Développement des logiciels dans un duopole asymétrique en présence des *spillovers open source*

Mourad Zeroukhi

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/rei/5233>
DOI : 10.4000/rei.5233
ISSN : 1773-0198

Éditeur

De Boeck Supérieur

Édition imprimée

Date de publication : 15 décembre 2011
Pagination : 169-198
ISSN : 0154-3229

Référence électronique

Mourad Zeroukhi, « Développement des logiciels dans un duopole asymétrique en présence des *spillovers open source* », *Revue d'économie industrielle* [En ligne], 136 | 4ème trimestre 2011, mis en ligne le 15 décembre 2013, consulté le 07 juin 2022. URL : <http://journals.openedition.org/rei/5233> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/rei.5233>

DÉVELOPPEMENT DES LOGICIELS DANS UN DUOPOLE ASYMÉTRIQUE EN PRÉSENCE DES SPILLOVERS OPEN SOURCE

Mots-clés : Spillovers open source, logiciels, duopole asymétrique.

Key words : Spillovers Open Source, Logiciels, Duopole Asymétrique.

I. — INTRODUCTION

Durant ces dernières années, le régime de développement ouvert des logiciels, *i.e.* *Open Source Software* (OSS par la suite) a suscité beaucoup d'intérêt dans l'industrie des logiciels. Porté par la réussite de certains projets populaires comme GNU/Linux, Apache et SendMail, il constitue aujourd'hui une alternative viable au régime dominant de développement fermé ou propriétaire des logiciels, *i.e.* *Closed Source Software* (CSS par la suite). Sous le régime OSS, le développement des logiciels est assuré par le travail collaboratif de milliers de programmeurs bénévoles à travers le monde. La diffusion de ces logiciels se fait à travers des licences spécifiques; les plus célèbres d'entre elles sont la licence GPL (*General Public License*) et la licence BSD (*Berkeley Software Distribution*). Ces licences sont destinées à garantir à quiconque le droit d'utiliser, de copier, de modifier et de redistribuer des versions modifiées ou originales du logiciel aux autres usagers (Schmidt et Schnitzer, 2003). Simultanément, les firmes commerciales investissent de plus en plus dans les projets OSS (Lerner et Tirole, 2002; Athey et Ellison, 2006), par exemple en publiant tout ou partie de leurs codes sources propriétaires préexistant sous le format *open source*. C'est le cas par exemple des firmes comme Apple (Mac OS X), IBM (VisualAge), ou encore Netscape (Mozilla).

L'implication accrue de ces firmes dans des projets OSS conduit toutefois à s'interroger sur leurs véritables motivations. Pourquoi des firmes à but lucratif

investissent-elles dans l'OSS, en dévoilant (partiellement ou totalement) les codes sources de leurs logiciels propriétaires préexistants ? De toute évidence, il doit y avoir un intérêt économique à ce comportement.

En procédant à l'ouverture (partielle ou totale) du code source de son logiciel propriétaire préexistant, une firme bénéficie des « *spillovers open source* » (1) générés par les contributions de nombreux programmeurs bénévoles. Ceci conduit à accélérer le processus d'innovation et l'identification de bogues. Une ouverture du code source peut ainsi permettre à une firme d'obtenir un logiciel de meilleure qualité (moins de bogues, plus de performance, etc.) tout en réduisant ses coûts de développement et de maintenance (ces coûts étant supportés par des programmeurs bénévoles). Pour certaines firmes, cette stratégie de « reconversion » (2) s'inscrit dans un objectif de reconquête de marché. Un exemple instructif est celui de Netscape qui a décidé en 1998 de livrer le code source de son navigateur internet « Mozilla » à la communauté OS afin d'encourager son développement et reconquérir ses parts de marché perdues face à *Internet Explorer* de Microsoft durant la fameuse guerre des navigateurs au début des années 90. Le résultat final de cette décision est assez concluant, car Netscape (actuellement propriété de la firme AOL) a créé une niche en pleine expansion sur le marché des navigateurs (3).

Cependant, cette stratégie de « reconversion » n'a pas que des avantages. En effet, puisque le code source de la firme est ouvert, les améliorations apportées à son logiciel par des programmeurs bénévoles peuvent être utilisées facilement par un concurrent pour rattraper son retard ; il s'agit d'un risque de « *free riding* ». Le choix d'une firme d'investir dans le développement OS de son logiciel propriétaire préexistant est ainsi basé sur l'arbitrage entre la recherche des *spillovers OS* et la reconquête du marché d'une part, et le renforcement de la concurrence induit par la révélation du code source d'autre part. Pour certaines firmes, l'investissement dans l'*open source* est profitable, mais pour d'autres la fermeture du code source est préférable.

En partant de cette observation, l'objectif de cet article est d'analyser le comportement des firmes à l'égard de l'*open source* en relation avec leur niveau d'asymétrie. Les questions que l'on cherchera à résoudre sont : (i) exis-

- (1) Comino et Manenti (2008) parlent d'externalités de développement.
- (2) Passage d'un logiciel propriétaire à un logiciel open source.
- (3) Après la première tentative d'ouvrir le code source de Mozilla, qui n'a pas suscité l'adhésion des programmeurs OS par manque de modularité, Netscape a restructuré le programme et elle a procédé à la diffusion d'une nouvelle version du code source. Une fois la contribution des programmeurs OS obtenue, Netscape a essayé de récupérer le programme sous le format propriétaire mais la communauté *open source* s'est élevée contre cette décision. Netscape a décidé enfin de maintenir le code source de Mozilla sous une nouvelle licence, appelée « Mozilla Public License » qui est encore plus restrictive que la licence GPL initiale (Mockus *et al.*, 2005 ; Lerner et Tirole, 2005).

te-il une relation entre l'asymétrie et les incitations des firmes à ouvrir leurs codes sources ? (ii) l'ouverture des codes sources est-elle favorable à l'innovation ? (iii) la politique publique visant à obliger les firmes à ouvrir leurs codes source est-elle socialement désirable ?

Pour étudier ces questions, nous proposons une version modifiée du modèle de duopole à la Hotelling avec une différenciation horizontale et verticale des produits logiciels, et les « *spillovers OS* ». La différenciation horizontale est exogène et la différenciation verticale est endogène dans le sens les deux firmes investissent dans le développement de la qualité de leurs logiciels. Elles ont le choix entre deux régimes de développement : le régime OSS et le régime CSS. Les hypothèses singulières du modèle sont l'asymétrie des firmes, la prise en compte des *spillovers OS* et la réalisation des développements OS sous la licence GPL. Notre analyse est organisée autour de l'arbitrage suivant : l'ouverture des codes sources est profitable car elle permet aux firmes d'avoir des logiciels de meilleure qualité et à moindre coût, il s'agit des *spillovers OS* positifs. Cependant, l'ouverture des codes sources produit deux effets négatifs. Premièrement, la réduction des coûts de développement peut accroître la concurrence sur le marché des logiciels et réduire ainsi les profits des firmes. Deuxièmement, la disponibilité des codes sources et les termes de la licence GPL peuvent décourager l'innovation propriétaire des firmes. Puisque les firmes sont asymétriques, l'investissement dans l'OSS favorise alors l'une des deux firmes du duopole. Nous étudions la relation entre ces effets opposés et les incitations des firmes à investir dans l'OSS. Les décisions des firmes d'investir dans l'OSS peuvent être interprétées soit comme des « substituts stratégiques » ou des « compléments stratégiques » selon le degré d'asymétrie entre les deux firmes.

Notre étude conduit à des résultats intéressants : (i) lorsque les firmes sont suffisamment symétriques, elles sous-investissent dans le développement propriétaire de leurs logiciels sous le régime OSS ; (ii) lorsque les firmes sont suffisamment asymétriques, la grande firme (resp. la petite firme) sous-investit (resp. sur-investit) dans le développement propriétaire de son logiciel sous le régime OSS ; (iii) lorsque les firmes sont relativement symétriques, leurs profits augmentent sous le régime OSS ; dans ce cas, leurs décisions en terme d'OSS bénéficient de « complémentarités stratégiques » ; (iv) lorsque les firmes sont relativement asymétriques, le profit de la grande firme (resp. la petite firme) diminue (resp. augmente) sous le régime OSS ; dans ce cas, leurs décisions en termes d'OSS bénéficient de « substituabilités stratégiques » ; et (v) le bien-être social est croissant avec l'OSS uniquement lorsque les firmes sont suffisamment symétriques et diminue autrement.

La structure de cet article est organisée de la manière suivante. La section 2 présente les hypothèses du modèle et le jeu. La section 3 décrit et étudie les propriétés de l'équilibre du jeu. La section 4 examine l'impact des *spillovers OS* sur les efforts de R&D et les prix. La section 5 détermine le choix du régime de développement optimal (CSS ou OSS). La section 6 se concentre sur

l'impact du choix du régime de développement sur le bien-être social. La section 7 conclut.

Avant le traitement de cette question, il est nécessaire d'introduire quelques généralités sur les logiciels OS. Plus précisément, nous définirons la notion de logiciel OS et nous discuterons ensuite brièvement des aspects juridiques liés à ce type de logiciels. Enfin, une revue de littérature est présentée.

1.1. Logiciel open source

L'« *Open Source Software (OSS)* » est un logiciel distribué avec le code source (4), et dont la licence autorise chaque usager non seulement utiliser ce logiciel mais aussi à le modifier et le redistribuer librement aux autres usagers (5). Ainsi, le logiciel OS contraste avec la plupart des logiciels propriétaires qui sont livrés uniquement en version exécutable (compilée) (6), et dont l'utilisation, la modification et la redistribution sont interdites sans l'autorisation de l'éditeur. La modification est souvent impossible à réaliser car le code source n'est pas disponible. Enfin, il faut noter que certains logiciels propriétaires existent aussi en version OS. Ainsi, un logiciel ne peut être défini comme OS uniquement par l'ouverture de son code source. Dans l'univers OS, la licence sous laquelle le logiciel est distribué joue également un rôle très important.

1.2. Licences open source

La diffusion des logiciels OS se fait à travers des licences plus ou moins restrictives concernant certaines conditions d'utilisation et de diffusion des logiciels appelées « licences OS ». Les plus célèbres d'entre elles sont la licence GPL et la licence BSD (7).

— La licence GPL

La licence GPL a été créée par la FSF (*Free Software Foundation*) dans le cadre de son projet GNU (8) pour favoriser le développement des logiciels plus libres. Il s'agit d'une licence très restrictive concernant certaines conditions d'utilisation et de diffusion des logiciels OS. Son objectif principal est d'empêcher toute appropriation individuelle des efforts collectifs, et cela en interdisant l'intégration des développements OS dans le logiciel propriétaire et en

- (4) Le code source d'un logiciel est un ensemble d'instructions programmées dans un langage informatique hautement spécialisé tel que Java, C++, Pascal compréhensible par les initiés.
- (5) Pour plus de détails voir (www.fsf.org).
- (6) Suite binaire compréhensible uniquement par l'ordinateur.
- (7) Voir (www.opensource.org) pour plus de détails.
- (8) GNU (GNU's Not Unix, un acronyme récursif qui signifie que GNU n'est pas UNIX).

exigeant que les modifications apportées au logiciel soient diffusées sous la même licence. On parle alors d'une licence « contaminante ». En effet, légalement, lorsque les développements sont intégrés dans un code source, le principe de « réciprocité » qu'impose la licence GPL implique que ces derniers doivent être également ouverts et disponibles pour le grand public, c'est-à-dire, également diffusés sous la licence GPL. Enfin, contrairement à une idée reçue, la licence GPL autorise à la fois l'utilisation hybride des logiciels OS et propriétaires et la fixation d'un prix positif pour les logiciels OS (9).

— La licence BSD

La licence BSD est une licence peu restrictive et non contaminante relativement à la licence GPL. Elle autorise les usagers à faire presque tout ce qu'ils veulent avec le logiciel, y compris l'intégration de tout ou partie du code source dans un logiciel propriétaire. Chaque usager peut faire payer les autres usagers pour les versions exécutables (binaires) sans obligation de fournir le code source. La version originale de la licence BSD comportait une clause de publicité très restrictive qui obligeait la mention et l'identification du travail des auteurs. Avec cette clause, l'auteur de la version originale du logiciel bénéficiait d'une certaine publicité gratuite. Dans la dernière version de la licence BSD la clause de publicité a été supprimée. Enfin, il faut noter que la licence BSD est très utilisée par les éditeurs de logiciels propriétaires.

1.3. Revue de littérature

La littérature économique de l'OSS a connu un développement très rapide ces cinq dernières années. On peut distinguer trois courants de recherche principaux. Le premier courant tente d'expliquer les raisons du comportement « irrationnel » des programmeurs à participer bénévolement aux développements des projets OSS. Le deuxième courant de recherche, qui est parallèle au premier, étudie la structure d'organisation et le fonctionnement des projets OSS. Enfin, le dernier courant, qui se développe le plus aujourd'hui, s'intéresse aux interactions entre les logiciels OS et propriétaires (de type Linux vs Windows). Ce travail s'inscrit dans la thématique de ce dernier courant de recherche.

L'analyse des interactions entre les logiciels OS et propriétaires porte souvent sur la concurrence directe entre les logiciels OS et propriétaires (voir Kuan, 2001 ; Lerner et Tirole, 2002 ; Gaudel, 2003 ; Schmidt et Schnitzer, 2003 ; Casadesus-Masanell et Ghemawat, 2003 ; Frank et von Hippel, 2003 ; Bonaccorsi et Rossi, 2003 ; Mustonen, 2003). Or, les rapports entre logiciels OS et propriétaires peuvent également être coopératifs. En effet, dans certains cas, la coopération avec la communauté du libre peut être profitable pour les

(9) Une seule exception existe, elle concerne le cas où les versions compilées du logiciel sont distribuées sans le code source complet ; dans ce cas, la GNU GPL limite le prix du code source.

firmes commerciales. À ce sujet, nous pouvons citer cinq principales contributions. Henkel (2004) compare le régime OSS et le régime CSS et explore les conditions sous lesquelles la révélation des connaissances est préférable au secret du point de vue à la fois de la qualité des logiciels, des profits des firmes et du bien-être social. Baake et Wichmann (2004) étudient les incitations des firmes éditrices de logiciels propriétaires à publier une partie de leurs codes source sous le format OS en présence d'un entrant potentiel. Bitzer (2004) explique la faible participation des firmes commerciales (notamment dans le segment du marché des systèmes d'exploitation) aux projets OSS par la volonté de ces dernières de maintenir un certain degré d'hétérogénéité entre leurs logiciels propriétaires et les logiciels OS concurrents. Mustonen (2005) analyse les incitations d'une firme commerciale à supporter le développement d'un logiciel OS substituable à son logiciel propriétaire. Verani (2006) examine l'impact du choix du régime de développement sur l'effort général de développement des logiciels. Plus précisément, il met en relation la structure du marché avec le choix du régime de développement et l'effort de développement des logiciels.

Notre modèle est plus proche de celui de Baake et Wichmann (2004) qui étudient aussi les incitations des firmes commerciales à investir dans l'OSS. Dans ce modèle, les décisions des firmes commerciales d'investir dans l'OSS sont déterminées par leur besoin de limiter l'entrée sur le marché des logiciels. Dans notre modèle, les incitations des firmes à investir dans l'OSS sont en revanche étudiées en relation avec leur niveau d'asymétrie.

II. — LE MODÈLE

On considère une concurrence entre deux firmes ($i = 1, 2$) éditrices de logiciels propriétaires dans un modèle de différenciation à la Hotelling. Les deux firmes sont situées aux deux extrémités d'un intervalle unitaire $[0, 1]$: la firme 1 est située au point 0 et la firme 2 au point 1. Chaque firme offre un seul logiciel à un coût marginal identique c . Sans perte de généralité, on normalise c à zéro. La firme 1(2) offre le logiciel 1(2) respectivement.

De manière similaire à Economides (1989), Neven et Thisse (1990), nous introduisons deux extensions sur le modèle de Hotelling standard. Premièrement, on suppose que les deux firmes ne sont pas symétriques. Pour générer l'asymétrie entre les deux firmes, on considère que la disposition moyenne à payer des usagers pour la marque (10) du logiciel de la firme 1 est supérieure à la disposition moyenne à payer pour la marque du logiciel de la firme 2. Autrement dit, les usagers sont hétérogènes par leurs préférences pour les deux marques de logiciels. Deuxièmement, outre la différenciation hori-

(10) La marque ou l'architecture du logiciel désigne l'ensemble des fonctionnalités (caractéristiques) qui sont propres à ce logiciel. Par exemple, le design, l'interface, la compatibilité avec le logiciel dominant, etc.

zontale, les deux logiciels sont verticalement différenciés. Chaque logiciel est caractérisé par son niveau de qualité (11) q_i , qui est observé et évalué par les usagers.

Initialement, les deux firmes sont caractérisées par un niveau de qualité identique mais endogène q , dans le sens où chaque firme peut améliorer sa qualité en investissant dans le développement de son logiciel. Cependant, deux régimes de développement sont distingués. Le régime de développement dit « CSS » dont les améliorations réalisées sur le logiciel sont gardées secrètes et le régime de développement dit « OSS » dont la révélation et le partage des informations et des connaissances sont obligatoires. Cette distinction reflète l'existence d'un *trade-off* concernant le choix de la firme i d'ouvrir ou non son code source.

Par définition, sous le régime OSS, la firme i doit partager les développements réalisés sur son logiciel avec sa rivale. Il s'agit des effets *spillovers OS*. Supposons que les développements OSS sont réalisés sous la licence GPL, la spécificité de cette licence implique que tout ou partie des développements réalisés sur le logiciel d'une firme profite également à l'autre firme. En revanche, sous le régime CSS, les effets *spillovers OS* sont absents et les efforts de développement sont parfaitement appropriables (secret bien gardé, fermeture du code source, coût d'imitation très élevé, etc.).

Avec des firmes asymétriques, la qualité des logiciels et leurs demandes respectives dépendent des efforts de R&D et du choix du régime de développement (CSS ou OSS). Les décisions stratégiques des firmes concernent la production, la R&D et l'investissement dans l'OSS.

2.1. Développement hybride des logiciels

Les firmes ($i = 1, 2$) déterminent leur qualité par l'investissement dans la R&D, elles peuvent également ouvrir leurs codes source pour bénéficier des *spillovers OS* générés par les développements informels des programmeurs volontaires. Par souci de simplicité, on suppose que le degré d'ouverture des codes source est exogène et il est donné par le paramètre β . On suppose également que le degré d'ouverture des codes source est identique pour les deux firmes $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Dans ce contexte, le paramètre β prend des valeurs entre 0 et 1 ; $\beta = 0$ signifie que les codes source sont fermés, c'est-à-dire le régime de développement est totalement propriétaire (ou CSS). Dans ce cas, les efforts de développement (ou de R&D) des firmes sont parfaitement appropriables. Et $\beta = 1$ signifie que les codes source sont totalement ouverts, c'est-à-dire que le

(11) Nous entendons par qualité du logiciel, toutes les caractéristiques associées à son code source qui sont susceptibles d'affecter son efficacité. Par exemple, le nombre de bogues, la fréquence des mises à jour et de maintenance, la sécurité, etc.

régime de développement est OSS. Ici, les efforts de développement des firmes sont équivalents aux biens publics, ils sont donc communs aux deux firmes. Dans notre cas, on considère un régime de développement hybride, c'est-à-dire $0 < \beta < 1$.

Nous notons $q_i(x_i)$ la qualité du logiciel distribué par la firme i , où x représente son niveau d'investissement dans la R&D. Le coût de la R&D est connu à l'avance par la firme, et est noté $f(x_i)$. La fonction du coût est supposée quadratique du niveau de qualité, $f(x_i) = x_i^2/2$. La forme quadratique de la fonction des coûts reflète l'existence des rendements décroissants liés aux dépenses de R&D (12). Ici, on suppose que le niveau de qualité n'affecte pas le coût de production, autrement dit, le coût de R&D est indépendant du niveau de production.

Sous le régime propriétaire, les *spillovers OS* sont absents : les efforts de R&D sont parfaitement appropriables, la qualité correspondant à l'effort propre de R&D de la firme i est donnée par $q_i(x_i) = x_i$, avec $i = 1, 2$. Or, dans ce modèle, les *spillovers OS* sont présents, ils reflètent le degré d'investissement des firmes dans l'OSS. Pour appréhender ces *spillovers OS*, on propose la formulation suivante : étant donné les dépenses de R&D x_i et x_j , la qualité totale de la firme i est donnée par (13) :

$$q_i(x_i, x_j) = x_i + \beta x_j \quad \text{avec } i, j = 1, 2, i \neq j, \quad (1)$$

où q_i est l'amélioration effective de la qualité du logiciel de la firme i (14). Le paramètre x_i représente l'amélioration de la qualité de la firme i correspondant à son propre effort de R&D, tandis que βx_j est l'amélioration indirecte de la qualité que la firme i obtient de l'investissement de la firme j dans la R&D, x_j , étant donné le niveau exogène des *spillovers OS*, β .

2.2. Demande

La demande sur le marché des logiciels est constituée par une masse de N usagers, avec $N = 1$. Les préférences de ces usagers sont uniformément distribuées le long du segment $[0, 1]$. Chaque usager achète un seul des deux logi-

- (12) Cette formulation des coûts est standard dans les modèles d'innovation avec effet *spillover*. Voir Jacquemin et Aspremont (1988).
- (13) Dans ce modèle, x_i et x_j interviennent sous une forme additive ce qui exclut les effets de synergie éventuels en termes de développement. Cette formulation se justifie par le fait que les firmes, en investissant dans la qualité de leurs logiciels, poursuivent des trajectoires de R&D parfaitement substituables. Cela signifie que les efforts de développement (ou de R&D) engagés par les firmes aboutissent aux mêmes résultats (ou découvertes). Voir par exemple Katsoulacos et Ulph (1998).
- (14) Kamien *et al.* (1992) parlent de l'investissement effectif dans la R&D.

ciels distribués sur le marché. Le surplus de l'utilisateur situé au point $\theta \in [0, 1]$ s'il achète le logiciel distribué par la firme 1 est donné par :

$$U_1 = v_1 + q_1 - p_1 - t\theta, \quad (2)$$

où v_1 est le prix minimum de réservation que l'utilisateur est en mesure de payer pour le logiciel 1 (15), t est le coût de transport, avec $t > 0$ (16), p_1 est le prix fixé par la firme 1 et θ est la distance qui sépare l'utilisateur de la localisation de la firme 1.

De manière similaire, le surplus de l'utilisateur s'il achète le logiciel distribué par la firme 2 est :

$$U_2 = v_2 + q_2 - p_2 - t(1 - \theta) \quad (3)$$

On suppose que tous les utilisateurs sont incités à acheter sur les deux localisations des firmes, c'est-à-dire $v_i > t$. Autrement dit, v_1 est suffisamment élevé pour que le marché soit totalement couvert (17), même lorsque $q_i = 0$. Ici, on exclut la configuration du marché partiellement couvert. On suppose également que $v_1 \geq v_2$, ce qui signifie que le logiciel distribué par la firme 1 est supposé de qualité intrinsèque plus élevée. La firme 1 a un avantage en termes de différenciation horizontale (ou de localisation) sur la firme 2. Par conséquent, la firme 1 pourrait produire plus à l'équilibre. Dans le reste du papier, nous l'appellerons grande firme (vs petite firme). Enfin, on note que l'évaluation de la qualité q_i par les utilisateurs se fait indépendamment de la marque du logiciel.

2.3. Le jeu

Le jeu se déroule en trois étapes. La séquence des décisions est la suivante.

1. Les deux firmes ($i = 1, 2$) déterminent simultanément et de manière non coopérative la qualité de leurs logiciels en investissant dans la R&D étant donné le degré d'ouverture exogène des codes source, β .

- (15) $v_1 + q_1$ est le prix maximum de réservation que l'utilisateur est en mesure de payer pour le logiciel distribué par la firme 1.
- (16) Le paramètre t mesure le degré de différenciation horizontale des logiciels, il peut être également interprété comme le degré de fidélité à la marque, le coût d'installation du logiciel, etc.
- (17) Cette hypothèse indique que la valeur que les utilisateurs attachent aux produits est élevée comparée au degré de différenciation (c'est-à-dire, relative à la désutilité de ne pas utiliser son logiciel idéal). Cette hypothèse assure, qu'à l'équilibre, tous les utilisateurs reçoivent une utilité positive en utilisant l'un des deux logiciels. Cette hypothèse est également une condition suffisante pour que le marché soit couvert. La couverture totale du marché élimine les effets de la demande agrégée dus au changement dans la qualité des logiciels, ce qui nous permet ainsi de nous concentrer uniquement sur les effets purement stratégiques de la concurrence entre les deux firmes.

FIGURE 1 : Séquence du jeu

2. Les choix des firmes sont exogènes et connaissance commune. Les deux firmes choisissent simultanément et de manière non coopérative leurs prix.

3. Les usagers sélectionnent le logiciel qui correspond le plus à leurs préférences parmi les deux logiciels présents sur le marché.

III. — ÉQUILIBRE DU JEU

Dans cette section, nous résolvons le jeu par induction vers l'amont en vue d'obtenir l'équilibre parfait en sous-jeu (EPSJ). Dans la sous-section 2.1., nous analysons le choix des usagers à la troisième étape du jeu. Dans la sous-section 2.2., nous étudions la concurrence entre les deux firmes à la deuxième étape du jeu. Enfin, la sous-section 2.3. détermine le niveau de R&D d'équilibre compte tenu du degré d'ouverture des codes source fixé à la première étape du jeu.

3.1. Choix des usagers

Chaque usager achète le logiciel qui lui procure le maximum d'utilité. Les usagers diffèrent dans leurs localisations, θ (18). Ceux qui sont proches de $\theta=0$ achètent à la firme 1 et ceux qui sont proches de $\theta=1$ achètent à la firme 2. Ainsi, il existe un usager $\theta \in [0, 1]$ indifférent entre le fait d'acheter à la firme 1 ou à la firme 2. La localisation, θ_u , de cet usager est donnée par :

$$v_1 + q_1 - p_1 - t\theta_u = v_2 + q_2 - p_2 - t(1 - \theta_u) \quad (4)$$

(18) Le paramètre θ mesure la distance qui sépare l'utilisateur situé au point θ de 0, c'est-à-dire de la localisation de la firme 1. Il peut être également interprété comme la portion d'utilisateurs qui achètent auprès de la firme 1.

En remplaçant (1) dans (4) et en calculant par rapport à θ_u on obtient la localisation de l'utilisateur indifférent :

$$\theta_u(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_1 \leq \underline{p}_1(p_2) \\ \frac{t + \Delta v + \Delta x(1 - \beta) - \Delta p}{2t} & \text{si } \underline{p}_1(p_2) < p_1 < \bar{p}_1(p_2) \\ 1 & \text{si } p_1 \geq \bar{p}_1(p_2) \end{cases} \quad (5)$$

avec : $\bar{p}_1(p_2) = \{p_1 | \theta_u = 0\} \equiv p_2 + t + \Delta v + \Delta x(1 - \beta)$,

et $\underline{p}_1(p_2) = \{p_1 | \theta_u = 1\} \equiv p_2 - t + \Delta v + \Delta x(1 - \beta)$

où $\Delta v = v_1 - v_2$, $\Delta x = x_1 - x_2$ et $\Delta p = p_1 - p_2$

Quand $0 < \theta_u < 1$, il existe un usager indifférent entre les deux logiciels ; sinon, tous les usagers préfèrent l'un des deux logiciels. Ainsi, différents équilibres de Nash peuvent apparaître. Dans ce modèle, nous étudierons uniquement la configuration du marché dans laquelle $\theta_u \in]0, 1[$.

Remarque 1. La condition que doit satisfaire θ_u pour appartenir à l'intervalle $]0, 1[$ est la suivante :

$$t > \Delta v + \Delta x(1 - \beta) - \Delta p \quad (6)$$

Cette condition assure l'existence de l'équilibre de duopole, elle permet aux deux firmes d'avoir des demandes positives à l'équilibre (19). Elle signifie également que la firme 1 n'est pas suffisamment efficace pour chasser la firme 2 du marché ; le degré de différenciation horizontale des produits est suffisamment élevé pour permettre aux deux firmes de coexister sur le marché.

Nous supposons que les paramètres du modèle permettent de vérifier la condition (6). Puisque les préférences des usagers sont uniformément distribuées et que les usagers situés à gauche de θ_u achètent à la firme 1 et ceux situés à droite de θ_u achètent à la firme 2, les demandes des firmes sont alors données par :

$$d_1 = \theta_u = \frac{t + \Delta v + \Delta x(1 - \beta) - \Delta p}{2t} \quad (7)$$

$$d_2 = 1 - \theta_u = \frac{t - \Delta v - \Delta x(1 - \beta) + \Delta p}{2t} \quad (8)$$

(19) La condition (6) est équivalente à $\underline{p}_1(p_2) < p_1 < \bar{p}_1(p_2)$.

On constate que l'impact du paramètre des *spillovers* OS β sur la demande de la firme i dépend de son niveau de R&D et de celui de sa rivale,

$$\frac{\partial d_i}{\partial \beta} = -\frac{\Delta x}{2t} \quad i = 1, 2 \text{ et } \Delta x = x_1 - x_2$$

Ici, le paramètre des *spillovers* OS β affecte uniquement les décisions des firmes d'investir dans la R&D. Si les deux firmes fixent des niveaux de R&D identiques, l'effet *spillover* OS n'a aucun impact sur les demandes des firmes. En revanche, si une firme fixe un niveau de R&D élevé, par exemple, $x_1 > x_2$, une augmentation de β implique non seulement une diminution de la demande de la firme 1 mais également un report de demande de la firme 1 vers la firme 2.

En ce qui concerne l'impact des décisions de R&D sur les demandes des firmes, nous avons :

$$\frac{\partial d_i}{\partial x_i} = \frac{(1 - \beta)}{2t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial d_i}{\partial x_j} = -\frac{(1 - \beta)}{2t} \quad i, j = 1, 2, i \neq j$$

La demande de la firme i augmente strictement avec son effort de R&D et diminue avec l'effort de R&D de sa rivale.

Enfin, concernant l'impact des stratégies de prix sur la demande de la firme i nous avons :

$$\frac{\partial d_i}{\partial p_i} = -\frac{1}{2t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial d_i}{\partial p_j} = \frac{1}{2t} \quad i, j = 1, 2, i \neq j$$

La demande de la firme i diminue avec son propre prix et augmente avec le prix de sa rivale.

3.2. Concurrence sur le marché des logiciels

Après avoir étudié le choix des usagers, nous allons maintenant déterminer l'équilibre en prix sur le marché des logiciels. Les fonctions de demande sont connues. Les deux firmes s'engagent alors dans une concurrence à la Bertrand : elles fixent les prix p_1 et p_2 qui maximisent leurs profits. Le profit du duopole s'écrit donc :

$$\pi_i(p; x) = p_i d_i(p; x) - f(x_i), \quad (9)$$

où $p = (p_i, p_j)$, $x = (x_i, x_j)$ $i = 1, 2$ $i \neq j$

À partir des conditions de premier ordre (CPO) de la maximisation des profits, on obtient les prix d'équilibre suivants (20) :

$$p_1^*(x) = \frac{3t + [\Delta v + \Delta x (1 - \beta)]}{3} \quad (10)$$

$$p_2^*(x) = \frac{3t - [\Delta v + \Delta x (1 - \beta)]}{3} \quad (11)$$

En remplaçant ces expressions dans (7) et (8), on obtient les demandes des firmes :

$$d_1^*(x) = \frac{3t + [\Delta v + \Delta x (1 - \beta)]}{6t}, d_2^*(x) = \frac{3t - [\Delta v + \Delta x (1 - \beta)]}{6t} \quad (12)$$

Les profits d'équilibre correspondants sont :

$$\pi_1^*(x) = \left(\frac{3t + [\Delta v + \Delta x (1 - \beta)]}{3} \right) \left(\frac{3t + [\Delta v + \Delta x (1 - \beta)]}{6t} \right) - \frac{x_1^2}{2} \quad (13)$$

$$\pi_2^*(x) = \left(\frac{3t - [\Delta v + \Delta x (1 - \beta)]}{3} \right) \left(\frac{3t - [\Delta v + \Delta x (1 - \beta)]}{6t} \right) - \frac{x_2^2}{2} \quad (14)$$

Remarque 2. Pour assurer l'existence du modèle (c'est-à-dire de la structure de duopole), nous avons besoin d'imposer des restrictions sur les paramètres pour satisfaire la condition (6). En remplaçant (10) et (11) dans (6) et en simplifiant, on obtient la contrainte suivante :

$$3t > \Delta v + \Delta x (1 - \beta) \quad (15)$$

La condition nécessaire et suffisante pour assurer l'unicité et la stabilité de l'équilibre en prix est la suivante :

$$\Delta p = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial p_i \partial p_j} \\ \frac{\partial^2 \pi_j}{\partial p_j^2} & \frac{\partial^2 \pi_j}{\partial p_j \partial p_i} \end{vmatrix} > 0$$

(20) Les conditions de deuxième ordre sont également satisfaites, $\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial p_2^2} = \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial p_1^2} = -\frac{1}{t} < 0$.

En simplifiant, on obtient le résultat suivant :

$$\left(-\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t}\right) > \left(\frac{1}{2t}\right)^2 = \frac{3}{4t^2} > 0$$

Lemme 1. *Le prix d'équilibre (p_i^*) est croissant avec l'effort de R&D de la firme i (x_i) (relatif à celui de la firme j (x_j)).*

Démonstration. Nous avons :

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \frac{(1-\beta)}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = -\frac{(1-\beta)}{3} \quad i, j = 1, 2, i \neq j$$

L'investissement dans la R&D exerce un effet positif sur les prix. Plus l'effort de R&D augmente, plus le prix de réservation des usagers augmente, moins ces derniers vont être sensibles à une augmentation du prix dans leur choix du logiciel acheté. Il s'agit là d'un résultat classique : l'effet de la R&D est anti-concurrentiel, par conséquent, les firmes n'ont pas besoin de diminuer leurs prix pour augmenter leurs demandes. La raison réside dans le fait que, lorsque le niveau d'investissement dans la R&D de la firme i augmente, sa courbe de demande (étant donné le prix de la firme j) devient moins élastique. Dans ces conditions, l'impact de la R&D sur la demande est plus important que la diminution du prix.

3.3. Décisions de R&D des firmes

Dans cette sous-section, nous examinons les décisions d'investissement des firmes dans la R&D et l'impact des *spillovers OS*. À la première étape du jeu, les deux firmes décident de l'effort d'investissement qu'elles désirent fournir en vue d'améliorer la qualité de leurs logiciels étant donné β exogène.

À partir des expressions (13), (14), le profit du duopole à la première étape du jeu s'écrit :

$$\pi_i^*(x) = p_i^* d_i^*(x) - f(x_i) \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

Si x_i est la solution antérieure de la maximisation de (16), elle doit satisfaire les conditions de premier ordre (CPO) $\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = 0$. En maximisant (16) par rapport à x_1 et x_2 on obtient la paire (x_1^* , x_2^*) qui est un équilibre de Nash de R&D à la première étape du jeu (21) :

(21) Les conditions de second ordre (CSO) et de stabilité de l'équilibre sont également vérifiées : $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_i^2} < 0$ et $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 \pi_j}{\partial x_j^2} > \left(\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2$ si et seulement si $9t > (\beta - 1)^2$.

$$x_1^* = \frac{(1 - \beta) (9t + 3\Delta v + 4\beta - 2\beta^2 - 2)}{3 (9t + 4\beta - 2\beta^2 - 2)} \quad (17)$$

$$x_2^* = \frac{(1 - \beta) (9t - 3\Delta v + 4\beta - 2\beta^2 - 2)}{3 (9t + 4\beta - 2\beta^2 - 2)} \quad (18)$$

On en déduit les demandes et les prix de l'équilibre parfait en sous-jeu (EPSJ) :

$$p_1^{**} = \frac{t [9t + 3\Delta v - 2 (1 - \beta)^2]}{[9t - 2 (1 - \beta)^2]}, \quad p_2^{**} = \frac{t [9t - 3\Delta v - 2 (1 - \beta)^2]}{[9t - 2 (1 - \beta)^2]} \quad (19)$$

$$d_1^{**} = \frac{9t + [3\Delta v - 2 (1 - \beta)^2]}{2 [9t - 2 (1 - \beta)^2]}, \quad d_2^{**} = \frac{9t - [3\Delta v + 2 (1 - \beta)^2]}{2 [9t - 2 (1 - \beta)^2]} \quad (20)$$

En substituant les expressions trouvées ci-dessus dans (13) et (14), on obtient les profits d'équilibre du jeu :

$$\pi_1^{**} = \frac{1}{18} \frac{(9t - (1 - \beta)^2)}{(-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2} (-2\beta^2 + 4\beta + 9t + 3\Delta v - 2)^2 \quad (21)$$

$$\pi_2^{**} = \frac{1}{18} \frac{(9t - (1 - \beta)^2)}{(-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2} (-2\beta^2 + 4\beta + 9t + 3\Delta v - 2)^2 \quad (22)$$

Remarque 3. Cet équilibre de duopole existe si la contrainte suivante est satisfaite :

$$9t > 3\Delta v + 2 (1 - \beta)^2 \iff \Delta v < \frac{9t - 2 (1 - \beta)^2}{3} = \Delta v^D \quad (23)$$

Cette contrainte est toujours respectée par hypothèse.

IV. — STATIQUE COMPARATIVE

Dans cette section, nous étudions l'impact des *spillovers* OS sur les efforts de développement, les prix et les demandes d'équilibre. Nous analysons ensuite la rentabilité de l'ouverture du code source et son impact sur le bien-être social. Pour clarifier l'analyse et faciliter l'interprétation des résultats, on distingue deux cas : le cas symétrique pour lequel la qualité intrinsèque des logiciels 1 et 2 est identique, c'est-à-dire, où $v_1 = v_2$, et le cas asymétrique dans lequel $v_1 > v_2$.

4.1. Cas symétrique

Dans ce cas, nous pouvons constater que les deux firmes fixent les mêmes prix $p_1^{**} = p_2^{**} = t$ et reçoivent des demandes identiques à l'équilibre $d_1^{**} = d_2^{**} = \frac{1}{2}$. Ainsi, les *spillovers OS* n'ont aucun impact sur les prix et les demandes des firmes ; en revanche, ils exercent un effet négatif sur les efforts fournis par les firmes pour développer la qualité de leurs logiciels comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2. *Lorsque les deux firmes de duopole sont symétriques, c'est-à-dire $\Delta v = 0$, leurs efforts de développement d'équilibre diminuent avec les spillovers OS, β .*

Démonstration. Les efforts de développement d'équilibre correspondants au cas où $\Delta v = 0$ sont :

$$x_1^* = x_2^* = \frac{(1 - \beta)}{3} \quad (24)$$

La dérivée de (24) par rapport à β donne :

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \beta} = -\frac{1}{3} < 0 \quad i = 1, 2$$

Le lemme 2 implique que la firme i fournit moins d'efforts pour développer la qualité de son logiciel lorsque les *spillovers OS* sont élevés. Deux types d'effet expliquent ce résultat. L'investissement de la firme i dans le développement de son logiciel augmente son niveau de qualité mais pas nécessairement son avantage concurrentiel car ses efforts de développement profitent également à sa rivale. La firme j bénéficie alors d'une augmentation « indirecte » de la qualité de son logiciel qui lui permet de diminuer son effort de développement, caractérisant par conséquent l'effet *spillovers OS*. La réaction de la firme i face à cette atténuation de la concurrence est de diminuer son effort de développement à son tour. Il s'agit d'un effet « stratégique », dû au fait que les efforts de développement sont des « compléments stratégiques ». Ainsi, bien qu'une hausse de β décourage la firme j d'investir dans le développement de la qualité de son logiciel, elle décourage également la firme i car l'effet « stratégique » domine l'effet « *spillovers OS* ». Cela signifie que les deux firmes fournissent plus d'efforts pour développer leurs logiciels sous le régime propriétaire (CSS) que sous le régime ouvert (OSS). Ce résultat est lié au fait que sous le régime de développement OSS, aucune firme ne peut internaliser parfaitement l'impact de ses efforts propres de développement sur sa rivale.

Remarque 4

Les résultats obtenus précédemment sont largement déterminés par le fait que, dans ce modèle, nous avons choisi par hypothèse d'éliminer les effets de

demande pour nous concentrer uniquement sur les interactions stratégiques entre les deux firmes. Par conséquent, le développement de nouvelles fonctionnalités des logiciels n'a aucun impact sur les demandes agrégées des deux firmes ou sur leur habilité à extraire plus de revenu aux usagers. Le jeu de concurrence proposé dans ce modèle ressemble alors à celui du dilemme du prisonnier : sous le régime hybride (c'est-à-dire le régime avec effets *spillovers OS*), il est plus profitable pour les deux firmes de s'entendre pour ne pas développer de nouvelles fonctionnalités, mais chacune des firmes a une incitation individuelle à le faire, dans le but d'avoir un avantage concurrentiel sur sa rivale. Or, lorsque les *spillovers OS* augmentent, l'incitation de chaque firme à développer unilatéralement la qualité de son logiciel diminue et les efforts de développement d'équilibre diminuent.

4.2. Cas asymétrique

Nous avons montré, dans le lemme (2), qu'une augmentation des *spillovers OS* provoquait une diminution des efforts de développement à l'équilibre. En outre, étant donnée l'asymétrie des firmes, la variation du niveau de développement ne se fait pas de manière identique. L'augmentation de β favorise alors l'une des deux firmes du duopole.

Proposition 1. *L'effort de développement d'équilibre de la firme 1 (dite « grande ») est décroissant avec β . L'effort de développement d'équilibre de la firme 2 (dite « petite ») est décroissant avec β uniquement lorsque la valeur de Δv est relativement faible et croissant lorsque la valeur de Δv est relativement élevée.*

Démonstration. Cf. annexe B

La proposition 1 indique que pour un niveau d'asymétrie Δv relativement élevé, l'effort de développement de la firme 2 peut augmenter avec β alors que celui de la firme 1 diminue toujours. L'intuition de ce résultat est la suivante. Lorsque les *spillovers OS* sont absents ($\beta = 0$) (22), les efforts de développement sont parfaitement appropriables, la firme 1 fournit plus d'efforts de développement car elle gagne plus en améliorant la qualité de son logiciel. Dans ce cas, il est moins profitable pour la firme 2 de l'imiter car la qualité intrinsèque de son logiciel est plus faible. Ce résultat reste valable lorsque les *spillovers OS* sont faibles (β proche de 0) (23). En revanche, lorsque les *spillovers OS* sont élevés (β proche de 1), les efforts de développement sont difficilement

(22) Ce cas extrême constitue un point de départ nécessaire pour comprendre la mécanique de ce résultat.

(23) Lorsque l'effet spillover est élevé, la firme 1 (dite « grande ») est moins tentée de « free-rider » la firme 2 (dite « petite ») car la qualité de son logiciel est supérieure à celle de sa rivale.

appropriables. Pour neutraliser cet effet, chaque firme réduit son effort de développement et préfère se comporter en « *free rider* ». Or, compte tenu de sa part de marché initiale plus élevée, la firme 1 diminue plus que proportionnellement son effort de développement par rapport à sa rivale pour maintenir sa part de marché. Anticipant cela, la firme 2 augmente son effort de développement contrairement au résultat de lemme 2 car dans ce cas, il est plus coûteux pour la firme 1 de l'imiter à cause des *spillovers OS*. Il existe donc une relation non monotone entre x_2 et le paramètre β pour un degré d'asymétrie suffisamment élevé entre les deux firmes du duopole ; plus précisément (24) :

$$\frac{\partial x_2}{\partial \beta} > 0 \quad \text{si } \Delta v > \frac{(9t + 4\beta - 2\beta^2 - 2)^2}{3(9t - 4\beta + 2\beta^2 + 2)} = \widetilde{\Delta v}$$

Nous pouvons confirmer ce résultat en calculant la statique comparative suivante.

Corollaire 1. *L'écart entre les efforts de développement des deux firmes est décroissant avec les spillovers OS, β .*

Démonstration. L'écart entre les efforts de développement d'équilibre est :

$$\Delta x^* = |x_1^* - x_2^*| = \frac{2\Delta v (1 - \beta)}{9t + 4\beta - 2\beta^2 - 2} \quad (25)$$

En dérivant (25) par rapport à β , on obtient :

$$\frac{\partial \Delta x^*}{\partial \beta} = -2\Delta v \frac{[9t + 2(1 - \beta)^2]}{(-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2} < 0$$

Nous constatons donc que les *spillovers OS* réduisent strictement l'écart entre les efforts de développement des deux firmes de duopole.

Les résultats de la statique comparative concernant les efforts de développement d'équilibre sont représentés dans le tableau 1 ci-contre.

La statique comparative du prix et de la demande est analysée dans la proposition suivante.

Proposition 2. *Le prix d'équilibre et la demande de la firme 1 diminuent avec β . Le prix d'équilibre et la demande de la firme 2 augmentent avec β .*

Démonstration. La démonstration de cette proposition est fournie en annexe C.

(24) Voir en annexe pour une démonstration détaillée.

TABLEAU 1 : Statique comparative des efforts de développement

	β	Δv	t
x_1	$-\forall \Delta v \in]0, \Delta v^D]$	$+$	$-$
x_2	$-\text{ mais } + \text{ ssi } \Delta v \in [\widetilde{\Delta v}, \Delta v^D]$	$-$	$+$

L'intuition de ce résultat est la suivante. Nous avons montré dans le cas symétrique (lemme 2) que les *spillovers* OS exercent un effet négatif sur les efforts de développement des firmes. Or, compte tenu de l'hypothèse d'asymétrie, l'effort de développement de la firme 1 diminue plus rapidement que celui de la firme 2 et cette dernière obtient donc un avantage concurrentiel avec les *spillovers* OS; dans ce cas, la demande de la firme 1 diminue et celle de la firme 2 augmente car la différenciation verticale entre les deux firmes diminue. Ainsi, les *spillovers* OS entraînent un report de demande de la firme 1 vers la firme 2 et permet à cette dernière d'augmenter son prix. Dans ce cas, la meilleure réponse pour la firme 1 est de diminuer son prix pour stopper l'érosion de sa part de marché.

Le résumé de ce résultat est donné par le corollaire suivant.

Corollaire 2. *Les écarts de prix et de demandes des firmes à l'équilibre diminuent strictement avec les spillovers OS.*

Démonstration. Les écarts de prix et de demandes sont donnés respectivement par :

$$\Delta p^{**} = |p_1^{**} - p_2^{**}| = \frac{6t\Delta v}{(-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)} \quad (26)$$

$$\Delta d^{**} = |d_1^{**} - d_2^{**}| = \frac{3\Delta v}{9t + 4\beta - 2\beta^2 - 2} \quad (27)$$

En dérivant respectivement (26) et (27) par rapport à β on obtient :

$$\frac{\partial \Delta p^{**}}{\partial \beta} = -\frac{24t\Delta v(1 - \beta)}{(-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2} < 0$$

$$\frac{\partial \Delta d^{**}}{\partial \beta} = -\frac{12t\Delta v(1 - \beta)}{(-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2} < 0$$

On constate en effet que les *spillovers* OS réduisent strictement les écarts de prix et de demandes des firmes à l'équilibre.

V. — INCITATIONS DES FIRMES À INVESTIR DANS L'OPEN SOURCE

Dans la section précédente, nous avons étudié l'impact des *spillovers OS* sur les décisions des firmes en termes de R&D et de prix, compte tenu du niveau d'asymétrie. Dans cette section, nous déterminons le choix optimal des firmes à la première étape du jeu en calculant la variation de leur profit par rapport à β .

Proposition 3. *Le profit de la firme 2 augmente toujours avec les *spillovers OS*. Le profit de la firme 1 augmente avec les *spillovers OS* si et seulement si $\Delta v < \widehat{\Delta v}$ et diminue autrement.*

Corollaire 3. *La firme 2 choisit toujours le régime OSS $\forall \Delta v \in]0, \Delta v^D[$. La firme 1 choisit le régime OSS si $\Delta v < \widehat{\Delta v}$ et le régime CSS si $\Delta v > \widehat{\Delta v}$.*

Démonstration. Voir l'annexe D.

La conséquence la plus importante du corollaire 3 est que le profit d'équilibre de la firme 1 peut augmenter avec les *spillovers OS*, lorsque le niveau d'asymétrie, Δv , entre les deux firmes est suffisamment faible. Cela implique que l'investissement dans l'OSS peut être profitable pour la firme 1. L'intuition de ce résultat est la suivante. L'investissement dans l'OSS exerce deux effets opposés sur le profit d'équilibre de la firme 1. Le premier effet provient de la diminution du coût de programmation. Il s'agit d'un effet *spillover OS* positif, puisqu'il permet à la firme 1 d'améliorer la qualité de son logiciel à moindre coût. Le deuxième effet provient de la modification du prix de la firme 1 due aux *spillovers OS*, il s'agit d'un effet « concurrentiel ». La proposition 2 montre en effet que les *spillovers OS* exercent un effet négatif sur le prix de la firme 1 et son profit diminue. Ainsi, c'est la magnitude de ces deux effets opposés qui détermine la rentabilité d'investissement de la firme 1 dans l'OSS. Lorsque le niveau d'asymétrie est suffisamment faible, l'effet *spillover OS* domine l'effet « concurrentiel » et le profit augmente. En d'autres termes, la baisse du profit de la firme 1 due à la diminution de son prix est marginale par rapport aux gains engendrés par la réduction du coût de programmation de son logiciel. En revanche, quand le niveau d'asymétrie est suffisamment élevé, l'effet « concurrentiel » domine l'effet *spillover OS*. C'est-à-dire, les gains de la firme 1 en termes des *spillovers OS* sont largement insuffisants pour compenser ses pertes dues à la diminution de son prix. Dans ce cas, il est moins profitable pour la firme 1 d'investir dans la OSS. Au total, l'investissement dans l'OSS est profitable pour la firme 1 lorsque la firme 2 investit moins dans la R&D. Ce cas se présente lorsque le niveau d'asymétrie entre les deux firmes est suffisamment faible. Le corollaire 3 implique que les deux firmes sont hétérogènes par rapport à l'investissement dans l'OSS. Les décisions des firmes en termes d'investissement dans l'OSS sont des compléments stratégiques lorsque Δv est suffisamment faible. En revanche, elles sont des

TABLEAU 2 : Choix du régime de développement des logiciels

	$\Delta v \in]0, \widehat{\Delta v}[$	$\Delta v \in]\widehat{\Delta v}, \Delta v^D[$
Firme 1	OSS	CSS
Firme 2	OSS	OSS

substituts stratégiques lorsque Δv est suffisamment élevé comme le montre le tableau 2.

VI. — BIEN-ÊTRE SOCIAL

Dans cette section, nous étudions l'impact sur le bien-être social d'une intervention publique visant à obliger les firmes à ouvrir leurs codes sources. Nous modélisons cette intervention publique comme une augmentation du paramètre β .

Le bien-être social est la somme des profits des firmes et du surplus (utilité) des usagers, $W^S = \pi_1 + \pi_2 + U_1 + U_2$. Ici, les prix apparaissent comme un pur transfert, n'affectant pas le bien-être social. Cette particularité est due essentiellement à la nature du modèle de Hotelling où chaque usager achète exactement une unité de logiciel. Nous écrivons la fonction du bien-être social comme suit :

$$W^S = \int_0^{\theta^*} (v_1 + x_1 + \beta x_2 - t\theta) d\theta + \int_{\theta^*}^1 (v_2 + x_2 + \beta x_1 - t(1 - \theta)) d\theta - \left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} \right) \quad (28)$$

En calculant les intégrales, on obtient :

$$W^S = (v_1 + x_1 + \beta x_2) \theta - \frac{1}{2} t \theta^2 + (v_2 + x_2 + \beta x_1) (1 - \theta) - \frac{1}{2} t (1 - \theta)^2 - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad (29)$$

En remplaçant par les valeurs d'équilibre du jeu, on obtient la forme réduite de la fonction du bien-être :

$$W^S = (v_1 + q_1^{**}) d_1^{**} - \frac{1}{2} t (d_1^{**})^2 + (v_2 + q_2^{**}) d_2^{**} - \frac{1}{2} t (d_1^{**})^2 - \frac{1}{2} ((x_1^*)^2 + (x_2^*)^2) \quad (30)$$

En dérivant (30) par rapport à β on obtient :

$$\frac{\partial W^S}{\partial \beta} = - \frac{(1 - \beta) [9\Delta v^2 (21t + 2(\beta - 1)^2) - (-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^3]}{3(9t - 2(\beta - 2)^2)^3} \quad (31)$$

Proposition 4. *L'investissement dans l'OSS est socialement optimal uniquement si le niveau d'asymétrie des firmes Δv est suffisamment faible. Plus précisément, il existe une valeur unique $\bar{\Delta v} \in]0, \Delta v^D[$ tel que :*

$$\frac{\partial W^s}{\partial \beta} > 0 \text{ si et seulement si } v < \bar{\Delta v}$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est fournie en annexe E.

L'intuition de ce résultat est la suivante. Nous savons à partir de la proposition 3 que les profits des firmes sont croissants avec les *spillovers* OS lorsque le niveau d'asymétrie est suffisamment faible. Dans ce cas, l'impact positif des *spillovers* OS sur les profits des firmes augmente le bien-être social. En revanche, lorsque le niveau d'asymétrie est suffisamment élevé, le profit de la firme 2 augmente avec les *spillovers* OS et celui de la firme 1 diminue. Puisque la part de marché de la firme 1 est proportionnellement plus élevée que celle de la firme 2, l'effet net des *spillovers* OS sur les profits des firmes diminue le bien-être social. Du point de vue du surplus des usagers, les *spillovers* OS peuvent diminuer la qualité du logiciel de la firme 1 comme le montre la proposition 1. Cette réduction dans la qualité réduit le coût de développement (ou de R&D) de la firme 1 et la disposition moyenne à payer des usagers pour son logiciel par la même occasion. Lorsque le niveau d'asymétrie est suffisamment élevé, la réduction des coûts de développement est moins élevée pour compenser la baisse de la disposition moyenne à payer des usagers. Par conséquent, puisque la part de marché de la firme 1 couvre plus de la moitié du marché des logiciels, l'effet net de l'investissement dans l'OSS sur le surplus des usagers est strictement négatif. Au total, il existe donc un niveau d'asymétrie suffisamment faible en deçà duquel l'ouverture des codes source réduit la qualité des logiciels (ainsi que le surplus des usagers), mais augmente le bien-être social. Cette augmentation du bien-être est due à l'augmentation des profits des firmes.

Dans la figure 2 ci-contre, la zone nommée $\frac{\partial W}{\partial \beta} > 0$ indique les valeurs de Δv pour lesquelles la politique publique visant à obliger les firmes à ouvrir d'avantage leurs codes source augmente le bien-être social. Dans la zone nommée $\frac{\partial W}{\partial \beta} < 0$, le bien-être social diminue avec la politique publique. Ce graphique montre donc de manière claire qu'un niveau élevé de Δv joue en défaveur d'une intervention publique en faveur de l'OS.

Pour conclure, les résultats obtenus dans cette section indiquent que le soutien inconditionnel des pouvoirs publics à l'OSS n'est pas toujours profitable pour le bien-être social. Par certains aspects, cette constatation confirme les résultats obtenus dans l'article de Schmidt et Schnitzer (2003) avec une autre forme de modélisation. L'intervention des pouvoirs publics en faveur de l'OSS décourage les firmes propriétaires d'investir dans le développement de la qua-

FIGURE 2 : La variation du bien-être social avec les spillovers OS

lité de leurs logiciels. Dans notre modèle, ce résultat apparaît lorsque le niveau d'asymétrie des firmes est suffisamment élevé. Par d'autres aspects, nos résultats sont différents de ceux de Schmidt et Schnitzer (2003). Premièrement, le niveau d'effort fourni par la firme 2 (dite « petite ») pour améliorer la qualité de son logiciel augmente avec les *spillovers* OS, lorsque le niveau d'asymétrie des firmes est suffisamment élevé. Deuxièmement, le bien-être social peut augmenter avec les *spillovers* OS si les firmes sont relativement symétriques. Ces différences soulignent l'importance de l'asymétrie dans le choix des firmes d'investir dans l'OSS.

VII. — CONCLUSION

Comment le choix d'une firme d'investir dans l'OSS dépend-il de sa position sur le marché par rapport à sa rivale ? Dans cet article, nous avons proposé une version modifiée du modèle de duopole à la Hotelling pour étudier les incitations des firmes à investir dans le développement OS de la qualité de leurs logiciels. Nous avons focalisé notre analyse sur les effets stratégiques des interactions des firmes. Nous avons examiné ensuite l'impact sur le bien-être social d'une intervention publique en faveur de l'OSS.

La contribution principale de cet article réside dans la relation établie entre les incitations des firmes à investir dans l'OSS et leur niveau d'asymétrie : pour un niveau d'asymétrie suffisamment élevé, la grande firme (resp. la petite firme) est moins incitée (resp. plus incitée) à investir dans le développement OS dans son logiciel. On montre qu'il est parfois optimal pour les pouvoirs publics de mandater l'ouverture des codes source, notamment lorsque les firmes sont suffisamment symétriques.

Les résultats présentés dans cet article comportent certaines limites. Premièrement, notre analyse se cantonne aux interactions stratégiques des firmes de duopole, les effets de demande sont alors exclus dans ce modèle. L'une des extensions possibles serait alors de les intégrer dans notre analyse. Deuxièmement, pour simplifier l'analyse, nous avons supposé que la différenciation horizontale est supérieure à la différenciation verticale des produits. Si cette hypothèse est violée, on obtient des résultats différents à l'équilibre. Enfin, dans ce modèle, nous avons considéré une licence de type GPL dont les caractéristiques réglementaires interdisent toute appropriation individuelle des efforts collectifs. Il pourrait être intéressant de relâcher cette restriction en proposant une licence plus permissive de type BSD qui autorise l'intégration des modifications apportées à un logiciel dans une offre commerciale.

BIBLIOGRAPHIE

- AMIR R. (1994), *Strategic R&D with spillovers: comments on literature*, working paper, université de Mannheim.
- AMIR R. et WOODERS J. (2000), « One-way spillovers, endogenous innovation/imitator roles, and research joint ventures », *Games and Economic Behaviour*, 31, 1-25.
- AMIR R., EVSTIGNEEV I. et WOODERS J. (2003), « Noncooperative versus cooperative R&D with endogenous spillover rates », *Games and Economic Behaviour*, 42, 183-207.
- ATHEY S. et ELLISON G. (2006), *Dynamics of Open Source Movements*, working paper, Department of Economics, Stanford University and Department of Economics, Massachusetts Institute of Technology.
- BAAKE P. et WICHMANN T. (2004), *Open source software, competition and potential entry*, Berlecon Research GmbH.
- BESSEN J. (2004), *Open source software: free provision of complex public goods*, working paper, Boston University School of Law and Research on Innovation.
- BITZER J. (2004), « Commercial versus open source software: the role of product heterogeneity in competition », *Economic systems*, 28, 369-381.
- BITZER J. et SCHRÖDER P. (2005), *The impact of entry and competition by open source software on innovation activity*, working paper, Free university Berlin Germany and Aarhus School of Business, Denmark.
- BITZER J. et SCHRÖDER P. (2005), « Bug- fixing and code- writing: the private provision of open source software », *Information Economics and Policy*, 17, 389-406.
- BONACCORSI A. et ROSSI C. (2003), « Why open source software can succeed », *Research Policy*, 1243-1258.
- CASADESUS-MASANELL R. et GHEMAWAT P. (2003), « Dynamic mixed duopoly: a model motivated by Linux vs Windows », *Harvard Business School Working Paper*, #04-012.
- d'ASPREMONT C. et JACQUEMIN A. (1988), « Cooperative and Noncooperative R&D in Duopoly with Spillovers », *American Economic Review*, 78 (5): 1133-1137.
- de BOND T. R. (1996), « Spillovers and innovation activities », *Journal of Industrial Organisation*, 15, 1-28.

- ECONOMIDES N. (1989), « Quality variation and Maximal Variety Differentiation », *Regional Science and Urban Economics*, vol. 19, 21-29.
- GAUDEUL A. (2004), *Competition between open source and proprietary software : the (La)TeX case study*, working paper, Universities of Toulouse and Southampton.
- HENKEL J. (2004), « The Jukebox Mode of Innovation- a Model of Commercial Open Source Development », *CEPR Discussion Papers* n° 4507.
- HOTELLING H. (1929), « Stability in Competition », *The Economic Journal*, 39, 41-57.
- KAMIEN M., MULLER E. et ZANG I. (1992), « Research Joint Ventures and R&D Cartels », *The American Economic Review*, 82, pp. 1293-306.
- KATSOULACOS Y. et ULPH D. (1998), « Endogenous Spillovers and the Performance of Research Joint Ventures », *The Journal of Industrial Economics XLVI*, 333-357.
- KUAN J. (2001), *Open source software as consumer integration into production*, Haas School of Business, University of California-Berkeley.
- LERNER J. et TIROLE J. (2004), *The Economics of Technology Sharing: Open Source and Beyond*, working paper 10956.
- LERNER J. et TIROLE J. (2002), « Some Simple Economics of Open Source », *The Journal of Industrial Economics*, L(2) 197-234.
- LERNER J. et TIROLE J. (2001) « The Open Source Mouvement : Key Research Questions », *European Economic Review*, 45 819-826.
- MODICA S. et AGHION P. (2006), *Open Source without Free-Riding*, discussion paper, Harvard University and Università di Palermo.
- MUSTONEN M. (2003), *Copyleft – the economics of linux and other open source software*, discussion paper, University of Helsinki.
- MUSTONEN M. (2002), *Why do firms support the development of substitute copyleft programs ?*, EPPE, University of Helsinki.
- NEVEN D. et J.-F. THISSE (1990), « On quality and Variety Competition », in Gabszewicz J.-J., J.-F. Richard and L.-A. Wolsey, eds, *Economic Decision-Making, Econometrics and Optimization*, Elsevier Science Publishers.
- RAYMOND E.-S. (1998), *The Cathedral & the Bazaar: Measuring on Linux and Open Source by an Accidental Revolutionary*, O'Reilly, Cambridge, MA.
- SCHMIDT K. et SCHNITZER M. (2003), « Public subsidies for open source ? Some economic policy issues of the software market », *Harvard J. Law Technol.* 16, 474-505.
- VERANI S. (2006), *Open source Development in a Differentiated Duopoly*, discussion paper, School of Economics, The University of Western Australia.
- WEST J. et GALLAGHER S. (2005), *Open innovation : the paradox of firm investement in open source software*, College of Business, James Madison University Harrisonburg and College of Business, San José State University One Washington Square.
- WÖLFEL A. (2000), *Spillover Effects and R&D-Cooperations: The Influence of Market Structure*, discussion papers, Halle Institute for Economic Research.

VIII. — ANNEXES

8.1. Annexe A

Résolution du jeu

Le calcul des efforts de R&D des firmes à l'équilibre donne les conditions de premier ordre (CPO) :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{(3t - 3t\beta + \Delta v + x_1 - x_2 - \Delta v\beta - 2\beta x_1 + 2\beta x_2 + \beta^2 x_1 - \beta^2 x_2)}{9t} - x_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{(3t - 3t\beta - \Delta v - x_1 + x_2 + \Delta v\beta + 2\beta x_1 - 2\beta x_2 - \beta^2 x_1 + \beta^2 x_2)}{9t} - x_2 = 0$$

À partir des conditions de premier ordre (COP), on obtient :

$$x_1^* = \frac{(1 - \beta) (9t + 3\Delta v + 4\beta - 2\beta^2 - 2)}{3 (9t - 2 (\beta - 1)^2)}$$

$$x_2^* = \frac{(1 - \beta) (9t - 3\Delta v + 4\beta - 2\beta^2 - 2)}{3 (9t - 2 (\beta - 1)^2)}$$

Les conditions de second ordre sont :

$$\left. \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial x_1^2} \right|_{\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = 0} = \left. \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial x_2^2} \right|_{\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 0} < 0 \Rightarrow \frac{1}{9t} (\beta^2 - 2\beta + 1) - 1 < 0$$

Les deux conditions ne sont pas toujours négatives : il s'agit bien des solutions maximales si :

$$9t > (\beta - 1)^2$$

La condition nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité et l'unicité de l'équilibre est également vérifiée :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_i^2} & \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_i \partial x_j} \\ \frac{\partial^2 \pi_j}{\partial x_j^2} & \frac{\partial^2 \pi_j}{\partial x_j \partial x_i} \end{vmatrix} > 0$$

$$\left(\frac{1}{9t} (\beta^2 - 2\beta + 1) - 1 \right)^2 > \left(\frac{1}{9t} (2\beta - \beta^2 - 1) \right)^2$$

$$\iff \frac{1}{9t} (9t - 2 (\beta - 1)^2) > 0$$

Par la condition (23) $9t > 3\Delta v + 2 (\beta - 1)^2$ ce qui implique que $9t - 2 (\beta - 1)^2 > 0$.

8.2. Annexe B

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial \beta} < 0, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial \beta} > 0 \quad \text{ssi } \Delta v > \widetilde{\Delta v}, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial \beta} < 0 \quad \text{ssi } \Delta v < \widetilde{\Delta v}$$

Démonstration de la proposition 1. La dérivée de x_1^* par rapport à β est strictement négative :

$$\frac{\partial x_1}{\partial \beta} = - \frac{1}{3} \frac{[3\Delta v (9t + 2 (\beta - 1)^2) + (-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)]}{(9t - 2 (\beta - 1)^2)^2} < 0$$

Et la dérivée de x_2^* par rapport à β s'écrit

$$\frac{\partial x_2}{\partial \beta} = \frac{1}{3} \frac{[3\Delta v (9t + 2(\beta - 1)^2) - (-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2]}{(9t - 2(\beta - 1)^2)^2}$$

Le dénominateur de cette expression est positif. Le signe de cette expression est donné par le signe du numérateur : il doit être positif pour que x_2^* augmente avec β . Plus précisément, $\frac{\partial x_2}{\partial \beta} > 0$ ssi

$$\Delta v > \frac{(-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2}{3(9t + 2(\beta - 1)^2)} = \widetilde{\Delta v}$$

Il reste maintenant à vérifier que la valeur de $\widetilde{\Delta v}$ est suffisamment inférieure pour satisfaire la condition d'existence du duopole Δv^D :

$$3t - \frac{2(\beta - 1)^2}{3} - \frac{(9t + 4\beta - 2\beta^2 - 2)^2}{3(9t + 2(\beta - 1)^2)} > 0$$

Ainsi, x_2^* est croissant avec β .

8.3. Annexe C

$$\frac{\partial p_1^{**}}{\partial \beta} < 0, \quad \frac{\partial p_2^{**}}{\partial \beta} > 0, \quad \frac{\partial d_1^{**}}{\partial \beta} < 0, \quad \frac{\partial d_2^{**}}{\partial \beta} > 0$$

Démonstration de la proposition 2. À partir des fonctions de prix et de demandes on obtient les résultats suivants

$$\frac{\partial p_1^{**}}{\partial \beta} = -12t\Delta v \frac{(1 - \beta)}{(9t - 2(\beta - 1)^2)^2} < 0$$

$$\frac{\partial p_2^{**}}{\partial \beta} = 12t\Delta v \frac{(1 - \beta)}{(9t - 2(\beta - 1)^2)^2} > 0$$

$$\frac{\partial d_1^{**}}{\partial \beta} = -6\Delta v \frac{(1 - \beta)}{(9t - 2(\beta - 1)^2)^2} < 0$$

$$\frac{\partial d_2^{**}}{\partial \beta} = 6\Delta v \frac{(1 - \beta)}{(9t - 2(\beta - 1)^2)^2} > 0$$

8.4. Annexe D

$$\frac{\partial \pi_1^{**}}{\partial \beta} > 0 \quad \text{ssi} \quad \Delta v < \widehat{\Delta v}, \quad \frac{\partial \pi_1^{**}}{\partial \beta} < 0 \quad \text{ssi} \quad \Delta v > \widehat{\Delta v}, \quad \frac{\partial \pi_2^{**}}{\partial \beta} > 0$$

Démonstration de la proposition 3. La dérivée de π_1^{**} par rapport à β s'écrit

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \beta} = \frac{(1 - \beta) (-9 (\Delta v)^2 (-2\beta^2 + 4\beta + 27t - 2) - 54t\Delta v (-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2))}{9 (9t - 2 (\beta - 1)^2)^3} + \frac{(-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^3}{9 (9t - 2 (\beta - 1)^2)^3}$$

Le signe de cette expression est donné par le signe du numérateur qui est concave en Δv , avec $\Delta v \in]0, \Delta v^D[$. Pour les valeurs extrêmes

$$\Delta v = 0 \text{ et } \Delta v = \Delta v^D \equiv 3t - \frac{2(\beta - 1)^2}{3} :$$

$$\text{sign} \left\{ \frac{\partial \pi_1}{\partial \beta} \right\} \bigg|_{\Delta v=0} = \text{sign} \{ 9t - 2(\beta - 1)^2 \}$$

Et

$$\text{sign} \left\{ \frac{\partial \pi_1}{\partial \beta} \right\} \bigg|_{\Delta v=\Delta v^D} = \text{sign} \{ -36t (9t - 2(\beta - 1)^2)^2 \}$$

Nous pouvons observer que lorsque $\Delta v = 0$, $\frac{\partial \pi_1}{\partial \beta} > 0$ (par la condition (23) $9t > 3\Delta v + 2(\beta - 1)^2$ ce qui implique que $9t - 2(\beta - 1)^2 > 0$), en revanche, en $\Delta v = 3t - \frac{2(\beta - 1)^2}{3}$, $\frac{\partial \pi_1}{\partial \beta} < 0$. Il existe donc une valeur unique $\widehat{\Delta v} \in]0, \Delta v^D[$ telle que $\frac{\partial \pi_1}{\partial \beta} > 0$ si $\Delta v < \widehat{\Delta v}$ et $\frac{\partial \pi_1}{\partial \beta} < 0$ si $\Delta v > \widehat{\Delta v}$.

La dérivée de π_2^{**} par rapport à β s'écrit :

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial \beta} = \frac{(1 - \beta) (-9\Delta v^2 (-2\beta^2 + 4\beta + 27t - 2) + 54t\Delta v (-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2))}{9 (9t - 2(\beta - 1)^2)^3} + \frac{(-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^3}{9 (9t - 2(\beta - 1)^2)^3}$$

Cette expression est une fonction concave de Δv , elle est de signe positif en $\Delta v = 0$ et $\Delta v \approx \Delta v^D$. Donc, π_2^{**} est croissant avec $\beta \forall \Delta v \in]0, \Delta v^D[$.

8.5. Annexe E

$$\frac{\partial W^S}{\partial \beta} > 0 \quad \text{ssi } \Delta v < \overline{\Delta v}, \quad \frac{\partial W^S}{\partial \beta} < 0 \quad \text{ssi } \Delta v > \overline{\Delta v}$$

Démonstration de la proposition 4. Le bien-être social s'écrit :

$$W^S = \int_0^{\theta^*} (v_1 + x_1 + \beta x_2 - t\theta) d\theta + \int_{\theta^*}^1 (v_2 + x_2 + \beta x_1 - t(1 - \theta)) d\theta - \left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} \right)$$

En calculant les intégrales et en simplifiant, on obtient :

$$W^S = (v_1 + x_1 + \beta x_2) \theta - \frac{1}{2} t \theta^2 + (v_2 + x_2 + \beta x_1) (1 - \theta) - \frac{1}{2} t (1 - \theta)^2 - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

En dérivant W^S par rapport à β , en sachant que $\theta = d_1$ et $(1 - \theta) = d_2$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^S}{\partial \beta} &= (v_1 + x_1 + \beta x_2) \frac{\partial d_1}{\partial \beta} + d_1 \frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \beta d_1 \frac{\partial x_2}{\partial \beta} \\ &\quad + (v_2 + x_2 + \beta x_1) \frac{\partial d_2}{\partial \beta} + d_2 \frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \beta d_2 \frac{\partial x_1}{\partial \beta} \\ &\quad - t d_1 \frac{\partial d_1}{\partial \beta} - t d_2 \frac{\partial d_2}{\partial \beta} - \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \frac{\partial x_2}{\partial \beta} \right) \end{aligned}$$

En remplaçant par les valeurs d'équilibre on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^S}{\partial \beta} &= \left(v_1 + \frac{(1 - \beta) (9t + 2\beta + 9t\beta + 3\Delta v + 2\beta^2 - 2\beta^3 - 3\Delta v\beta - 2)}{3 (9t - 2 (\beta - 1)^2)} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{6\Delta v (\beta - 1)}{(9t - 2 (\beta - 1)^2)^2} \right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{3} \frac{(3\Delta v (9t + 2 (\beta - 1)^2) + (-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2)}{(9t - 2 (\beta - 1)^2)^2} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{(9t + 3\Delta v - 2 (\beta - 1)^2)}{18t - 4 (\beta - 1)^2} \right) \\ &\quad \times \beta \left(\frac{(9t + 3\Delta v - 2 (\beta - 1)^2)}{2 (9t - 2 (\beta - 1)^2)} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{3\Delta v (2\beta^2 - 4\beta + 9t + 2) - (-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2}{3 (9t - 2 (\beta - 1)^2)^2} \right) \\ &\quad + \left(v_2 + \frac{(1 - \beta) (9t + 2\beta + 9t\beta + 3\Delta v + 2\beta^2 - 2\beta^3 + 3\Delta v\beta - 2)}{3 (9t - 2 (\beta - 1)^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{6\Delta v (\beta - 1)}{(9t - 2(\beta - 1)^2)^2} \right) \\
& + \left(\frac{1}{3} \frac{(3\Delta v (9t + 2(\beta - 1)^2) - (-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2)}{(9t - 2(\beta - 1)^2)^2} \right) \\
& \times \left(\frac{(9t - 3\Delta v - 2(\beta - 1)^2)}{18t - 4(\beta - 1)^2} \right) \\
& + \beta \left(\frac{(9t - 3\Delta v - 2(\beta - 1)^2)}{2(9t - 2(\beta - 1)^2)} \right) \\
& \times \left(- \frac{(3\Delta v (2\beta^2 - 4\beta + 9t + 2) + (-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2)}{3(9t - 2(\beta - 1)^2)^2} \right) \\
& - \frac{18t (\Delta v)^2 (\beta - 1)}{(9t - 2(\beta - 1)^2)^3} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Après plusieurs simplifications on obtient l'expression suivante :

$$\frac{\partial W^S}{\partial \beta} = - \frac{(1 - \beta) \left[(9\Delta v^2 (21t + 2(\beta - 1)^2) - (-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^3) \right]}{3(9t - 2(\beta - 1)^2)^3}$$

Le signe de cette expression est donné par le signe du numérateur qui est concave en Δv , avec $\Delta v \in]0, \Delta v^D[$ (le signe du dénominateur est garanti positif par la condition (23)). Il est facile de vérifier que pour des valeurs extrêmes

$\Delta v = 0$ et $\Delta v = 3t - \frac{2(\beta - 1)^2}{3}$:

$$\left. \text{sign} \left\{ \frac{\partial W^S}{\partial \beta} \right\} \right|_{\Delta v=0} = \text{sign} \left\{ (9t - 2(\beta - 1)^2)^3 \right\}$$

Et

$$\left. \text{sign} \left\{ \frac{\partial W^S}{\partial \beta} \right\} \right|_{\Delta v=\Delta v^D} = \text{sign} \left\{ -4(1 - \beta)(-2\beta^2 + 4\beta + 9t - 2)^2(3t + (\beta - 1)^2) \right\}$$

Nous observons qu'en $\Delta v = 0$, $\frac{\partial W^S}{\partial \beta} > 0$, en revanche, en $\Delta v = 3t - \frac{2(\beta - 1)^2}{3}$, $\frac{\partial W^S}{\partial \beta} < 0$. Ainsi, il existe une valeur unique $\overline{\Delta v} \in]0, \Delta v^D[$ telle que $\frac{\partial W^S}{\partial \beta} > 0$ lorsque $\Delta v < \overline{\Delta v}$ et $\frac{\partial W^S}{\partial \beta} < 0$ lorsque $\Delta v > \overline{\Delta v}$.