le chien n'a pas aboyé, c'est qu'il connaissait le meurtrier. Watson ne se rend pas compte que le chien *aurait pu* aboyer et que dans ce cas les domestiques lui auraient dit que le chien a aboyé. Dans l'état du monde où le chien n'a pas aboyé le soir du crime, Watson ne distingue pas entre les états du monde où le chien a aboyé et où le chien n'a pas aboyé. Ainsi, l'opérateur de connaissance de Watson ne vérifie pas l'axiome d'introspection négative. Si une fois que Holmes lui a fait remarquer que le chien n'a pas aboyé, Watson n'en conclut pas que le meurtrier était un habitué de la maison, alors il ne vérifie pas non plus la propriété d'omniscience logique.

Samet [1990] montre que le résultat d'Aumann tient toujours si l'on relâche l'axiome d'introspection négative. Ainsi, il est impossible d'être d'accord sur un désaccord même quand les agents ignorent leur propre ignorance.

Théorème 14 (Samet [1990]) *Soit un ensemble d'agents ayant une probabilité a priori commune sur Ω , et tels que leur opérateur de croyance vérifie $A1, A2, A3$ et $A4$. La connaissance commune des probabilités a posteriori pour un événement en un état donné implique l'égalité des probabilités a posteriori en cet état.*

De plus, Samet montre que l'on peut relâcher simultanément l'axiome de vérité et l'axiome d'introspection négative, sous les hypothèses suivantes. Tout d'abord, la croyance *a priori* des agents doit être *cohérente* avec Ω , c'est-à-dire telle qu'elle assigne un poids nul aux états où il existe un agent dont la connaissance ne satisfait pas l'axiome de vérité. Ensuite, l'ensemble des états du monde ne doit pas contenir *d'état-impasse*, c'est-à-dire que pour tout i , pour tout ω , $P_i(\omega) \neq \emptyset$.

Théorème 15 (Samet [1990]) *Soit un ensemble d'agents ayant une croyance a priori commune sur Ω , et tels que leur opérateur de croyance vérifie A1, A2 et A4. Si la croyance a priori des agents est cohérente avec Ω , et si Ω ne contient pas d'état-impasse, alors la connaissance commune des croyances a posteriori pour un événement implique l'égalité des croyances a posteriori.*

Notons que le cadre de ce dernier théorème n'est pas vraiment une généralisation du modèle A1, A2, A3, A4, dans la mesure où on rajoute l'hypothèse que les agents ne croient pas aux états où A3 n'est pas vérifié.

Geanakoplos [1989] conserve l'axiome de vérité (8), mais remplace les axiomes d'introspection positive et négative par des axiomes plus faibles. Il suppose que l'opérateur de connaissance est *équilibré* ou *positivement équilibré*. Une correspondance de possibilité P est équilibrée pour un événement E si $\forall \omega \in E$, il existe $\omega' \in \Omega$ tel que $\omega \in P(\omega')$.

Théorème 16 (Geanakoplos [1989]) *Soit un ensemble d'agents ayant une croyance a priori commune sur Ω et tel que leur opérateur de connaissance vérifie A1, A2 et A3.*

— Si l'opérateur de croyances est équilibré, alors la connaissance commune des croyances *a posteriori* implique l'égalité de ces croyances.

— L'opérateur de croyances est positivement équilibré si et seulement si la connaissance commune des croyances *a posteriori* implique l'égalité de ces croyances.

VII. — CONCLUSION

L'idée de connaissance commune est traditionnellement attribuée à Lewis [1969], qui tente d'expliquer la conformité des agents à une norme du type « *Rouler à droite* », dans un cadre où les agents n'ont pas la possibilité de s'ac-

(8) Il appelle l'axiome de vérité *non deluded axiom*.

corder au préalable. Il montre qu'il faut non seulement supposer que chaque agent sait que tous ont intérêt à rouler à droite, mais aussi que chacun sait que chacun sait que tous ont intérêt à rouler à droite, etc. Aumann [1976] est le premier à définir la notion de connaissance commune de manière formelle et opératoire, en se plaçant dans le cadre des modèles de partitions d'information. Grâce à cette définition, il montre le résultat fondateur d'impossibilité à s'accorder sur un désaccord, qui s'énonce de la manière suivante. Si deux agents ont des probabilités *a priori* identiques, et que leurs probabilités *a posteriori* pour un événement donné sont connaissance commune, alors ils doivent avoir les mêmes probabilités *a posteriori* pour cet événement. Même si les *posteriori* ne sont pas initialement connaissance commune, un processus de communication public ou privé au cours duquel les agents annoncent et révisent leurs *posteriori* permet d'obtenir la situation de connaissance commune des probabilités *a posteriori* (Geanakoplos et Polemarchakis [1982], Parikh et Krasucki [1990]). Le résultat d'impossibilité de s'accorder à être en désaccord a été étendu selon trois directions. Tout d'abord, plutôt que de porter sur les probabilités *a posteriori*, la connaissance commune peut porter sur les actions des agents (Cave [1983], Bacharach [1985]), ou sur la valeur de l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire (Milgrom [1981], Milgrom et Stokey [1982], Rubinstein et Wolinsky [1990]). Ensuite, plutôt que de porter sur de l'information individuelle, la connaissance commune peut porter sur de l'information agrégée. Sous certaines conditions, le résultat d'impossibilité de s'accorder à être en désaccord tient toujours si la connaissance commune porte sur un agrégat des croyances ou des décisions individuelles (McKelvey et Page [1986], Nielsen *et al.* [1990], Ménager [2006]). Enfin, de nombreux travaux se sont attachés à étendre le résultat d'Aumann [1976] dans des modèles de connaissance plus généraux que celui des partitions d'information, notamment en relâchant l'axiome d'introspection négative (Geanakoplos [1990], Samet [1990]).

L'implication économique la plus connue de la situation de connaissance commune est le *théorème de non-échange* (Milgrom et Stokey [1982]). Ce théorème montre qu'on ne peut pas expliquer la spéculation ou les échanges entre agents rationnels par des différentiels d'information privée. Pour expliquer les échanges économiques, on doit alors supposer que les agents ont des préférences différentes, ou qu'ils sont imparfaitement rationnels. Le concept de connaissance commune a également des implications économiques importantes dans les marchés caractérisés par des « effets réseaux » (téléphones portables, télécopieurs, systèmes d'exploitation informatiques, etc.). Un effet réseau se produit dès lors que plus nombreux sont les agents à utiliser le bien, plus le bien est attractif pour chacun. La demande des consommateurs pour ce type de biens dépend de l'information qu'ont les agents sur le nombre d'utilisateurs du bien. Chwe [2001] donne ainsi l'exemple de la société Apple, qui présenta l'ordinateur Macintosh au public à l'occasion d'une publicité, diffusée pendant le Super Bowl en Janvier 1984. Le Super Bowl est connu pour être le programme le plus regardé par les Américains chaque année. À l'époque, Macintosh était complètement incompatible avec les autres ordinateurs exis-

tants, et son marché présentait clairement un effet réseau. Ainsi, le fait de présenter Macintosh pendant le Super Bowl ne permettait pas seulement à Apple de le faire connaître à chacun des téléspectateurs du Super Bowl, mais aussi d'informer chacun des téléspectateurs que tous étaient maintenant au courant de l'existence du Macintosh. Le fait de rendre l'existence du Macintosh connaissance commune avait pour but d'aider les consommateurs à se coordonner sur l'ordinateur Macintosh. Par conséquent, le prix d'une minute de publicité pendant le Super Bowl est plus élevé pour les biens caractérisés par un effet réseau que pour les autres, puisque la publicité permet d'atteindre indirectement plus de consommateurs que seulement ceux qui la voient.

RÉFÉRENCES

- AUMANN R., [1976], « Agreeing to Disagree », *The Annals of Statistics*, 4, 1236-1239.
- AUMANN R., [1987], « Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality », *Econometrica*, 55, 1-18.
- BACHARACH M., [1985], « Some extensions of a claim of Aumann in an axiomatic model of knowledge », *Journal of Economic Theory*, 37, 167-190.
- BERGIN J., BRANDENBURGER A., [1990], « A simple characterization of stochastically monotone functions », *Econometrica*, 58, pp. 1241-1243.
- CAVE J., [1983], « Learning To Agree », *Economics Letters*, 12, 147-152.
- CHWE M., [2001], « Rational Ritual: Culture, Coordination, and Common Knowledge », Princeton University Press. 28
- FAGIN R., HALPERN J., VARDI M., [1991], « A model-theoretic analysis of knowledge », *Journal of the ACM*, 91(2), pp. 382-428.
- FAGIN R., GEANAKOPOLOS J., HALPERN J., VARDI M., [1992], « The expressive power of the hierarchical approach to modeling knowledge and common knowledge », dans *Fourth Symposium on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge*, ed. M. Vardi, Morgan Kaufman Publishers.
- GEANAKOPOLOS J., POLEMARCHAKIS H., [1982], « We Can't Disagree Forever », *Journal of Economic Theory*, 26, 363-390.
- GEANAKOPOLOS J., [1989], « Game theory without partitions, and applications to speculations and consensus », Cowles Foundation Discussion paper 914, Yale University.
- GEANAKOPOLOS J., [1994], « Common Knowledge », in « Handbook of Game Theory », vol. 2, edited by R.-J. Aumann and S. Hart.
- HANSON R., [1998], « Consensus by Identifying Extremists », *Theory and Decision*, 44, pp. 293-301.
- HARSANYI J.-C., [1967-1968], « Games with incomplete information played by bayesian players, Parts I, II, III », *Management Science*, 14, pp. 159-182, 320-334, 486-502.
- HOUÿ N., MÉNAGER L., [2006], « Communication, consensus and order. Who wants to speak first ? », *mimeo*.
- KRASUCKI P., [1996], « Protocols forcing consensus », *Journal of Economic Theory*, 70, pp. 266-272.
- LEWIS D., [1969], « Convention: a philosophical study », Harvard University Press, Cambridge.
- McKELVEY R., PAGE T., [1986], « Common knowledge, consensus and aggregate information », *Econometrica*, 54, pp. 109-127.
- MÉNAGER L., [2006], « Consensus and Common Knowledge of an Aggregate of Decisions », *mimeo*.
- MÉNAGER L., [2006], « Consensus, Communication and Knowledge: an extension with Bayesian agents », *Mathematical Social Sciences*, 51 (3), pp. 274-279.
- MILGROM P., [1981], « An axiomatic characterization of common knowledge », *Econometrica*, 49, pp. 219-222.

- MILGROM P., STOKEY N., [1982], « Information, trade and common knowledge », *Journal of Economic Theory*, 26, pp. 17-27.
- NIELSEN L., [1984], « Common knowledge, communication and convergence of beliefs », *Mathematical Social Science*, 8, pp. 1-14.
- NIELSEN L., [1995], « Common knowledge of a multivariate aggregate statistic », *International Economic Review*, 36, pp. 207-216.
- NIELSEN L., BRANDENBURGER A., GEANAKOPOLOS J., McKELVEY R., PAGE T., [1990], « Common knowledge of an aggregate of expectations », *Econometrica*, 58, pp. 235-239.
- PARIKH R., KRASUCKI P., [1990], « Communication, Consensus and Knowledge », *Journal of Economic Theory*, 52, 178-189.
- RUBINSTEIN A., WOLINSKY A., [1990], « On the logic of “agreeing to disagree” type results », *Journal of Economic Theory*, 51, pp. 184-193.
- SAMET D., [1990], « Ignoring Ignorance and Agreeing to Disagree », *Journal of Economic Theory*, 52, pp. 190-207.
- SAMET D., [1998], « Common Priors and Separation of Convex Sets », *Games and Economic Behavior*, 24, pp. 172-174.
- SAMUELSON L., [2004], « Modelling Knowledge in Economic Analysis », *Journal of Economic Literature*, 57, pp. 367-403.
- SAVAGE L., [1954], « The foundations of statistics », Cambridge University Press, Cambridge.
- SHAPLEY L. S., [1967], « On Balanced Sets and Cores », *Naval Research Logistics Quarterly*, 14, pp. 453-460.
- SEBENIUS J., GEANAKOPOLOS J., [1983], « Don't bet on it : contingent agreements with asymmetric information », *Journal of the American Statistical Association*, 78:382, pp. 424-426.

E-mail: menager@univ-paris1.fr