Une mesure par simulations de l'efficacité de distribution de la liquidité dans les réseaux interbancaires

Stéphane Vivier-Lirimont et Anton Granik

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/rei/4374>

DOI : 10.4000/rei.4374

ISSN : 1773-0198

Éditeur

De Boeck Supérieur

Édition imprimée

Date de publication : 15 décembre 2010

Pagination : 85-118

ISSN : 0154-3229

Référence électronique

Stéphane Vivier-Lirimont et Anton Granik, « Une mesure par simulations de l'efficacité de distribution de la liquidité dans les réseaux interbancaires », *Revue d'économie industrielle* [En ligne], 132 | 4e trimestre 2010, document 4, mis en ligne le 15 décembre 2012, consulté le 04 juin 2022. URL : <http://journals.openedition.org/rei/4374> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/rei.4374>

UNE MESURE PAR SIMULATIONS DE L'EFFICACITÉ DE DISTRIBUTION DE LA LIQUIDITÉ DANS LES RÉSEAUX INTERBANCAIRES

Mots-clés : Réseaux, liquidité, fragilité financière.

Key words : Networks, Liquidity, Financial fragility.

INTRODUCTION

Alors que bien des banquiers pensaient pouvoir ranger les faillites bancaires au rang des oripeaux de l'histoire, ou tout au moins les réserver à quelques systèmes bancaires fragiles, la crise des subprimes, la faillite de Northern Rock à l'automne 2007, les 25 faillites bancaires enregistrées aux États-Unis au cours de l'année 2008, dont celle de Bear Sterns ou de Lehman Brothers, sont venues brutalement rappeler toute l'actualité et l'importance de la compréhension de la notion de stabilité financière. Pour mesurer la stabilité du système financier (1), il est nécessaire de s'intéresser aux mécanismes par lesquels un évé-

(*) Je suis très reconnaissant à Hubert Kempf, Matthew Jackson, Henri Pagès, Michel Boutillier, Pierre Monnin pour leur aide ou commentaires. Je remercie également les participants aux 24^{ème} Journées Internationales d'Économie Monétaire et Bancaire ainsi que deux référés anonymes qui ont permis par leurs remarques de substantielles améliorations de cet article.

(1) Le système financier comprend l'ensemble des institutions financières publiques et privées, et des marchés. Il renvoie également aux processus, accords, ou relations opérationnelles liant les différents intervenants.

nement déstabilisateur, comme une crise de liquidité localisée, peut s'étendre et conduire à une crise généralisée. En la matière le marché interbancaire joue un rôle pivot, comme la crise récente en a donné l'exemple. Ce marché englobe l'ensemble des systèmes de paiements interbancaires privés (systèmes de clearing) dont le rôle est essentiel pour permettre aux banques d'accéder à la liquidité dont elles ont besoin.

Au travers des systèmes de paiements interbancaires et de livraison des titres comme FedWire, CHIPS (Clearing House Interbank Payment System) (2) ou SWIFT (Society for Worldwide Interbank Telecommunication) circulent des montants colossaux de liquidité en dehors de tout contrôle des banques centrales. En dépit de leur croissance incontestable en tant qu'acteurs financiers autonomes, les réseaux interbancaires (3) ont peu retenu l'attention des économistes, y compris dans la littérature considérable qui s'est développée à la suite des travaux de Diamond et Dybvig (4). En particulier, la littérature a longtemps ignoré l'influence que pouvait avoir la topologie (au sens d'architecture) du réseau sur ses propriétés, tant dans sa capacité à distribuer de la liquidité, que dans la propagation de faillites. Il y a une hypothèse implicite d'équivalence des structures de réseaux dans la plupart des contributions. Cette hypothèse commence à être levée par certains articles comme Allen & Gale (2000); Freixas, Parigi et Rochet (2000), ou Vivier-Lirimont (2006a, 2006b). Pour autant, la littérature en la matière reste incomplète (5). Pour que l'accès à un réseau de relations interbancaires soit en mesure d'améliorer la situation des déposants, c'est-à-dire de limiter les montants investis dans les actifs courts tout en supprimant le risque de course à la banque, il est nécessaire que le réseau en question présente des caractéristiques particulières (6) [Allen et Gale (2000) et Vivier-Lirimont (2006b)]. En ce cas, le réseau permet de décentraliser une allocation Pareto optimale [Vivier-Lirimont (2006b)] dans laquel-

- (2) En 2007 CHIPS a traité en moyenne plus de 348 000 paiements quotidiens d'une valeur d'1,9 trillion de dollars américains.
- (3) Par réseaux interbancaires, nous entendons donc désormais tout système permettant les échanges de flux financiers entre banques.
- (4) Pour une synthèse de cette littérature, on pourra se reporter à Vivier-Lirimont (2007).
- (5) Ainsi, les articles de Allen et Gale (2000) ou de Freixas, Parigi et Rochet (2000) n'étudient qu'un sous-ensemble des structures possibles; ils se concentrent sur une notion restrictive de stabilité; et enfin, ils n'explorent pas le lien entre le nombre de participants et la structure du réseau.
- (6) Deux propriétés essentielles peuvent être démontrées. La première souligne que les réseaux doivent exhiber une structure dite de « petit monde » dans laquelle les intervenants sont liés par une courte chaîne d'intermédiaires. La seconde propriété met en évidence que les réseaux doivent avoir un certain nombre de partenaires. Partant de ces propriétés, il est possible d'éliminer un grand nombre de structures qui ne permettent pas d'atteindre l'optimalité. Il demeure, néanmoins, un grand nombre de réseaux qui vérifient la propriété d'optimalité et il n'est pas possible de discriminer ces réseaux sur des critères d'efficacité théorique.

le chaque banque fait face à ses besoins de liquidité, et chaque déposant maximise sa consommation. Cependant, si un grand nombre de structures décentralisent l'allocation Pareto optimale, la question des propriétés relatives des réseaux reste ouverte. L'objet de cet article est donc d'offrir une caractérisation permettant de discriminer les différentes structures de réseau à l'aide de critères d'efficacité relative. Pour ce faire on se concentre sur deux types d'efficacité : l'une en termes de résultats, l'autre en termes de processus.

Par des simulations au sein d'une économie interbancaire fictive, nous opérons plusieurs classements d'efficacité relative des réseaux. Ces classements diffèrent selon les critères utilisés et donnent une vision plus fine des propriétés des différents réseaux. Quel que soit le critère utilisé, la croissance de la taille des voisinages (7) vient obérer les performances des réseaux sur tous les critères d'efficacité considérés.

La première section de l'article présente le cadre d'analyse du modèle, les critères d'efficacité, les simulations et le mode de construction des matrices d'adjacente (8) dans les réseaux k -réguliers ; la section 2 propose une analyse des résultats pour le cas des réseaux capables de décentraliser l'allocation Pareto optimale ; la section 3 se penche sur les résultats obtenus dans le cas où cette allocation n'est pas obtenue. Enfin, dans la section 4, nous étudions un cas particulier de réseaux k -réguliers (9).

I. — LE MODÈLE ET LES SIMULATIONS

1.1. L'économie interbancaire

Le modèle utilisé est directement issu de Allen et Gale [2000] et de Vivier-Lirimont [2006b]. Ce modèle sert de base à un ensemble de simulations sous Gauss pour mesurer l'efficacité des différentes topologies de réseaux possibles (10). Les graphes de certaines structures de réseaux typiques sont présentés en annexe. L'économie bancaire fictive a été fortement simplifiée. Bien des caractéristiques de l'économie bancaire réelle ont été volontairement gommées comme la présence d'une banque centrale intervenant sur les marchés, les variations de taux d'intérêt, le risque de défaut sur les actifs détenus par les

- (7) La taille du voisinage de la banque i est le nombre de conventions de crédit ouvert signé par la banque i . Alternativement on peut parler de degré de i .
- (8) La matrice d'adjacente décrit les liens entre les sommets du réseau qui sont ici les banques.
- (9) Les différents programmes sont disponibles sur demande.
- (10) Les données n'étant pas disponibles pour la France, il n'est pas possible de tracer le réseau effectif des relations interbancaires, comme l'ont fait Mueller (2003) pour la Suisse, Boss *et alii* (2004) pour l'Autriche ou Degryse & Nguyen (2004) pour la Belgique.

banques, les risques de change, ou encore l'objectif de maximisation de profit par les banques (les banques sont des banques mutualistes qui maximisent la consommation des déposants). Le fonctionnement du marché interbancaire est routinier, la suspicion mutuelle des banques peut être considérée comme nulle. Ainsi, l'étude se concentre sur l'efficacité de distribution de la liquidité en fonction des différentes architectures de réseaux possibles.

Cette économie interbancaire fonctionne comme suit :

Le temps est discret, divisé en trois intervalles $t = 0, 1, 2$. Chaque intervalle possède une épaisseur et est constitué de plusieurs périodes. Un unique bien stockable est disponible, il est considéré comme le numéraire. Il peut être consommé ou investi. En $t = 0$, les investissements peuvent être faits dans deux actifs : une technologie court terme de stockage ne portant pas intérêt, ou une technologie de long terme illiquide. L'investissement dans cet actif ne peut être fait qu'à la date 0. Une unité investie en $t = 0$ produit $R > 1$ unités de bien à la période 2. Cependant, l'illiquidité n'est pas complète. Si l'actif de long terme est liquidé avant qu'il ne soit arrivé à maturité, il ne produit que r unités de bien de consommation, avec $0 < r < 1$.

L'économie est constituée de $2p$ régions *ex ante* identiques. p est un entier naturel strictement positif. Dans chaque région existe une banque en monopole, les déposants sont immobiles, chaque banque est un sommet du réseau. Cette structure régionale peut être interprétée de différentes façons. Elle peut être vue comme un ensemble d'aires géographiques par exemple, ou comme un ensemble de branches spécialisées de l'industrie bancaire.

Chaque région est peuplée par un continuum de déposants *ex ante* identiques. Chaque déposant est doté d'une unité de consommation en $t = 0$ et ne reçoit aucune dotation ultérieure. Les consommateurs ont des préférences standards à la Diamond Dybvig. Avec une probabilité λ ce sont des consommateurs précoces qui ne valorisent que la consommation à la date 1. Avec une probabilité $1 - \lambda$ ce sont des consommateurs tardifs qui ne valorisent que la consommation à la date 2. Les préférences des consommateurs sont donc données par

$$U(C_1, C_2) = \begin{cases} U(C_1) & \text{avec une probabilité } \lambda \\ U(C_2) & \text{avec une probabilité } 1 - \lambda \end{cases}$$

C_t est la consommation à la date $t = 1, 2$. U est continûment dérivable, croissante et strictement concave.

La probabilité λ varie selon les régions. λ^i est la probabilité d'être un consommateur précoce dans la région i , $i = 1, 2, \dots, 2p$. Il y a deux valeurs possibles pour λ^i : une valeur haute, notée λ_h^i , et une valeur basse notée λ_l^i , avec $0 < \lambda_l^i < \lambda_h^i < 1$. La probabilité de chaque région d'être confrontée à une forte demande de liquidité est égale à un demi. La demande agrégée de liquidité est

donc connue avec certitude *ex ante*. La seule variable inconnue est la distribution des chocs entre les régions.

Les banques sont liées les unes aux autres par un réseau interbancaire de conventions de crédit. Le réseau permet de réduire les montants investis dans les actifs courts non porteurs d'intérêt. Les conventions de crédit avant que la distribution du choc de liquidité ne soit connue. Une fois signées, au début de $t = 0$, les conventions existantes ne peuvent être rompues. Les banques ne peuvent pas en signer de nouvelles. L'introduction d'un réseau de dettes interbancaires permet d'éliminer le risque lié à la distribution de liquidité et de décentraliser l'allocation optimale sous certaines conditions liées à la topologie du réseau (Vivier-Lirimont [2006b]).

En $t = 0$ dans une première étape, les banques encaissent les dépôts de leur région qui sont identiques normalisés à une unité. Dans une deuxième étape, on impose une architecture de réseau. Ces structures peuvent être représentées par des graphes non dirigés dont les liens incarnent les conventions bilatérales de crédit. Dans une troisième étape, les banques allouent leurs fonds de manière à mettre en œuvre l'allocation Pareto optimale.

En $t = 1$ dans une première étape, l'état de la nature (c'est-à-dire la distribution du choc de liquidité) est révélé. La moitié des banques est soumise à un choc de liquidité haut, l'autre moitié à un choc de liquidité bas, si bien que le réseau interbancaire dans son ensemble ne fait face à aucun besoin agrégé de liquidité. Le seul enjeu est celui de la distribution de la liquidité entre les membres du réseau (11). Dans une seconde étape, les opérations de prêts interbancaires ont lieu. Les banques liquides prêtent les fonds dont elles disposent aux banques illiquides auxquelles elles sont liées. Dans une troisième étape, les consommateurs précoces retirent leurs dépôts.

En $t = 2$ la dette interbancaire est remboursée. Enfin, les déposants tardifs retirent leurs dépôts.

Le cœur de la mesure de l'efficacité relative des différents réseaux repose sur le fonctionnement de l'économie interbancaire en $t = 1$. En effet, dans cet intervalle, une fois le choc révélé, les banques liquides signalent leurs besoins de liquidité auprès de leurs voisins directs. Les banques liquides contactées répondent à ce signal par un transfert de leur liquidité disponible vers l'un de leurs voisins illiquides. Le choix du débiteur est fait sur une base aléatoire. Une banque équilibrée disposant dans son voisinage d'une banque sur-liquide et d'une banque illiquide se comporte comme une chambre de compensation : elle emprunte de la liquidité auprès de la banque sur-liquide pour la prêter à la banque illiquide. Une banque équilibrée n'envoie aucun message à ses voisins,

(11) On n'étudie pas la performance relative des différentes architectures quand la liquidité globale du réseau est affectée par le choc.

elle n'agit que dans le cas où elle peut jouer le rôle de chambre de compensation. Il est donc possible, dans cette économie bancaire fictive caractérisée par l'absence totale de régulation, qu'une banque illiquide ayant dans son voisinage plusieurs banques liquides reçoive plus de liquidité qu'elle n'en a réellement besoin pour satisfaire ses besoins, alors que d'autres banques restent, elles, illiquides. Une telle allocation maintient dans le réseau des banques qui disposent d'un excès de liquidité (ce sont les banques sur-liquides), alors que d'autres banques restent, elles, illiquides. Face à cela, il est donc nécessaire de procéder à un second tour d'échange de fonds. Chaque tour d'échange de fonds correspond à une sous-période. Lors de ce second tour, les banques sur-liquides et les banques illiquides signalent leur situation à leur voisinage. Puis de nouvelles opérations de prêts/emprunts ont lieu. Plusieurs banques peuvent à nouveau sélectionner les mêmes partenaires. Le processus se répète tant qu'il y a échange de fonds entre institutions. Le fonctionnement du modèle est concentré en $t = 1$, chacun des tours d'échanges de fonds est donc désigné sous le terme de « période » dans le reste du texte.

1.2. Critères d'efficacité

Nous utilisons des critères d'efficacité distincts. Le premier critère s'attache aux résultats. Il mesure la capacité du réseau à équilibrer les besoins de liquidité des banques illiquides à chacune des étapes de transferts de fonds. Il s'agit de l'efficacité allocative. Sa définition formelle est la suivante :

Définition 1. *Efficacité allocative : capacité d'un réseau à présenter un rythme de décroissance du nombre de banques illiquides élevé. Un réseau $V^{(1)}$ sera plus efficace qu'un réseau $V^{(2)}$, si le nombre de banques passant du statut de banque illiquide à celui de banque équilibrée (12) est plus élevé dans le réseau $V^{(1)}$ que dans le réseau $V^{(2)}$ à chaque période (13).*

Notons que l'efficacité allocative peut être vue sous deux angles :

- l'efficacité allocative moyenne compare le nombre moyen de banques passant de statut illiquide au statut équilibré en moyenne au long de l'ensemble du processus d'échanges de fonds ;
- l'efficacité allocative marginale compare la baisse du nombre de banques illiquides à la fin de chaque période.

Le second critère s'intéresse plus spécifiquement au processus d'échanges de fonds entre les banques. On doit en la matière considérer tant le nombre de transactions qui a lieu à chaque sous-période [c'est l'efficacité transactionnelle] que le nombre de sous-périodes au final nécessaire pour obtenir la décen-

(12) Une banque équilibrée ne présente ni excès ni besoin de liquidité.

(13) Ou alternativement à chaque tour d'échange de fonds.

tralisation de l'allocation Pareto optimale [c'est l'efficacité temporelle]. On peut les définir comme suit :

Définition 2. *Efficacité transactionnelle : capacité d'un réseau à atteindre l'allocation Pareto optimale en un nombre d'échanges réduit. Elle est mesurée par le nombre de transactions réalisées au cours de chaque période. Plus ce nombre est faible, plus le réseau est efficace.*

Définition 3. *Efficacité temporelle : capacité d'un réseau à décentraliser l'allocation Pareto optimale en un temps court. Elle est mesurée par le nombre moyen de périodes nécessaires à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale. Plus ce nombre est faible, plus le réseau est efficace.*

Ces deux critères sur les processus ne doivent pas être confondus. La multiplication des transactions au sein d'un réseau ne garantit pas nécessairement que celui-ci sera en mesure de décentraliser plus vite l'allocation Pareto optimale.

1.3. Le programme de simulations

Le modèle ainsi établi nous sert de base pour la construction d'un programme reproduisant l'économie et dont l'objectif est de mesurer différents indicateurs concernant le processus de distribution de liquidité, ainsi que les résultats de ce processus sur la situation de liquidité des banques. Les programmes sont construits avec le logiciel Gauss 6.0.

Pour chaque topologie dont nous souhaitons mesurer l'efficacité, il est nécessaire d'établir un programme de simulations de Monte Carlo distinct. Chaque programme repose sur la matrice d'adjacente décrivant les liens entre les membres du réseau. En s'appuyant sur Vivier-Lirimont (2006b), on se concentre sur les réseaux à une composante (14) seuls susceptibles de décentraliser l'allocation Pareto optimale, à savoir le réseau complet, le réseau en étoile, les réseaux k -régulier (15) avec $k \geq p$. On étudie également les réseaux qui ne décentralisent pas l'allocation Pareto optimale avec une probabilité 1, à savoir le réseau circulaire, et les réseaux k -réguliers avec $k \leq p$. Pour ces derniers, nous cherchons à connaître l'ampleur des erreurs de distribution de liquidité entre les participants ainsi qu'à étudier les cas dans lesquels l'allocation Pareto optimale peut être décentralisée pour des raisons de structure ou de distribution particulière des chocs.

Plusieurs jeux de simulations sont menés, en modifiant deux variables : la taille des réseaux et les structures de matrices d'adjacente. La modification de

(14) C'est-à-dire un graphe connexe dans lequel la distance géodésique entre chaque paire de sommets est finie.

(15) Dans un tel réseau, chaque banque dispose de k partenaires exactement.

l'ampleur des chocs hauts et bas ne modifie en rien les résultats. On ne présentera donc pas de résultats en faisant varier ces derniers. On considère des réseaux à 30, 100 et 500 banques afin de dégager les effets liés à la taille du réseau. Puis, pour chacune des tailles considérées, on fait varier les structures d'adjacente : réseaux complets, circulaires, en étoile, et k -réguliers. Les principaux résultats analysés dans le corps du texte sont les résultats pour le réseau à 100 banques. Les résultats des simulations pour les réseaux à 30 et 500, présentés en annexe, nous seront utiles lorsque des effets liés à la taille ont pu être déterminés. Les simulations sont conduites 10 000 fois.

À chaque type d'efficacité correspond un indicateur :

— pour mesurer l'efficacité temporelle, on s'appuiera sur le nombre de périodes nécessaires pour atteindre la situation Pareto optimale ;

— pour mesurer l'efficacité allocative, on s'appuiera sur le nombre de banques encore illiquides à la fin de chaque sous période ;

— pour mesurer l'efficacité transactionnelle, on s'appuiera sur le nombre de transactions enregistrées à chaque période.

Pour chaque indicateur, le programme nous donne la moyenne (μ), l'écart type (σ), et les valeurs extrêmes (maxima et minima). L'algorithme suit les étapes de construction présentées à la figure 1.

La construction des matrices d'adjacente pour les réseaux en étoile, complets, et circulaires est simple. En revanche, la construction des réseaux k -réguliers suppose un certain nombre de conditions précises afin que les réseaux établis ne présentent pas des propriétés particulières. La section suivante détaille donc le mode de construction de la matrice d'adjacente pour ces réseaux.

1.4. Construction des réseaux k -réguliers

Dans un réseau k -régulier, chaque banque dispose de k partenaires exactement. Le programme doit faire en sorte que les liens construits soient aléatoires. Or, les choix des banques quant à leurs partenaires ne sont pas indépendants les uns des autres. Il a donc été nécessaire de construire la matrice d'adjacente sommet par sommet en tenant compte de cette contrainte. Le programme se décompose donc en plusieurs phases, chacune d'entre elles correspondant à la construction des arêtes pour un sommet particulier.

Dans une première phase, un premier sommet est sélectionné dans l'ensemble des $2p$ sommets du réseau, sur la base d'une probabilité de sélection uniforme. On tire alors de manière aléatoire k -sommets parmi $(2p - 1)$ avec lesquels les arêtes sont construites. Le réseau dispose à l'issue de cette étape d'un sommet de degré k , de k sommets de degré 1 et de $(2p - k - 1)$ sommets de degré 0.

FIGURE 1 : Structure générale de l'algorithme

Dans une seconde phase, un second sommet est sélectionné sur la base d'une probabilité uniforme au sein des $(2p - 1)$ sommets de degré strictement inférieur à k . Si le sommet sélectionné est de degré 0, on tire de manière aléatoire

k sommets partenaires parmi les $2p - 2$ sommets restants. Si le sommet sélectionné est de degré 1, on procède au tirage de $k - 1$ partenaires seulement. La procédure se répète sommet par sommet. Aux étapes ultérieures, le tirage d'un sommet pour lequel les liens vont être construits est réalisé dans l'ensemble des sommets dont le voisinage est de taille inférieure à k à l'étape précédente. À chaque étape, la sélection des k partenaires se fait également dans l'ensemble des banques pour lesquelles le voisinage est de taille inférieure à k à l'étape précédente. Lorsque tous les sommets sont liés à k partenaires exactement la procédure s'arrête.

II. — EFFICACITÉ RELATIVE DES RÉSEAUX DÉCENTRALISANT L'ALLOCATION PARETO OPTIMALE

2.1. Efficacité temporelle

L'efficacité temporelle est mesurée par le nombre moyen de périodes nécessaires à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale. Cet indicateur est mesuré par la variable NP . Selon les topologies, on obtient les résultats suivants, dans le cas d'un réseau à 100 banques :

TABLEAU 1 : *Efficacité temporelle*

NP	Étoile	50-régulier	Complet	Étoile contrainte
μNP	3,679	4,30	4,31	5,293
σNP	1,68	0,54	0,54	0,54

NP donne le nombre de périodes pendant lesquelles il y a échanges de fonds dans le réseau. μ_{NP} est la moyenne observée de cette variable. Elle indique la durée moyenne nécessaire pour décentraliser l'allocation Pareto optimale. σ_{NP} est l'écart type observé de la variable NP .

On considère trois types de réseaux : l'étoile, les réseaux k -réguliers le réseau complet, et un réseau dit en étoile contrainte dans lequel on contraint la situation initiale de la banque au centre comme étant toujours en situation d'excès de liquidité (en d'autres termes le centre de l'étoile est touché par le choc bas).

2.1.1. Réseaux en étoile

Le réseau en étoile apparaît être celui dans laquelle l'efficacité temporelle est la meilleure. En effet, dans ce réseau, la structure limite le nombre de périodes d'échanges de fonds. Le centre de l'étoile joue le rôle de chambre de compensation pour l'ensemble des banques de la périphérie. Après le premier échan-

ge de fonds entre le centre et la périphérie, la banque au centre concentre toute l'information sur la situation de liquidité des banques. C'est par son intermédiaire que les échanges de fonds sont réalisés.

Si l'on compare le réseau en étoile quelconque au réseau en étoile contraint, on observe un écart de 1,6 en moyenne pour le nombre de périodes nécessaires pour décentraliser l'allocation Pareto optimale. Cet écart est expliqué en partie par la contrainte que l'on fait peser sur le centre lors de la sous-période initiale. Lorsque cette dernière est liquide, en effet, elle transfère sa liquidité vers un partenaire illiquide de la périphérie lors d'une première période, puis elle joue le rôle de chambre de compensation dans une seconde période, et les besoins de liquidité des autres banques de la périphérie ne sont couverts que dans une troisième étape. En revanche, dans le cas où la banque au centre est illiquide, elle reçoit la liquidité de toutes les banques liquides de la périphérie lors de la première étape, puis elle réalise la distribution vers les banques illiquides de la périphérie dès la seconde étape. Dès lors, on ajoute de manière systématique une période à la durée de l'échange de fonds. Ceci nous laisse donc un écart de 0,6 lié à la taille du réseau (16). Si on compare les résultats obtenus dans le cas du réseau à 30 banques (voir résultats en annexe), on peut observer que l'écart entre l'étoile contrainte et l'étoile quelconque pour la durée moyenne d'échanges de fonds est de 1,034 unités.

La valeur de l'écart type de NP mesurée dans le réseau en étoile est trois fois plus élevée dans le cas de l'étoile que pour les autres réseaux. Cette différence provient également du rôle particulier joué par le centre, et de l'influence cruciale qu'y joue le statut de liquidité initial de cette banque. Dans les autres réseaux, les compensations d'offres et de demandes de liquidité touchent plus d'une banque dès la première étape. C'est ce décalage qui explique la valeur de σ_{NP} . Si on contraint le statut de la banque au centre à être initialement liquide, on retrouve en effet la même valeur pour σ_{NP} .

La croissance de la taille (17) du réseau en étoile affecte bien moins que proportionnellement l'efficacité temporelle. En effet, le passage d'un réseau de 100 à 500 banques se traduit par une détérioration de 21,5 % de l'efficacité temporelle (voir résultats en annexe).

(16) Nombre de banques participantes.

(17) La croissance de la taille du réseau en étoile correspond à l'augmentation du nombre de banques dans le réseau. Chaque banque étant un nœud de réseau, du fait de la topologie de l'étoile cette croissance correspond strictement à l'augmentation du nombre de branches. Envisager une ramification supplémentaire conduirait à changer la topologie du réseau.

2.1.2. Réseaux k -réguliers

Notons que dans les réseaux k -réguliers, la condition $k \geq p$ est une condition suffisante mais non nécessaire à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale (18). En effet, pour certaines valeurs de $k < p$, et pour certaines distributions des chocs, le réseau k -régulier peut décentraliser l'allocation Pareto optimale. Cette situation est donc économiquement intéressante à étudier. Ainsi, dans le cas du réseau à 100 banques, les simulations montrent que, dans 99 % des cas ou plus, le réseau construit décentralise l'allocation Pareto optimale pour $k > 22$. Dans le réseau à 30 banques, il suffit de $k > 10$. Pour évaluer la sensibilité de l'efficacité temporelle à la taille des voisinages, on considérera donc tous les réseaux réguliers qui décentralisent l'allocation Pareto optimale dans plus de 99 % des cas.

Dans les réseaux de grande taille (100 et 500 participants), l'efficacité temporelle est très faiblement dégradée par la croissance de la taille des voisinages. Dans les réseaux à 100 banques, pour un voisinage de 22, la durée nécessaire à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale [4,29] est sensiblement identique à la durée nécessaire dans le réseau complet (19) [4,31], soit une dégradation de moins de 0,5 %. Cette situation est faiblement liée à la taille. En effet, dans un réseau à 30 banques, le passage de voisinages de 11 à un voisinage de 29 conduit à une dégradation de 1 % de l'efficacité temporelle. Plus le réseau est grand, moins la taille des voisinages joue un rôle déterminant dans l'efficacité de distribution. Le réseau complet est donc, en regard de ce critère, sous-optimal car il ne permet pas de minimiser le nombre de périodes moyen d'échange de fonds. Pour tous les réseaux k -régulier les performances sont très similaires. Il n'est donc pas réellement possible de discriminer ces réseaux entre eux. Les réseaux ne sont pas différents significativement en termes d'efficacité temporelle. Quelle que soit la densité du réseau k -régulier, il n'y a pas de différence significative quant au nombre moyen de périodes nécessaire pour atteindre la distribution Pareto optimale. Le modèle ne permet pas de constater ni phénomène de percolation, ni situation dans laquelle la durée nécessaire à la décentralisation de la situation Pareto optimale s'accroît plus que proportionnellement.

2.1.3. Réseau complet

Le réseau complet exhibe une durée moyenne d'échanges de fonds intermédiaire entre l'étoile et l'étoile contrainte (4,31 dans le cas du réseau complet, contre 5,293 dans le cas du réseau en étoile contrainte et 3,679 dans le cas de l'étoile). L'écart type mesuré pour NP est identique à celui mesuré dans le cas de l'étoile contrainte.

(18) On se reportera pour un détail de ce résultat théorique à Vivier-Lirimont (2006b).

(19) Le réseau complet est par définition le réseau k -régulier dans lequel la taille des voisinages est la plus élevée.

2.2. Efficacité allocative

La mesure de l’efficacité allocative repose sur le nombre de banques restant illiquides à la fin de chaque période d’échanges de fonds. La variable observée pour cet indicateur est notée DL . DL_i est le nombre de banques encore illiquides à la fin de la période i . Selon les réseaux, les résultats sont les suivants pour le réseau à 100 banques.

TABLEAU 2 : Efficacité allocative							
Étoile		DL_1	DL_2	DL_3	DL_4	DL_5	DL_6
	μ_{DL}	49	9,067	3,166	1,003	0,181	0,002
	σ_{DL}	0	9,07	3,3	1,19	0,41	0,04
Étoile contrainte	μ_{DL}	49	17,885	6,251	1,944	0,347	0,003
	σ_{DL}	0	2,162	1,530	0,942	0,513	0,056
Complet	μ_{DL}	18,234	6,354	1,991	0,36	0,004	0,001
	σ_{DL}	2,195	1,552	0,960	0,524	0,064	0,06
50-régulier	μ_{DL}	18,11	6,34	2	0,36	0,002	0,001
	σ_{DL}	2,21	1,54	0,95	0,52	0,06	0,04

Une représentation graphique de la variable μ_{DL} pour les différents types de réseaux nous permet une vision d’ensemble. Les résultats montrent que les réseaux complets et k -réguliers disposent de la meilleure efficacité allocative marginale. En effet, après chaque étape d’échanges de fonds, il reste dans ces

FIGURE 3 : Rythme de décroissance du nombre de banques illiquides rapporté au nombre total de banques dans le réseau en étoile

réseaux moins de banques illiquides que dans les réseaux en étoile et en étoile contraint.

2.2.1. Réseau en étoile

La nature des résultats concernant l'étoile est, comme dans le cas de l'efficacité allocative, liée au rôle particulier de la banque placée au centre du réseau. Ces résultats sont conformes à l'intuition. Ainsi, après la première étape d'échanges de fonds, il reste nécessairement encore 49 banques illiquides. De plus, c'est la situation de liquidité initiale de la banque au centre du réseau qui explique la différence notable dans la valeur des écarts types de la variable DL_2 entre le réseau en étoile [9,07] et l'étoile contrainte [2,162]. Il provient du caractère bimodal de la distribution.

Comme on l'observe à la figure 3, la taille n'a pas d'effet significatif sur le rythme de décroissance du nombre de banques illiquides rapportée à la taille totale du réseau.

2.2.2. Réseau complet

Pour le réseau complet, l'écart avec les réseaux en étoile est net pour la mesure de la décroissance du nombre de banques illiquides à la première période: l'efficacité allocative marginale de première période du réseau complet est bien supé-

rieure à celle du réseau en étoile. En comparant l'étoile contrainte et le réseau complet, on observe un décalage d'une période lié au rôle de chambre de compensation universel joué par le centre. Si l'on s'extrait de cet effet, on constate que l'efficacité allocative du réseau complet est similaire à celle du réseau en étoile contraint. Le nombre de banques encore illiquides à la fin de la période χ dans le réseau complet n'est pas significativement différent du nombre de banques encore illiquides dans le réseau en étoile à la fin de la période $(\chi + 1)$.

Les effets liés à la taille sont proches de ceux constatés dans le cas de l'étoile. La croissance du nombre de périodes nécessaire à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale est moins que proportionnelle à la croissance du nombre de banques dans le réseau. Il n'y a pas d'effet lié à la taille sur le rythme de décroissance marginal du nombre de banques illiquides.

Quelle que soit la structure de réseau en jeu, ce n'est pas la taille du réseau mesurée par le nombre de banques insérées dans le réseau qui influence l'efficacité allocative, mais la structure d'adjacente des liens entre les intervenants.

2.2.3. Réseaux k -réguliers

Dans les réseaux k -réguliers, l'efficacité allocative de première période est une fonction croissante de la taille des voisinages des banques à chacune des périodes en jeu. Ce résultat représenté à la figure 5 pour la période 1 demeure vrai pour toutes les périodes.

FIGURE 4 : Rythme de décroissance du nombre de banques illiquides par rapport au nombre total de banques dans le réseau complet

L'efficacité allocative est une fonction faiblement décroissante de la taille des voisinages. L'augmentation de la taille des voisinages conduit donc à une multiplication des erreurs de transmission entre les banques. Il apparaît donc que sur ce critère, ce soit le réseau k -régulier avec k minimal qui obtienne la meilleure efficacité.

On doit également se pencher sur l'efficacité allocative moyenne. Celle-ci peut être calculée comme la moyenne du nombre de banques demeurant illiquides à la fin de chaque période pour l'ensemble des périodes lors desquelles il y a échanges de fonds entre les banques. Plus cette moyenne est basse, plus le réseau considéré est efficace dans la mesure où il permet alors une allocation des fonds plus rapide entre les banques.

TABLEAU 3 : Efficacité allocative moyenne dans un réseau à 100 banques

Taille du voisinage	22	25	30	35	40	45	50	55	60
Efficacité moyenne	5,282	5,298	5,32	5,336	5,35	5,354	5,362	5,368	5,374
Taille du voisinage	65	70	75	80	85	90	95	97	99
Efficacité moyenne	5,374	5,378	5,38	5,386	5,386	5,388	5,388	5,389	5,39

Sur ce critère c'est le réseau qui présente le voisinage le plus réduit qui obtient la meilleure performance. La dégradation de l'efficacité allocative moyenne en fonction de la croissance de la taille des voisinages dépend de la taille du réseau en place. En effet, dans le réseau à 30 banques l'effet défavorable de la croissance de la taille des voisinages est deux fois plus fort que celui constaté dans le réseau à 100 banques et cinq fois plus élevé que celui constaté dans le réseau à 500 banques.

Pour les réseaux k -réguliers décentralisant l'allocation Pareto optimale dans plus de 99 % des cas, il n'y a pas de différence notable liée à la taille du voisinage pour les écarts types de distributions qui sont identiques quelle que soit la taille du voisinage choisi.

TABLEAU 4 : Mesure des écarts types dans les réseaux réguliers

	DL_1	DL_2	DL_3	DL_4	DL_5
σDL_i	2,21	1,54	0,95	0,52	0,06

2.3. Efficacité transactionnelle

L'efficacité transactionnelle se mesure à l'aune du nombre de transactions enregistré à chaque période entre les banques. On note τ_i le nombre de transactions enregistré dans le réseau au cours de la période i .

FIGURE 5 : Nombre de banques illiquides à la fin de la première période en fonction de la taille des voisinages (réseaux k-réguliers)

TABLEAU 5 : Efficacité transactionnelle

Étoile		τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
	μ_τ	25,126	49	9,067	3,166	1,003
	σ_τ	24,5	0	9,07	3,3	1,19
Étoile contrainte	μ_τ	1	49	17,885	6,251	1,944
	σ_τ	0	0	2,162	1,530	0,942
Complet	μ_τ	50	18,234	6,354	1,991	0,36
	σ_τ	0	2,195	1,552	0,960	0,524
50-régulier	μ_τ	50	18,07	6,33	1,99	0,37
	σ_τ	0	2,21	1,54	0,95	0,52

Dans le cas des réseaux décentralisant l'allocation Pareto optimale, la mesure du nombre de transactions à chaque période n'apporte aucune information supplémentaire par rapport à la mesure du nombre de banques illiquides à la fin de chaque période d'échanges de fonds utilisé pour le critère de l'efficacité allocative. En effet, du fait du processus même d'échange de fonds tel que décrit à la section 1.1, pour ces réseaux, le nombre de banques illiquides à la fin de la période χ est égal au nombre de transactions lors de la période $(\chi + 1)$. Ce constat n'est pas vérifié pour les réseaux ne permettant pas de décentraliser l'allocation Pareto optimale, comme nous le verrons dans la section 3.

2.3.1. Réseau en étoile

Le cas du réseau en étoile illustre à nouveau la bi-modalité de la distribution, et les caractéristiques particulières liées au rôle du centre par lequel transitent tous les échanges de liquidité. Si la banque au centre est liquide, il n’y a qu’un unique transfert de fonds à la première période entre la banque au centre et une banque illiquide de la périphérie. Si la banque au centre est illiquide. Elle reçoit alors le versement de toute la liquidité disponible dans le réseau lors de la première période. Ce caractère spécifique explique les valeurs μ_τ et σ_τ observées pour la première période. Pour les périodes ultérieures l’enchaînement est en tout point similaire à celui décrit pour la mesure de l’efficacité allocative avec un décalage d’une période.

2.3.2. Les réseaux *k*–réguliers et le réseau complet

On retrouve ici les résultats obtenus pour la mesure de l’efficacité allocative. La croissance de la taille des voisinages vient réduire l’efficacité transactionnelle; elle s’accompagne d’une hausse du nombre de transactions au sein de chaque période en moyenne. L’efficacité transactionnelle moyenne est calculée comme la moyenne des transactions enregistrées sur le nombre de périodes lors desquelles il y a échanges de fonds. Plus cette moyenne est élevée, plus il y a de transactions dans le réseau et moins ce dernier est efficace dans sa fonction d’allocation des liquidités. Le nombre de transactions est une fonction croissante de la taille des voisinages. L’effet est cependant limité, comme le montre le tableau suivant pour le réseau à 30 banques. On s’appuie à nouveau ici sur les réseaux décentralisant l’allocation Pareto optimale dans plus de 99 % des cas.

TABLEAU 6 : Efficacité transactionnelle moyenne dans un réseau à 30 banques								
Taille du voisinage	11	12	13	14	15	16	17	18; 19
Efficacité moyenne	5,473	5,485	5,493	5,498	5,505	5,508	5,513	5,52
Taille du voisinage	20	21	22	23	24; 25	26; 27	28	29
Efficacité moyenne	5,523	5,525	5,528	5,53	5,533	5,535	5,540	5,540

Selon ce critère, le réseau complet est le réseau dans lequel il y a le plus d’échanges de fonds en moyenne. La croissance de la taille des voisinages s’accompagne d’une augmentation des erreurs de distribution par les banques.

Selon les critères d’efficacité choisis, le classement des réseaux selon leurs performances est donc variable. Si l’on s’attache à l’efficacité temporelle, il apparaît que le réseau en étoile obtient les meilleurs résultats, alors que si l’on s’attache à l’efficacité allocative, les réseaux *k*–réguliers se comportent de façon plus efficace car ils permettent dès la première période de connaître une baisse plus significative du nombre de banques illiquides. Quel que soit le cri-

tère en revanche, la croissance de la taille des voisinages vient obérer l'efficacité des réseaux.

**III. — EFFICACITÉ RELATIVE DES RÉSEAUX
NE DÉCENTRALISANT PAS L'ALLOCATION PARETO OPTIMALE**

On s'attachera ici au réseau circulaire et aux réseaux k -réguliers décentralisant l'allocation Pareto optimale dans moins de 99 % des cas. On adoptera ici une présentation par type de réseau, et non par efficacité. Il ne s'agit pas en effet de comparer les degrés d'efficacité des réseaux les uns par rapport aux autres mais de s'attacher à comprendre le fonctionnement de ces réseaux qui ne décentralisent pas l'allocation Pareto optimale.

3.1. Le réseau circulaire

Pour le réseau circulaire à 100 banques, on obtient les résultats suivants pour les variables observées NP , DL et τ . On présente pour chacune des variables observées la moyenne (μ), l'écart type (σ), et les valeurs maximales (Max) et minimales (Min) observées.

TABLEAU 7 : Réseau circulaire						
	NP	DL_1	DL_2	τ_1	τ_2	τ_3
μ	1,923	21,127	17,150	35,472	2,467	0
σ	0,266	3,153	5,881	3,930	1,511	0
Max	2	37	35	47	9	0
Min	1	10	0	16	0	0

Du fait de la structure du réseau et du mode de distribution de la liquidité, la distribution est dégénérée. Dans le réseau circulaire, chaque banque dispose de deux voisins. Il n'y a dès lors que deux périodes d'échanges de fonds. Lors de la première période les banques liquides transfèrent leurs excès de liquidité à l'un de leurs voisins directs illiquides. Dans la seconde période, les banques équilibrées disposant d'un voisin liquide à droite et d'un voisin illiquide à gauche, sont en mesure de jouer le rôle de chambre de compensation. Au-delà de ces deux périodes, il n'y a plus d'échange de fonds dans la mesure où la distance géodésique entre toute banque liquide et toute banque illiquide est strictement supérieure à 2, cf. Vivier-Lirimont (2006b).

Dès lors la durée d'échange de fonds dans les réseaux (NP) est en moyenne inférieure à 2, avec un écart type faible. En moyenne, ce réseau ne permet de couvrir que 55 % des besoins totaux de liquidité. Le nombre de transaction à la période χ est ici différent du nombre de banques illiquides à la période $(\chi - 1)$. L'écart constitue une mesure de l'inefficacité du réseau. En effet, il

permet de mesurer en partie les transactions qui ne permettent pas de combler de nouveaux besoins de liquidité au cours du processus. De plus, les bornes supérieures des variables DL_1 et DL_2 sont plus élevées dans le cas du réseau circulaire que dans le cas des réseaux permettant de décentraliser l'allocation Pareto optimale. Ceci souligne que le réseau circulaire est fortement dépendant de la distribution des chocs de liquidité, alors que les réseaux capables de décentraliser l'allocation Pareto optimale peuvent par leur structure dépasser la situation issue de la distribution initiale des chocs grâce à une circulation efficace de la liquidité entre les banques parties prenantes au réseau. Conformément à cette dépendance à la distribution des chocs de liquidité, on remarque que le réseau circulaire exhibe des valeurs d'écarts types plus élevées que dans toute autre structure décentralisant l'allocation Pareto optimale (à l'exception notable de l'étoile pour la variable DL_2).

3.2. Les réseaux k -réguliers avec $k \leq p$

Dans cette classe de réseaux, le pourcentage de succès est une fonction croissante non linéaire de la taille du voisinage, comme on le présente à la figure 6.

Pour des voisinages plus grands que 4, il apparaît des cas dans lesquels l'allocation Pareto optimale est décentralisée. Ces cas se produisent en raison d'une répartition particulière des chocs qui garantit une compensation des besoins de liquidités par les excès de liquidités en dépit du fait que la structure ne permet pas théoriquement d'obtenir un tel résultat. Pour chacun des voisinages de taille Ω , on désagrège donc les résultats en fonction de la variable Ξ , en notant $\Xi = 1$ si le réseau décentralise l'allocation Pareto opti-

FIGURE 6 : Taux de décentralisation de l'allocation Pareto optimale en fonction de la taille des voisinages

male, et $\Xi = 0$ sinon. On présente les résultats dans un tableau désagrégué des succès et échecs proposés en annexe 5.2.

Les réseaux avec une connectivité basse (*i.e.* un voisinage faible) sont très efficaces lorsqu'ils parviennent à décentraliser l'allocation optimale. Il suffit en effet en moyenne de 3,62 périodes pour atteindre l'efficacité distributive dans le cas du réseau 4-régulier, lorsque celle-ci est atteinte. Par comparaison, 4,31 périodes sont nécessaires dans le réseau 50-régulier. Cette efficacité tient cependant à la distribution des chocs et à la structure du réseau. En effet, la réduction du degré de chaque nœud permet de réduire les erreurs de transmissions au cours de périodes d'échanges de fonds. Il faut noter dans le cas où l'allocation Pareto optimale est décentralisée, que le nombre de banques illiquides à la fin de la période i est égal au nombre de transactions lors de la période $i + 1$. Cette égalité n'est pas vérifiée dans le cas des réseaux ne décentralisant pas l'allocation Pareto optimale. En ce cas, le nombre des transactions à la période $i + 1$ est toujours inférieur au nombre de banques illiquides à la fin de la période i . Les transactions effectuées ne permettent pas de couvrir les besoins de liquidité constatés au sein du réseau. Plus la taille des voisinages est faible, plus cet écart se manifeste de manière précoce, et donc plus il y aura au final de banques dont les besoins de liquidités ne seront pas couverts. Pour des voisinages de taille inférieure à 10, l'écart se mesure dès la première période. Pour des voisinages entre 11 et 17, l'écart n'apparaît qu'à la seconde période, au-delà et jusqu'à un voisinage de 49 l'écart ne concerne que les périodes 3, 4 et 5. Il est, en ce cas, assez faible : les performances du réseau en termes de distribution de la liquidité sont assez proches de celle des réseaux qui décentralisent l'allocation Pareto optimale. Ces conclusions se retrouvent dans le cas du réseau à 30 banques comme le souligne le tableau 9 de l'annexe 5.3.

IV. — ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER DE RÉSEAU k -RÉGULIER

Un cas particulier des réseaux k -réguliers souligne nettement l'effet de la structure sur l'efficacité de la distribution de la liquidité. La matrice d'adjacente de ces réseaux ne suit pas la procédure de construction telle que décrite dans la section 1.4.

4.1. Construction des réseaux k -réguliers particuliers

Il ne s'agit pas de construire des réseaux quelconques mais au contraire des réseaux dans lesquels les liens sont polarisés. On procède comme suit.

Les banques sont situées sur un cercle et numérotées de 1 à $2p$. La procédure impose que la banque i se lie prioritairement à ses voisins directs. Ainsi, si l'on considère la banque $i = 50$, dans un réseau 20-régulier les liens sont construits de manière symétrique à gauche et à droite de i , c'est-à-dire que la banque 50 se lie aux banques $50 - j$, et $50 + j$ où l'entier naturel $j \in [1, 10]$. Le réseau ainsi construit est donc fortement polarisé autour de la banque i . Au cas

où le nombre de liens k est impair on considère un nombre identique de liens pairs à droite et à gauche de i , et un dernier lien reliant la banque i à celle se trouvant diamétralement à son opposée sur le cercle. Pour un réseau 21-régulier par exemple, la banque $i = 50$ se lie comme précédemment aux banques $50 - j$, et $50 + j$ avec $j \in [1, 10]$ et à la banque 100.

4.2. Décentralisation de l'allocation Pareto optimale et mesures d'efficacité

Si l'on choisit le cas d'un réseau k -régulier dans lequel k est impair, il est possible de décentraliser l'allocation Pareto optimale dans 100 % des cas pour des voisinages inférieurs à p . Ainsi, dans un réseau à 100 banques, il suffit d'un voisinage de 33 pour être dans ce cas. Dans les réseaux k -réguliers quelconques, il est nécessaire d'atteindre le réseau 50-régulier pour vérifier cette propriété. Avec ce type de structure, en effet la taille de voisinage de (33) donne au réseau la propriété de distance qui permet la décentralisation de l'allocation Pareto optimale : la distance géodésique entre toute paire de banques est au maximum de 2 (Vivier-Lirimont [2006b]).

On peut en outre vérifier par le logiciel UCINET 6.0 que, pour ce réseau régulier particulier à 100 banques, 33 est bien la taille de voisinage seuil au-delà de laquelle la distance entre tout couple de banque pris deux à deux est inférieure ou égale à 2. Avec une telle structure, dans le cas régulier, la distance géodésique moyenne entre deux banques est de 1,692. La matrice des distances géodésiques exactes donne des distances entre tout couple de banques quelconques, elles sont au maximum de 2. En revanche, pour un réseau 32-régulier, la distance moyenne est de 2,061 et la distance exacte entre tout couple de banques quelconque est au maximum de 4.

On peut donc penser que ce mode de construction des réseaux k -réguliers est globalement plus efficace dans la mesure où il permet de décentraliser avec certitude l'allocation Pareto optimale pour une taille de voisinage moindre que dans le cas quelconque pour lequel il est nécessaire de disposer d'au moins 50 partenaires par banque impliquée dans le réseau. Mesurons pour ce réseau l'efficacité temporelle, l'efficacité allocative et l'efficacité transactionnelle. Pour chacune des variables observées (NP , DL , et τ) on propose la moyenne μ , l'écart type σ est les valeurs maximales et minimales (Max et Min).

TABLEAU 8 : Réseau k -régulier particulier avec $k = 33$										
	NP	DL_1	DL_2	DL_3	DL_4	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
μ	4,31	18,649	6,525	2,054	0,388	50	18,649	6,525	2,054	0,388
σ	0,547	2,291	1,567	0,964	0,533	50	2,291	1,567	0,964	0,533
Max	6	30	13	6	2	50	30	13	6	2
Min	3	9	2	0	0	50	9	2	0	0

Les variables DL_i et τ_i observées dans le cas de ces réseaux k -réguliers particuliers ne donnent pas des résultats significativement différents de ceux obtenus dans le cas des réseaux k -réguliers quelconques (tableaux 1, 2 et 5). Cependant, ce constat n'est vrai qu'en moyenne. On est en mesure de souligner des comportements très différents selon que le voisinage est pair ou impair.

Dans le cas des voisinages pairs, les réseaux sont fortement centralisés autour des banques proches en terme de réseaux. Par construction en effet pour la banque i , les liens sont établis de manière symétrique de part et d'autre de i de manière à ce que i soit liée à ses $k/2$ voisins à droite les plus proches et à ses $k/2$ voisins les plus proches à gauche sur le cercle.

En revanche, si l'on se trouve dans le cas d'un réseau k -régulier avec k impair, la construction impose un lien avec chacun des $(k - 1)/2$ voisins les plus proches de (i) à sa droite et un lien avec chacun des $(k - 1)/2$ voisins les plus proches de (i) à sa gauche, le $k - i$ ème lien unit la banque i à la banque j qui lui est diamétralement opposée sur le cercle. Ce lien supplémentaire permet de réduire la polarisation du réseau en permettant à chaque banque d'avoir accès à un « bassin de liquidité » plus lointain en terme de réseau et partant plus large en nombre de voisins. Ce pont de réseau permet de réduire nettement les distances entre les banques parties prenantes. Ainsi pour un réseau k -régulier à 100 banques, on obtient les résultats suivants concernant l'efficacité distributive (pourcentage de succès de la décentralisation de l'allocation Pareto Optimale) pour les k impairs :

TABLEAU 9 : Pourcentage de décentralisation de l'allocation Pareto optimale δ en fonction de k (impair)												
k	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	≥ 33
δ	2	5	14	27	42	54	64	72	80	87	93	100

TABLEAU 10 : Pourcentage de décentralisation de l'allocation Pareto optimale δ en fonction de k (pair)										
k	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
δ	0	1	2	3	6	10	17	25	35	46
k	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
δ	55	62	71	77	81	86	90	94	97	100

Le taux de succès est donc une fonction croissante du nombre de liens, mais le taux de croissance est beaucoup plus rapide dans le cas des voisinages impairs que dans le cas des voisinages pairs.

Cet effet est lié à l'accès pour chaque banque à un sous-ensemble de liquidité plus « vaste » en terme de partenaires dans le cas impair que dans le cas

FIGURE 7 : Évolution du taux de décentralisation de l'allocation optimale dans les réseaux k -réguliers particuliers

pair. Les réseaux à voisinages impairs sont moins polarisés que les réseaux à voisinage pair. L'efficacité de la distribution de la liquidité entre les membres du réseau est donc particulièrement dépendante de la structure du réseau en place. Ce mode de construction particulier du réseau montre que les banques ont intérêt à disposer de liens avec des banques relativement lointaines sur le cercle. Elles ont ainsi accès dans une distance courte à un bassin différent qui leur permet de trouver des liquidités avec plus de facilité. L'allure des courbes de la figure 7 n'est aucunement modifiée par une multiplication du nombre de banques dans les réseaux. Le modèle ne permet pas de détecter de phénomène de percolation.

CONCLUSION

L'analyse par simulations nous permet de discriminer plus avant les réseaux entre eux en se fondant sur deux types d'indicateurs d'efficacité relative des réseaux. Il apparaît ainsi qu'au sein des réseaux décentralisant l'allocation Pareto optimale, les vitesses de transactions, le nombre d'échanges et le rythme de décroissance du nombre de banques illiquides dépendent de l'architecture générale du réseau et de la taille des voisinages. Le réseau en étoile permet ainsi de minimiser le temps d'échange nécessaire à la décentralisation de l'allocation Pareto optimale. Dans les réseaux k -réguliers deux éléments sont essentiels pour comprendre la différence entre les réseaux : d'une part la structuration générale des liens qui détermine le degré de polarisation du réseau, et

d'autre part la taille des voisinages. Les effets vont dans le même sens, la croissance de la taille des voisinages, ainsi que la polarisation plus forte viennent réduire l'efficacité allocative des réseaux. La topologie du réseau est donc un élément essentiel à prendre en compte pour cerner la gestion du risque de liquidité dans les banques.

BIBLIOGRAPHIE

- ALLEN F. et GALE D. [1999], « The Asian Crisis and the Process of Financial Contagion », *Journal of Financial Regulation and Compliance*, 7, pp. 243-249.
- ALLEN F. et GALE D. [2000], « Financial Contagion », *Journal of Political Economy*, 108, pp. 1-33.
- ALLEN F. et GALE D. [2003], « Competition and Financial Stability », *Journal of Money Credit and Banking*, 36, pp. 453-480.
- ANGELINI P., MARESCA G. et RUSSO D. [1996], « Systemic risk in the netting system », *Journal of Banking & Finance*, 20, pp. 853-868.
- BHATTACHARYA S. et GALE D. [1987], « Preference Shocks, Liquidity and Central Bank Policy », in *New approaches to Monetary Economics*, edited by W. Barnett and K. Singleton, Cambridge University Press, Cambridge.
- BERNARD H., et BISIGNANO J. [2000], « Information, Liquidity Risk in the International Interbank Market: Implicit Guarantees and Private Credit Market Failure », *BIS Working Paper*, n° 86.
- BOISSAY F. [2006], *Credit Chains and the Propagation of Financial Distress*, European Central Bank, Working Paper Series, n° 573.
- BOSS M., ELSINGER H., SUMMER M., et THURNER S. [2004], « The Topology of the Interbank Market », *Quantitative Finance*, 4, pp. 1-8.
- BOSS M., SUMMER M., et THURNER S. [2004], « Contagion Flow Through Banking Networks », in *Lectures Notes in Computer Sciences*, Springer Verlag, Heidelberg.
- BRYANT J. [1980], « A Model of Reserves, Bank Runs and Deposit Insurance », *Journal of Banking and Finance*, 4, pp. 749-761.
- CALOMIRIS C. et GORTON G. [1991], « The Origins of Banking Panics, Models, Facts and Bank Regulation », in *Financial Markets and Financial Crises*, edited by G. Hubbard, University of Chicago Press, Chicago.
- CAMPBELL D. [2005], « Why Economists Still Worry About Bank Runs ? », *Federal Reserve Bank of Richmond Focus*, Fall.
- CHARI VV. et JAGANNATHAN R. [1988], « Banking Panics, Information and Rational Expectations Equilibrium », *Journal of Finance*, 43, pp. 749-761.
- CHEN Y. [1999], « Banking Panics: the Role of the First-Come First-served Rule and Information Externalities », *Journal of Political Economy*, 107[5], 946-968.
- CIFUENTES R. [2003], *Banking Concentration: Implications for Systemic Risk and Safety Net Design*, Central Bank of Chile, Working Papers, n° 231.
- De BANDT O. et HARTMANN P. [2000], *Systemic Risk: a Survey*, European Central Bank, Working Paper Series, 35.
- DEGRYSE H. et NGUYEN G. [2004], *Interbank Exposures: An empirical Examination of Systemic Risk in the Belgian Banking System*, mimeo National Bank of Belgium.
- DIAMOND D. et DYBIVIG P. [1983], « Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity », *Journal of Political Economy*, 91(3), pp. 401-419.
- EMMONS W.-R. [1995], *Interbank Netting Agreements and the Distribution of Bank Default Risk*, The Federal Reserve Bank of St. Louis, Working Paper Series, 016-A.
- ENNIS H. et KEISTER T. [2003], « Economic Growth, Liquidity and Bank Runs », *Journal of Economic Theory*, 109, pp. 220-245.

- FREIXAS X., PARIGI B. et ROCHET J.-C. [2000], « Systemic Risk, Interbank Relations and Liquidity Provision by the Central Bank », *Journal of Money Credit and Banking*, 32(3/2), pp. 611-640.
- FURFINE C.-H. [2003], « Interbank Exposures: Quantifying the Risk of Contagion », *Journal of Money, Credit and Banking*, 35, pp. 111-128.
- GALE D. et KARIV S. [2007], *Financial Networks*, mimeo New York University.
- GOLDSTEIN I. et PAUZNER A. [2005], « Demand Deposit Contracts and the Probability of Bank Runs », *The Journal of Finance*, vol 60(3), pp. 1293-1327.
- HUMPHREY D.-B. [1986], « Payments Finality and Risk of Settlement Failure », in *Technology and the Regulation of Financial Markets: Securities, Futures and Banking*, édité par Saunders & White, Lexington, Lexington Books pp. 97-120.
- JACKLIN C. [1987], « Demand Deposits, Trading Restrictions and Risk Sharing », in *Contractual Arrangements for Intertemporal Trade*, Edited by E. Prescott and N. Wallace. Minneapolis, University Of Minesota.
- JACKLIN C. et BHATTACHARYA S. [1988], « Distinguishing Panics and Information Based Runs: Welfare and Policy Implications », *Journal of Political Economy*, 96(3), pp. 568-592.
- JACKSON M.-O. et WATTS A. [2002a], « The Evolution of Social and Economic Networks », *Journal of Economic Theory*, 106, pp. 265-295.
- KAHN C.-M. et SANTOS J. [2005], *Endogenous Financial Fragility and Prudential Regulation*, EFA 2005 Moscow Meetings.
- LAGUNOFF R. et SCHREFT S. [2001], « A Model of Financial Fragility », *Journal of Economic Theory*, 99, pp. 220-264.
- LEHAR A. [2003], *Measuring Systemic Risk: A Risk Management Approach*, Mimeo, University of British Columbia.
- LEITNER Y. [2005], « Financial Networks: Contagion, Commitment and Private Sector Bailouts », *The Journal of Finance*, 60, n° 6, pp. 2925-2953.
- MAURER M. et SHELDON G. [1998], « Interbank Lending and Systemic Risk: An Empirical Analysis for Switzerland », *Schweiz Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik*, 134, n° 4, pp. 685-704.
- MORRIS S. et SHIN H.-S. [1998], « Unique Equilibrium in a Model of Self-Fulfilling Currency Attacks », *American Economic Review*, 88, pp. 587-597.
- MUELLER J. [2003], *Two Approaches to Assess Contagion in the Interbank Market*, mimeo Swiss National Bank.
- ROCHET J.-C. et TIROLE J. [1996a], « Interbank Lending and Systemic Risk », *Journal of Money Credit and Banking*, 28(4), pp. 733-762.
- ROCHET J.-C. et TIROLE J. [1996b], « Controlling Risk in Payment Systems », *Journal of Money Credit and Banking*, 28(4), pp. 832-862.
- SKEIE D. [2004], *Money and Modern Bank Runs*, Federal Reserve Bank of New York Working Paper.
- SKEIE D. [2006], *Money and Modern Banking without Bank Runs*, Federal reserve Bank of New York Staff Report, n° 242.
- TEMZELIDES T. [1997], « Evolution, Coordination and Banking Panics », *Journal of Monetary Economics*, 40, pp. 193-183.
- UPPER C., WORMS A. [2002], *Estimating Bilateral Exposures in the German Interbank Market: Is there a Danger of Contagion?*, Deutsche Bundesbank Discussion Paper 09/02.
- VIVIER-LIRIMONT S. [2006a], « Architecture des réseaux interbancaires et gestion du risque de liquidité », *Revue d'Économie Industrielle*, 114-115, pp. 225-244.
- VIVIER-LIRIMONT S. [2006b], « Réseaux interbancaires et crise de liquidité », *Revue d'Économie Politique*, 4, pp. 487-500.
- VIVIER-LIRIMONT S. [2008], « Une analyse de la dimension réseau des fragilités bancaires et financières », *Revue Française d'Économie*, 3 vol. XXII, pp. 61-95.
- WELLS S. [2002], « UK Interbank Exposures: Systemic Risk Implications », *Bank of England Financial Stability Review*, pp. 175-182.
- WOLF H.-C. [1999], *International Asset Price and Capital Flow Co-movements during Crisis: The Role of Contagion, Demonstration Effects and Fundamentals*, World Bank/IMF/WHO Conference on Capital Flows, Financial Crisis and Policies April 15-16.

V. — ANNEXES

5.1. Graphes de réseaux typiques

FIGURE 8 : Réseaux en ligne, circulaire, en étoile et complet

FIGURE 9 : Réseau 3-régulier à 8 sommets

5.2. Réseau à 100 banques : tableau désagrégé des succès et échecs

TABLEAU 1 : Réseau *k*-régulier ne vérifiant pas l'efficacité distributive : tableau désagrégé des succès et échecs à 100 banques

Ω	Ξ	NP	DL_1	DL_2	DL_3	DL_4	DL_5	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
4	1	3,62	16,79	4,62	0,73	0,03	0	47,87	16,7	4,52	0,71	0,03
	0	3,14	16,86	6,78	4,21	0,76	0,02	47,25	14,43	2,51	0,22	0
5	1	3,83	16,74	5,2	1,12	0,08	0	48,75	16,67	5,08	1,1	0,08
	0	3,38	16,77	6,02	3,01	0,88	0,03	48,71	16,03	3,66	0,46	0,02
6	1	3,97	16,87	5,52	1,37	0,14	0	49,39	16,83	5,44	1,34	0,14
	0	3,53	16,84	5,88	2,5	0,87	0,04	49,4	16,65	4,47	0,68	0,03
7	1	4,06	17	5,77	1,55	0,19	0	49,72	16,99	5,72	1,53	0,19
	0	3,63	16,96	5,9	2,28	0,85	0,05	49,73	16,91	5,04	0,85	0,04
8	1	4,13	17,13	5,9	1,66	0,23	0	49,87	17,12	5,87	1,65	0,23
	0	3,69	17,08	5,96	2,17	0,82	0,06	49,88	17,07	5,42	0,99	0,05
9	1	4,18	17,25	5,99	1,75	0,26	0	49,94	17,24	5,97	1,74	0,26
	0	3,72	17,19	6,01	2,12	0,8	0,06	49,95	17,15	5,69	1,09	0,06
10	1	4,21	17,33	6,05	1,81	0,28	0	49,98	17,33	6,05	1,81	0,28
	0	3,73	17,3	6,04	2,08	0,78	0,05	49,98	17,30	5,85	1,16	0,06
15	1	4,28	17,66	6,19	1,93	0,33	0	50	17,66	6,19	1,93	0,33
	0	3,73	17,63	6,15	2,03	0,74	0,04	50	17,63	6,14	1,34	0,04
20	1	4,29	17,81	6,24	1,96	0,34	0	50	17,81	6,24	1,96	0,34
	0	3,72	17,82	6,16	2,02	0,72	0,03	50	17,79	6,15	1,38	0,03
25	1	4,3	17,92	6,27	1,97	0,35	0	50	17,92	6,27	1,97	0,35
	0	3,71	17,7	6,19	2,05	0,71	0,03	50	17,77	6,18	1,33	0,03
30	1	4,3	17,98	6,29	1,98	0,35	0	50	17,98	6,29	1,98	0,35
	0	3,73	17,73	6,12	2,03	0,73	0,03	50	17,73	6,12	1,4	0,03
35	1	4,3	18,03	6,31	1,98	0,36	0	50	18,03	6,31	1,98	0,36
	0	3,75	17,76	6,33	2,13	0,75	0,05	50	17,76	6,33	1,59	0,05
40	1	4,3	18,07	6,33	1,99	0,36	0	50	18,07	6,33	1,99	0,36
	0	3,69	17,59	6,28	1,95	0,69	0	50	17,59	6,28	1,26	0
45	1	4,3	18,09	6,33	1,99	0,36	0	50	18,09	6,33	1,99	0,36
	0	3,68	18,18	6,18	2	0,68	0,05	50	18,18	6,18	1,36	0,05

5.3. Résultats obtenus pour des réseaux à 30 banques

TABLEAU 1 : Réseau en étoile											
	NP	DL_1	DL_2	DL_3	DL_4	DL_5	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
μ	3,054	14	2,504	0,749	0,089	1E-04	7,936	14	2,504	0,749	0,089
σ	1,104	0	2,62	0,932	0,288	0,01	7	0	2,62	0,932	0,288
Max	6	14	9	4	2	1	15	14	9	4	2
Min	2	14	0	0	0	0	1	14	0	0	0

TABLEAU 2 : Réseau en étoile contraint

	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	<i>DL₃</i>	<i>DL₄</i>	<i>DL₅</i>	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
μ	4,084	14	4,961	1,455	0,175	0	1	14	4,961	1,455	0,175
σ	0,504	0	1,173	0,784	0,386	0,01	0	0	1,173	0,784	0,386
<i>Max</i>	6	14	9	4	2	1	1	14	9	4	2
<i>Min</i>	3	14	1	0	0	0	1	14	1	0	0

TABLEAU 3 : Réseau complet

	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	<i>DL₃</i>	<i>DL₄</i>	<i>DL₅</i>	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
μ	3,149	5,327	1,598	0,22	4E-04	0	15	5,327	1,598	0,22	4E-04
σ	0,511	1,208	0,817	0,425	0,02	0	0	1,208	0,817	0,425	0,02
<i>Max</i>	5	10	5	2	1	0	15	10	5	2	1
<i>Min</i>	2	1	0	0	0	0	15	1	0	0	0

**TABLEAU 4 : Réseau *k*-régulier décentralisant
l'allocation Pareto optimale à plus de 99 %**

# liens	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	<i>DL₃</i>	<i>DL₄</i>	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
11	3.12	5.14	1.56	0.2	0	15	5.14	1.55	0.2
12	3.13	5.17	1.56	0.21	0	15	5.17	1.5	0.21
13	3.13	5.19	1.57	0.21	0	15	5.19	1.57	0.21
14	3.14	5.21	1.57	0.21	0	15	5.21	1.57	0.21
15	3.14	5.23	1.58	0.21	0	15	5.23	1.58	0.21
16	3.14	5.24	1.58	0.21	0	15	5.24	1.58	0.21
17	3.14	5.25	1.59	0.21	0	15	5.25	1.59	0.21
18	3.15	5.27	1.59	0.22	0	15	5.27	1.59	0.22
19	3.14	5.27	1.59	0.22	0	15	5.27	1.59	0.22
20	3.14	5.28	1.59	0.22	0	15	5.28	1.59	0.22
21	3.15	5.29	1.59	0.22	0	15	5.29	1.59	0.22
22	3.15	5.29	1.6	0.22	0	15	5.29	1.6	0.22
23	3.15	5.3	1.6	0.22	0	15	5.3	1.6	0.22
24	3.15	5.31	1.6	0.22	0	15	5.31	1.6	0.22
25	3.15	5.31	1.6	0.22	0	15	5.31	1.6	0.22
26	3.15	5.32	1.6	0.22	0	15	5.32	1.6	0.22
27	3.15	5.32	1.6	0.22	0	15	5.32	1.6	0.22
28	3.15	5.33	1.61	0.22	0	15	5.33	1.61	0.22
29	3.15	5.33	1.61	0.22	0	15	5.33	1.61	0.22

TABLEAU 5 : Efficacité allocative moyenne

Taille du voisinage	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Efficacité Moyenne	2,30	2,313	2,323	2,33	2,34	2,343	2,35	2,36	2,36	2,363
Taille du voisinage		21	22	23	24	25	26	27	28	29
Efficacité Moyenne		2,367	2,37	2,373	2,377	2,377	2,380	2,380	2,387	2,387

TABLEAU 6 : Efficacité transactionnelle moyenne

Taille du voisinage	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Efficacité Moyenne	5,473	5,485	5,493	5,498	5,505	5,508	5,513	5,52	5,52	5,523
Taille du voisinage		21	22	23	24	25	26	27	28	29
Efficacité Moyenne		5,525	5,528	5,53	5,533	5,533	5,535	5,535	5,540	5,540

TABLEAU 7 : Réseau circulaire

	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	τ_1	τ_2	τ_3
μ	1,531	6,328	2,7	10,56	0,728	0
σ	0,499	1,661	2,806	2,037	0,818	0
<i>Max</i>	2	13	11	15	5	0
<i>Min</i>	1	1	0	2	0	0

*TABLEAU 8 : Réseaux *k*-réguliers décentralisant l'allocation Pareto optimale à moins de 99 %*

# liens	% de succès	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	<i>DL₃</i>	<i>DL₄</i>	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
1	0	1	7.25	0	0	0	7.75	0	0	0
2	0	1.57	5.46	2.47	0	0	11.7	0.81	0	0
3	0.03	2.26	4.95	2.36	0.49	0.01	13.58	3.15	0.31	0.01
4	0.26	2.6	4.85	1.72	0.47	0.02	14.41	4.27	0.73	0.05
5	0.56	2.81	4.87	1.53	0.35	0.01	14.77	4.69	1.04	0.1
6	0.76	2.95	4.92	1.5	0.27	0	14.92	4.88	1.26	0.14
7	0.88	3.03	4.98	1.51	0.23	0	14.97	4.97	1.4	0.17
8	0.94	3.08	5.04	1.52	0.21	0	14.99	5.03	1.47	0.18
9	0.98	3.1	5.08	1.54	0.2	0	15	5.08	1.52	0.19
10	0.99	3.12	5.12	1.55	0.2	0	15	5.12	1.54	0.2

TABLEAU 9 : Réseaux k -réguliers : tableau désagrégé des succès et échecs de décentralisation de l'allocation Pareto optimale

Ω	Ξ	NP	DL_1	DL_2	DL_3	DL_4	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
3	1	2.65	4.42	0.78	0.04	0	14.28	4.42	0.76	0.04
	0	2.24	4.97	2.41	0.5	0.02	13.55	3.11	0.29	0.01
4	1	2.93	4.81	1.2	0.12	0	14.49	4.78	1.17	0.12
	0	2.49	4.86	1.9	0.59	0.03	14.39	4.09	0.58	0.02
5	1	3.02	4.87	1.35	0.16	0	14.77	4.85	1.32	0.16
	0	2.54	4.87	1.75	0.58	.02	14.77	4.5	0.69	0.02
6	1	3.07	4.93	1.43	0.18	0	14.91	4.92	1.42	0.18
	0	2.55	4.91	1.71	0.57	0.02	14.92	4.75	0.76	0.02
7	1	3.1	4.99	1.48	0.19	0	14.97	4.98	1.48	0.19
	0	2.55	4.97	1.69	0.56	0.01	14.97	4.9	0.81	0.01
8	1	3.11	5.04	1.51	0.19	0	14.99	5.04	1.51	0.19
	0	2.56	5.03	1.69	0.56	0.01	14.99	5.01	0.85	0.01
9	1	3.12	5.08	1.53	0.2	0	15	5.08	1.53	0.2
	0	2.54	5.04	1.67	0.55	0.01	15	5.03	0.84	0.01
10	1	3.12	5.12	1.55	0.2	0	15	5.12	1.55	0.2
	0	2.55	5.09	1.66	0.55	0	15	5.08	0.87	0

5.4. Résultats complémentaires obtenus dans le cas du réseau à 100 banques

TABLEAU 10 : Réseaux k -réguliers décentralisant l'allocation Pareto optimale à 99 % au moins

Ω	NP	DL_1	DL_2	DL_3	DL_4	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
22	4,29	17,85	6,25	1,96	0,35	50	17,85	1,96	0,35
25	4,30	17,90	6,27	1,97	0,35	50	17,90	6,27	1,97
30	4,30	17,98	6,29	1,98	0,35	50	17,98	6,29	1,98
35	4,30	18,03	6,31	1,98	0,36	50	18,03	6,31	1,98
40	4,30	18,07	6,33	1,99	0,36	50	18,07	6,33	1,99
45	4,30	18,09	6,33	1,99	0,36	50	18,09	6,33	1,99
50	4,31	18,11	6,34	2	0,36	50	18,11	6,34	2
55	4,31	18,13	6,35	2	0,36	50	18,13	6,35	2
60	4,31	18,15	6,36	2	0,36	50	18,15	6,36	2
65	4,31	18,16	6,35	2	0,36	50	18,16	6,35	2
70	4,31	18,17	6,36	2	0,36	50	18,17	6,36	2
75	4,31	18,18	6,36	2	0,36	50	18,18	6,36	2
80	4,31	18,19	6,36	2,01	0,37	50	18,19	2,01	0,36
90	4,31	18,19	6,37	2,01	0,37	50	18,19	2,01	0,36
95	4,31	18,19	6,37	2,01	0,36	50	18,19	2,01	0,36
99	4,31	18,21	6,37	2,01	0,36	50	18,21	2,01	0,36

**TABLEAU 11 : Réseau k -régulier décentralisant
l'allocation Pareto optimale à moins de 99 %**

Ω	Ξ	NP	DL_1	DL_2	DL_3	DL_4	DL_5	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
1	0	1	24.75	0	0	0	0	25.25	0	0	0
2	0	1.94	19.13	15.45	0	0	0	37.94	2.64	0	0
3	0	2.71	17.39	9.38	5.43	0.33	0	44.21	10.37	1.05	0.04
4	0	3.14	16.86	6.78	4.21	0.76	0.02	47.25	14.43	2.52	0.22
5	0,02	3.38	16.77	6.01	2.99	0.86	0.03	48.71	16.04	3.68	0.47
6	0,08	3.57	16.85	5.85	2.41	0.82	0.04	49.4	16.66	4.55	0.73
7	0,19	3.72	16.96	5.88	2.14	0.72	0.04	49.73	16.92	5.17	0.98
8	0,34	3.84	17.09	5.94	2	0.62	0.04	49.88	17.09	5.57	1.21
9	0,48	3.94	17.22	6	1.94	0.54	0.03	49.95	17.22	5.83	1.4
10	0,61	4.02	17.32	6.05	1.92	0.48	0.02	49.98	17.32	5.97	1.55
11	0.71	4.09	17.4	6.09	1.91	0.43	0.02	49.99	17.4	6.05	1.66
12	0.79	4.14	17.49	6.13	1.92	0.41	0.01	50	17.49	6.11	1.75
13	0.85	4.18	17.55	6.15	1.92	0.39	0.01	50	17.55	6.14	1.81
14	0.89	4.21	17.6	6.17	1.93	0.37	0.01	50	17.6	6.16	1.85
15	0.92	4.24	17.65	6.19	1.94	0.36	0.01	50	17.65	6.19	1.88
16	0.95	4.25	17.69	6.2	1.94	0.36	0	50	17.69	6.2	1.91
17	0.96	4.26	17.73	6.22	1.95	0.35	0	50	17.73	6.22	1.92
18	0.98	4.27	17.76	6.22	1.95	0.35	0	50	17.76	6.22	1.93
19	0.98	4.28	17.78	6.23	1.95	0.35	0	50	17.78	6.23	1.94
20	0.99	4.29	17.81	6.24	1.96	0.35	0	50	17.81	6.24	1.95
21	0.99	4.29	17.84	6.25	1.96	0.35	0	50	17.84	6.25	1.9

5.5. Résultats obtenus pour des réseaux à 500 banques

TABLEAU 12a : Réseau en étoile

	NP	DL_1	DL_2	DL_3	DL_4	DL_5	DL_6	DL_7
μ	4,47	249	46,266	16,791	6,036	2,026	0,569	0,052
σ	2,476	0	45,904	16,792	6,163	2,198	0,795	0,224
Max	8	249	108	44	20	8	4	2
Min	2	249	0	0	0	0	0	0

TABLEAU 12b : Réseau en étoile

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7
μ	249	46,266	16,791	6,036	2,026	0,569	0,052
σ	45,904	0	16,792	6,163	2,198	0,795	0,224
Max	249	108	44	20	8	4	2
Min	249	0	0	0	0	0	0

TABLEAU 13 : Réseau en étoile contraint

	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	<i>DL₃</i>	<i>DL₄</i>	<i>DL₅</i>	<i>DL₆</i>	<i>DL₇</i>
μ	6,90	249	91,82	33,29	11,90	4,05	1,14	0,1
σ	0,53	0	4,94	3,47	2,18	1,34	0,78	0,30
<i>Max</i>	8	249	111	46	20	10	5	2
<i>Min</i>	5	249	74	21	5	0	0	0

TABLEAU 14 : Réseau complet

	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	<i>DL₃</i>	<i>DL₄</i>	<i>DL₅</i>	<i>DL₆</i>	<i>DL₇</i>
μ	5,90	91,82	33,45	11,94	4,06	1,13	0,1	0,0
σ	0,53	4,95	3,48	2,2	1,34	0,77	0,30	0,01
<i>Max</i>	8	112	47	21	10	5	2	1
<i>Min</i>	4	75	21	5	0	0	0	0

TABLEAU 15 : Réseaux k -régulier avec effet de bassin de liquidité

Notons que dans le cas du réseau à 500 banques, les simulations pour les réseaux réguliers quelconques n'ont pas été menées pour des raisons techniques. La taille des matrices en jeu n'est pas gérable par Gauss sur du matériel de bureau de capacités standard.

TABLEAU 15a : Voisinage

	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	<i>DL₃</i>	<i>DL₄</i>	<i>DL₅</i>	<i>DL₆</i>	<i>DL₇</i>
μ	5,92	92,18	33,66	12,05	4,13	1,17	0,12	0
σ	0,549	5,009	3,55	2,29	1,355	0,799	0,322	0,224
<i>Max</i>	7	108	47	19	9	5	2	2
<i>Min</i>	4	78	23	5	0	0	0	0

TABLEAU 15b : Voisinage $k = 370$

	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	<i>DL₃</i>	<i>DL₄</i>	<i>DL₅</i>	<i>DL₆</i>	<i>DL₇</i>
μ	5,87	91,47	33,32	11,92	4,04	1,12	0,09	0
σ	0,538	4,934	3,46	2,17	1,322	0,799	0,293	0
<i>Max</i>	7	106	44	20	9	5	2	0
<i>Min</i>	5	74	23	5	1	0	0	0

TABLEAU 15c : Voisinage $k = 450$

	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	<i>DL₃</i>	<i>DL₄</i>	<i>DL₅</i>	<i>DL₆</i>	<i>DL₇</i>
μ	5,92	91,9	33,55	12,01	4,11	1,17	0,10	0
σ	0,524	4,95	3,60	2,21	1,356	0,783	0,305	0
<i>Max</i>	7	109	46	19	9	4	2	0
<i>Min</i>	5	76	21	4	1	0	0	0

TABLEAU 16 : Réseau circulaire

	<i>NP</i>	<i>DL₁</i>	<i>DL₂</i>	τ_1	τ_2
μ	2	102,22	90	181,79	12,65
σ	0	7,08	7,57	8,93	3,38
<i>Max</i>	2	132	122	210	28
<i>Min</i>	2	78	67	138	1