Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

53 | 2013

François Russo, historien des techniques

Groupes et géométrie. La genèse du programme d'Erlangen de Félix Klein

Conférence donnée au Palais de la Découverte le 4 mai 1968

François Russo

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/sabix/1081>

DOI : 10.4000/sabix.1081

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 15 juillet 2013

Pagination : 75-84

ISSN : 0989-3059

Référence électronique

François Russo, « Groupes et géométrie. La genèse du programme d'Erlangen de Félix Klein », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 53 | 2013, mis en ligne le 01 octobre 2014, consulté le 15 février 2023. URL : <http://journals.openedition.org/sabix/1081> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.1081>

Tous droits réservés

GROUPES ET GÉOMÉTRIE

LA GENÈSE DU PROGRAMME D'ERLANGEN DE FÉLIX KLEIN

Conférence donnée au Palais de la Découverte le 4 mai 1968.

Publié originellement sous forme de fascicule par le Palais de la Découverte en 1969¹.

Félix Klein (1849 – 1925) – DR

Introduction

En 1872, âgé seulement de 23 ans, le mathématicien allemand Félix Klein présentait pour la rentrée académique à l'Université d'Erlangen une « dissertation » où il exposait des travaux qui l'avaient conduit à rapprocher, en les fondant sur un principe général, les deux méthodes, métrique et projective dont jusque-là les rapports n'avaient pas été suffisamment élucidés. Ce principe unificateur, Klein l'avait trouvé dans la notion de groupe de transformations. Sur cette base il proposait un « programme » qui substituait à des vues demeurées peu coordonnées, une conception organique de la géométrie fondée sur une hiérarchisation des groupes de transformations.

Trop modeste, Klein déclare que ce programme n'apporte rien de vraiment nouveau, mais qu'il entend seulement remédier à la dispersion des disciplines géométriques.

« En entreprenant ici l'établissement d'un tel principe, nous ne développons assurément aucune pensée particulièrement neuve; nous ne faisons que donner une expression claire et nette à ce que beaucoup ont pensé d'une façon plus ou moins précise. Toutefois la publication de considérations destinées à établir un tel lien a paru d'autant plus justifiée que la géométrie, bien qu'elle soit une par essence, ne s'est que trop scindée, en raison du rapide développement qu'elle a pris dans ces derniers temps, en des disciplines presque séparées² ».

Il n'est pas exagéré de voir dans ce programme un moment majeur de l'histoire de la géométrie, et, plus largement, de l'histoire des mathématiques. Il opère une convergence remarquable de courants de recherche demeurés jusque-là sans rapports; de la sorte il constitue une des principales étapes du renouvellement de la conception de la géométrie et de son intégration dans une vue unifiée des mathématiques, où elle perdra son statut de discipline autonome.

C'est la genèse de ce programme que nous voudrions présenter ici. À cet effet, nous avons essayé de dégager, dans l'ensemble si complexe des travaux géométriques du XIX^e siècle, les idées et les faits qui nous sont apparus avoir contribué directement à cette évolution. Assurément une telle « abstraction » n'est pas sans péril. Elle nous a semblé cependant légitime. Ainsi nous mettrons en évidence la nature et l'exacte signification des apports des géomètres qui ont été les principaux artisans de ce progrès, ainsi que les filiations qui les relient.

¹ Nous rééditons des extraits de ce texte avec l'aimable autorisation de Valérie Parra y Rodrigo et du père Jean-Yves Genet, provincial de France de la compagnie de Jésus.

² Programme d'Erlangen, introduction.

Si cette étude peut prétendre à quelque originalité, c'est plus par l'interprétation des faits que par leur nouveauté. Car ils ont été déjà présentés dans plusieurs ouvrages excellents. Retenons surtout le tome I du troisième volume de *l'Histoire générale des sciences* publiée sous la direction de René Taton (Presses Universitaires de France)³ et le volume I du tome III de l'édition française de *l'Encyclopédie mathématique*⁴. À ces ouvrages, il faut, bien entendu, ajouter le programme d'Erlangen⁵ lui-même, dans lequel Klein a fait place à de précieuses indications historiques.

Pour retracer la genèse du programme d'Erlangen, on pourrait certes remonter fort loin dans l'histoire de la géométrie. Mais le moment où la géométrie s'engage dans des recherches qui préparent nettement la synthèse de Klein nous paraît pouvoir être fixé au début du XIX^e siècle, plus précisément autour des années 1820. Alors en effet s'amorcent les deux grandes entreprises dont la conjugaison sera la source directe des vues de Klein sur le rôle des groupes en géométrie : la constitution en un corps de doctrine de la géométrie projective, principalement avec Poncelet ; la découverte des géométries non euclidiennes avec Lobatchevski et Bolyai. C'est ce moment que nous prendrons comme point de départ de cette « reconstitution ».

Suivent des repères chronologiques et une notice biographique sur Félix Klein.

Développement de la géométrie projective

On ne retracera pas ici l'histoire de la géométrie projective pour elle-même. Elle ne sera envisagée qu'en tant que corps de doctrine exprimant une certaine conception de la géométrie. Car c'est comme telle surtout qu'elle devait être, à côté des géométries non euclidiennes, une des deux voies majeures qui ont mené au programme d'Erlangen.

Suit une description générale des positions de Poncelet, Chasles, Staudt, Laguerre et Cayley sur les relations entre géométrie projective et géométrie analytique (mise en équations), en fonction des propriétés descriptives (formes) et métriques (grandeurs).

L'avènement des géométries non euclidiennes

Nous ne retracerons pas en détail l'histoire de l'avènement des géométries de Bolyai-Lobatchevski et de Riemann⁶. Mais, étant donné le rôle que ces géométries ont joué dans l'évolution de la conception de la géométrie au XIX^e siècle et, plus spécialement, dans la genèse du programme d'Erlangen, il convient de rappeler leur apport essentiel et de le situer.

À la suite des travaux, principalement de Saccheri, Lambert et Gauss, Lobatchevski à partir de 1829, et Bolyai en 1832, élaborent les premiers une géométrie qui portera leurs noms associés, et qui correspond à l'hypothèse où la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits, ce qui se traduit équivalentement par le fait que, par un point on peut mener une infinité de parallèles à une droite donnée. Ils montrent qu'une telle géométrie est logiquement cohérente et que la géométrie euclidienne n'en est qu'un cas particulier.

Mais on sait que, pas plus que leurs prédécesseurs, ni Lobatchevski ni Bolyai ne réussirent à tirer au clair les conséquences de l'hypothèse opposée où la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits.

³ Cité infra en abrégé : « Taton ». (note de l'auteur). [Il s'agit de René Taton, *Histoire générale des sciences*, tome III-1 : La science contemporaine : le XIX^e siècle, PUF, Paris, 1961] (N.D.L.R.).

⁴ [Il s'agit probablement d'Alexandre Sarrazin de Montferrier, *Encyclopédie mathématique*, Amyot, Paris, 1856-59] (N.D.L.R.).

⁵ Le programme d'Erlangen a d'abord été publié en allemand sous le titre « *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* » en 1872. Le texte allemand est disponible dans Félix Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, éd. Julius Springer, Berlin, 1921. Le texte a été traduit en français. Citons notamment l'édition postfacée par François Russo : Félix Klein, François Russo (postfacier), Jean Dieudonné, *Le programme d'Erlangen : considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

⁶ Nous l'avons présentée en ses traits essentiels dans un article de la *Revue des questions scientifiques* (20 juillet 1963, p. 457-473) : *Genèse de la géométrie non euclidienne*.

Cette hypothèse ne leur apparaît pas susceptible de conduire à une géométrie cohérente pour la raison essentielle qu'elle implique que deux droites peuvent inclure un espace. Ce refus peut nous paraître aujourd'hui choquant, car nous savons, et on le savait bien avant le XIX^e siècle, que, sur une sphère, la somme des angles du triangle constitué de trois arcs de grands cercles est supérieure à deux droits. Nous comprenons difficilement comment, alors qu'ils pouvaient constater que, pour l'espace à deux dimensions, cette hypothèse conduisait à une géométrie intuitivement cohérente (le plan correspondant à la sphère de rayon infini), Lobatchevski et Bolyai ont pu déclarer cette hypothèse inacceptable. Le seul qui ait eu avant Riemann une idée de la possibilité d'une telle géométrie est Lambert : il avait bien aperçu cette analogie, mais il n'avait pas su en déduire la possibilité de la géométrie « riemannienne ».

La raison de ce refus, sur laquelle les historiens des mathématiques se sont rarement interrogés, est à chercher dans le fait qu'alors – et nous reviendrons plus loin sur ce point – on concevait l'espace comme un réceptacle neutre, un cadre homogène et illimité, sur lequel n'avait pas à s'exercer une investigation mathématique, celle-ci ne portant que sur les figures de cet espace. Pour que puisse être acceptée la « géométrie riemannienne », il fallait une véritable mutation intellectuelle. C'est au génie de Riemann que nous la devons. Nous exposerons plus loin ses vues générales sur la notion d'espace, mais, dès maintenant nous citerons le passage de sa dissertation de 1854 où il expose la possibilité de la géométrie « riemannienne », c'est-à-dire, essentiellement, d'une géométrie où l'espace est fini.

« La propriété de l'espace d'être illimité possède une plus grande certitude empirique qu'aucune autre donnée externe de l'expérience. Mais l'infinité de l'espace n'en est en aucune manière la conséquence; au contraire, si l'on suppose les corps indépendants du lieu, et qu'ainsi l'on attribue à l'espace une mesure de courbure constante, l'espace serait nécessairement fini, dès que cette mesure de courbure aurait une valeur positive, si petite qu'elle fût. En prolongeant selon les lignes de plus courte distance, les directions initiales situées dans un élément superficiel, on obtiendrait une surface illimitée de courbure constante, c'est-à-dire une surface qui, dans une variété plane de trois dimensions, prendrait la forme d'une surface sphérique, et qui serait par conséquent finie⁷ ».

Par la reconnaissance de la possibilité d'une géométrie où la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits, se trouvait levé, en droit du moins, l'obstacle qui empêchait la pleine intelligence de la nature de la géométrie non euclidienne. Tout le champ des hypothèses non euclidiennes était désormais assumé. Cependant, pendant plusieurs années encore, les deux géométries non euclidiennes devaient demeurer simplement juxtaposées, et, si elles avaient désormais acquis droit de cité, elles apparaissaient comme des réalités assez étranges; leur nature profonde, leur pleine rationalité, leurs rapports avec les autres domaines de la géométrie n'étaient pas encore aperçus.

Rapprochement, intelligence et approfondissement des deux géométries non euclidiennes et leur intégration à la géométrie projective

Dans l'étape de l'histoire du programme d'Erlangen, que nous allons maintenant décrire et qui se distingue nettement de celle qui précède, nous voyons s'opérer, d'une part, le rapprochement des deux géométries non euclidiennes dont les traits fondamentaux communs se trouvent dégagés, d'autre part, la confluence des deux courants de recherche géométrique qui jusque-là s'ignoraient, la géométrie non euclidienne et la géométrie projective.

⁷ Œuvres, p. 295. C'est Russo qui souligne. Il utilise sans doute: Bernhard Riemann, *Œuvres mathématiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1898. N.D.L.R.].

C'est, semble-t-il, Beltrami qui a, le premier, mis en évidence la nature commune des deux géométries de Bolyai-Lobatchevski et de Riemann, lorsque, en 1868, dans son *Saggio d'una interpretazione della geometria non euclidea*, il a montré que l'on pouvait considérer que la géométrie de Bolyai-Lobatchevski, était, dans le cas de deux dimensions, équivalente à la géométrie sur une surface à courbure négative, la géométrie de Riemann étant une géométrie sur une surface à courbure positive⁸. On sait que cette surface à courbure négative qu'il appela la pseudo-sphère, ne constitue pas une image tout à fait adéquate de la géométrie de Bolyai-Lobatchevski. Néanmoins ce « modèle » ouvrait la voie à la constitution d'une doctrine générale des géométries non euclidiennes.

Contrairement à ce que suggère l'expression « géométries de Cayley » par laquelle on désigne assez communément encore les géométries non euclidiennes de Bolyai-Lobatchevski et de Riemann, envisagées comme géométries projectives particulières, ce n'est pas à Cayley que revient le mérite de cette synthèse. Cayley, on l'a dit, ne s'est pas préoccupé d'approfondir la nature des géométries non euclidiennes; d'ailleurs il n'y fait pas allusion dans son Mémoire de 1859⁹.

Il semble bien que ce soit Klein qui a, le premier, mis en évidence la nature projective des géométries non euclidiennes en fleur appliquant les vues de Cayley. C'est lui aussi d'ailleurs qui a le premier nettement élucidé la notion de mesure projective dont l'élaboration par Cayley était, à plusieurs égards, demeurée incomplète¹⁰.

Klein a clairement établi que les trois types de géométries, d'Euclide, de Bolyai-Lobatchevski et de Riemann étaient des cas particuliers de la métrique générale de Cayley. Posant le problème général de la détermination des géométries projectives à courbure constante, il a montré qu'il ne pouvait en exister que trois types qui correspondent précisément à ces trois géométries¹¹.

Klein a souligné avec raison ce fait très remarquable, qu'ainsi les trois géométries d'Euclide, Bolyai-Lobatchevski et Riemann, se trouvaient définies par des considérations tout autres¹² que celles par lesquelles elles avaient été introduites. De plus, Klein montrait le premier que la géométrie projective est indépendante de la théorie des parallèles¹³. On sait que ni Poncelet, ni Chasles, ni Staudt, ni Cayley, n'avaient élucidé ce point, et que, même, ils ne s'étaient pas vraiment posé cette question.

Vues nouvelles et élargies sur la nature et l'objet de la géométrie

Les recherches qui viennent d'être évoquées concernant la géométrie projective et les géométries non euclidiennes, ainsi que leur rapprochement, traduisent, par-delà des acquisitions de grande portée, l'amorce d'interrogations fondamentales sur la nature et sur l'objet de la géométrie. Il convient d'expliciter ce remarquable mouvement d'idées, car il est à la base de la genèse du programme d'Erlangen. Plus largement – mais ceci déborde notre sujet – il devait constituer un des facteurs majeurs de l'avènement de la mathématique moderne.

Dans ce mouvement d'idées, nous croyons pouvoir discerner plusieurs composantes qui, bien qu'étroitement liées, ont cependant des traits propres suffisamment déterminés pour mériter d'être envisagés séparément.

⁸ On n'oublie pas que la diffusion des idées de Lobatchevski, Bolyai et Riemann sur les géométries non-euclidiennes s'est faite très lentement. C'est seulement à partir de 1866 qu'elles commencèrent à retenir vraiment l'attention.

⁹ Nous n'avons pas trouvé dans les écrits de Cayley de considérations sur les géométries non-euclidiennes. Mais, n'ayant pas procédé à un examen complet de ses œuvres, nous ne pouvons considérer ce fait comme tout à fait établi.

¹⁰ Klein a eu le souci de définir axiomatiquement la notion de mesure projective montrant qu'elle doit satisfaire à deux exigences : additivité, invariance dans un déplacement.

¹¹ *Mathematische Annalen*, 1871, p. 623-625.

¹² « *Ganz anderen Betrachtungen* » (*Mathematische Annalen*, p. 625). C'est nous qui soulignons.

¹³ *Mathematische Annalen*, 1871, p. 573 et 1873, p. 112.

De la science de l'espace physique à la science abstraite de l'espace

Déjà Gauss avait pressenti que la géométrie ne se limitait pas à la théorie des figures de l'espace réel. Bolyai et Lobatchevski avaient été plus loin dans cette voie en définissant une série de géométries logiquement cohérentes indépendamment des données de l'expérience. Ils demeuraient sans doute soucieux de déterminer laquelle de ces géométries constituait la géométrie « réelle », mais celle-ci n'était qu'une géométrie parmi beaucoup d'autres « modèles » de géométries également valables du point de vue logique.

D'autres progrès de la géométrie, qu'il suffira d'évoquer brièvement parce qu'ils sont bien connus, contribueront, au cours de la première moitié du XIX^e siècle, à libérer la géométrie des limitations que lui avait imposées sa restriction à l'espace réel. Mais il faut bien observer que cet élargissement de la géométrie ne procède pas, initialement du moins, d'un dessein de constitution d'une géométrie abstraite et générale, mais du développement et de l'approfondissement, des problèmes posés par la géométrie « réelle ». D'abord ces extensions apparurent plus comme des points de vue nouveaux sur les problèmes de la géométrie réelle, des manières nouvelles de les aborder, voire comme de purs artifices, que comme conduisant à la définition d'une géométrie développée dans des espaces plus généraux, dont la géométrie de l'espace réel ne serait qu'un cas particulier.

Ainsi se présentent :

- l'introduction des éléments imaginaires dans la géométrie projective ;
- les considérations de dualité en géométrie projective. D'ailleurs, bien que conduisant à une certaine « indifférence » à l'égard de la nature réelle des éléments pris en considération - ainsi points et droites se trouvent jouer abstraitement le même rôle -, ces considérations demeurent assez longtemps développées uniquement au sein de la géométrie réelle ;
- la géométrie projective abstraite de Staudt, au sujet de laquelle on ferait les mêmes remarques ;
- l'introduction de la notion de géométries à plus de trois dimensions sous la « pression » de la généralisation qu'impose naturellement le traitement analytique de la géométrie. Cayley envisagera de manière systématique la géométrie analytique à n dimensions, n étant un nombre entier positif quelconque. Mais cette extension n'aura tout son effet que lorsque, vers la moitié du XIX^e siècle, sera mis un terme à la stérile opposition, longtemps maintenue de façon si tenace, entre géométrie pure et géométrie analytique.

De la géométrie, science des figures, à la géométrie, science de l'espace

Nous sommes ici en présence de la mutation sans doute la plus remarquable que devait connaître la géométrie au cours du XIX^e siècle. Jusque-là la géométrie n'était aucunement *la science de l'espace*, mais uniquement *la science des figures de l'espace*. L'espace était considéré comme un donné premier, un réceptacle, le lieu des figures. Sans doute, la métaphysique s'était interrogée depuis longtemps à son sujet ; mais, pour le mathématicien, il ne posait pas de problèmes. Étendue homogène, indéfinie, ayant trois dimensions, il constituait une réalité neutre, inerte, qui n'appelait aucune « spéculation ». Telle est bien la vue que devait consacrer Kant, philosophe pourtant, lorsqu'il fit de l'espace une catégorie de la raison.

Ici encore, ce n'est pas par des considérations générales et a priori que s'est opérée l'évolution des idées, mais par l'approfondissement de la réflexion sur des problèmes de « figures », donc dans le cadre de la géométrie « classique ». C'est bien, semble-t-il, Lobatchevski qui a, le premier, fait cesser « la neutralité mathématique » de l'espace lorsqu'il a considéré que la valeur du paramètre caractérisant la géométrie de l'espace réel parmi toutes les géométries possibles, constituait une *propriété* de l'espace.

Ce qui a été dit précédemment sur les géométries non euclidiennes faisait déjà apparaître une mise en question de l'espace et l'intervention, à côté des considérations sur les figures de l'espace, de considérations sur la nature de l'espace. Mais nous croyons devoir revenir sur cette évolution des conceptions géométriques afin de la situer dans une perspective plus large et plus fondamentale.

Grassmann, dans son *Ausdehnungslehre* de 1844, devait poser le problème dans une grande généralité, en instituant une théorie de l'étendue par des considérations sur les multiplicités à plusieurs dimensions indépendantes de la représentation sensible¹⁴. L'élément d'une telle multiplicité constitue l'analogue du point de l'espace réel.

En 1854, dans sa célèbre dissertation inaugurale, Riemann devait donner au concept d'espace une généralité encore plus grande. Ces vues dépassent de beaucoup le programme d'Erlangen de Félix Klein; elles posent en effet les bases de la topologie générale dont la constitution explicite ne date que des années qui ont précédé la première guerre mondiale. Par là elles débordent nettement notre sujet, d'autant que, intéressé surtout par la théorie des groupes, que Riemann ne fait pas directement intervenir, Klein ne semble pas avoir accordé à ces vues toute l'attention qu'elles méritaient. Nous tenons cependant à citer le passage majeur de la Dissertation de Riemann sur le concept général d'espace, car il semble avoir joué un certain rôle dans le progrès des idées qui a conduit au programme d'Erlangen.

« On sait que la géométrie admet comme données préalables non seulement le concept d'espace, mais encore les premières idées fondamentales des constructions dans l'espace. Elle ne donne de ces concepts que des définitions nominales, les déterminations essentielles s'introduisant sous forme d'axiome. Les rapports mutuels de ces données primitives restent enveloppés de mystère; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point, ni même a priori si elles peuvent l'être.

Depuis Euclide jusqu'à Legendre, pour ne citer que les plus illustres des réformateurs modernes de la géométrie, personne, parmi les mathématiciens ni les philosophes, n'est parvenu à éclaircir ce mystère. La raison en est que le concept général de grandeur de dimensions multiples, comprenant comme cas particulier les grandeurs étendues, n'a jamais été l'objet d'aucune étude. En conséquence, je me suis posé d'abord le problème de construire, en partant du concept général de grandeur, le concept d'une grandeur de dimensions multiples. Il ressortira de là qu'une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et que l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions.

Or il s'ensuit de là nécessairement que les propositions de la géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions, ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience... On peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples suffisant pour la détermination des rapports métriques de l'espace... Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires; ils n'ont qu'une certitude empirique; ce sont des hypothèses¹⁵ ».

Les transformations, d'abord instruments, puis essence de la géométrie

Nous avons déjà évoqué à propos de Poncelet, Chasles, Staudt et Cayley, le rôle des transformations dans le développement de la géométrie au XIX^e siècle. Nous voulons revenir sur cette question pour l'envisager de façon plus large, et, surtout, pour décrire le changement si remarquable par lequel, après avoir été longtemps considérées comme des instruments de la géométrie, les transformations ont été ensuite posées comme base, comme essence de la géométrie.

À ce propos il faut rappeler que, bien avant le XIX^e siècle, en dehors des transformations projectives déjà évoquées, nous voyons des transformations de types assez divers intervenir dans la géométrie. Ainsi chez Stevin, Grégoire de Saint Vincent, Euler. Ce dernier prend particulièrement en considération les transformations affines. Au début du XIX^e siècle, les rotations et les homothéties retiendront plus particulièrement l'attention, et Möbius s'occupera spécialement des transformations affines¹⁶.

¹⁴ Klein dans le programme d'Erlangen, p. 188 et 195, souligne l'apport de Grassmann à cet égard.

¹⁵ *Œuvres*, p. 280-281.

¹⁶ Au sujet des transformations dans l'histoire des mathématiques, voir l'*Encyclopédie mathématique*, Édition française, III, p. 81. Voir aussi Chasles, op. cit., p. 212-216, qui cite notamment Dürer, qui faisait croître proportionnellement les dimensions d'une figure.

Tandis que les géométries « pures » n'envisageaient les transformations que sous la forme sensible des correspondances entre figures, les géomètres « analytiques », en les exprimant sous forme algébrique, étaient conduits à en approfondir la nature. Ils devaient notamment exprimer la conservation des propriétés des figures dans les transformations sous la forme d'invariants. Or on sait la place que tient au XIX^e siècle la théorie des invariants. Ainsi entre géométrie et algèbre s'opéra une fécondation mutuelle. Cayley et Sylvester, à la fois géomètres et algébristes, devaient apporter d'importantes contributions à ces travaux.

Transformations et groupes

Mais c'est surtout à partir du moment où les transformations furent considérées comme des groupes que l'on commença à reconnaître toute leur portée en géométrie. C'est à Klein que revient le mérite de ce rapprochement. On peut s'étonner qu'il ne se soit pas opéré plus tôt. Mais il ne faut pas oublier, qu'introduite dès 1830 par Galois, la notion de groupe ne fut vraiment diffusée qu'avec le *Traité des substitutions* de Jordan, publié en 1870. Or, c'est par Jordan surtout que Klein a connu la théorie des groupes.

Certes, comme le rappelle Klein déjà, en 1844, Grassmann avait pressenti qu'il y aurait lieu de faire intervenir l'algèbre dans l'étude fondamentale de la géométrie, envisageant selon ses propres termes, « *un parallèle entre l'analyse combinatoire et la théorie de l'étendue*¹⁷ ». Mais il ne dépassa pas ces vues très générales. Klein va plus au fond du problème. Ayant évoqué la théorie de Galois et les travaux de Jordan, ainsi d'ailleurs que ceux de Serret, il déclare : « *par analogie, nous voudrions une théorie des groupes qui peuvent être engendrés par les transformations d'une nature donnée*¹⁸ ».

Déjà, en 1868, donc quatre années avant le programme d'Erlangen, s'attachant uniquement à l'espace euclidien, Helmholtz avait développé l'idée que l'on pouvait caractériser les propriétés de cet espace par les propriétés des mouvements envisagés comme des transformations ponctuelles, et il avait formulé les axiomes auxquels devaient satisfaire de telles transformations pour pouvoir correspondre aux mouvements réels des solides dans l'espace¹⁹. Il n'avait pas cependant explicitement considéré ces transformations comme constituant un groupe.

Klein, qui fait état des travaux d'Helmoltz, se place délibérément à ce point de vue et, rapprochant la considération du groupe des déplacements euclidiens du groupe plus général que constitue le groupe projectif, il en vient aux vues qui constitueront le programme d'Erlangen :

« Il se pose la question générale que voici : étant donné une multiplicité et un groupe, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe... ce que l'on peut encore exprimer ainsi : on donne une multiplicité et un groupe de transformations ; développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe »²⁰.

De la sorte se trouve définie une doctrine générale et organique de la géométrie, fondée sur une hiérarchie de groupes. Klein appelle *groupe principal* celui dont les transformations n'altèrent pas les propriétés géométriques des figures²¹. Il s'agit des déplacements de l'espace, des similitudes et des symétries. Mais ce groupe peut être considéré comme un cas particulier de groupes plus généraux :

« Si l'on remplace le groupe principal par un groupe plus étendu, une partie seulement des propriétés géométriques est conservée... Les méthodes géométriques modernes sont caractérisées par le fait que leurs considérations, au lieu de s'appuyer sur le groupe principal, reposent sur des groupes de transformations plus étendus. Dès que leurs groupes se contiennent l'un l'autre, une loi analogue établit leurs rapports réciproques »²².

¹⁷ Programme d'Erlangen, p. 191.

¹⁸ *Ibid.*, p. 191

¹⁹ *Histoire générale des sciences*, III, t. 1, p. 32

²⁰ Programme d'Erlangen, p. 91.

²¹ *Ibid.*, p. 90.

²² *Ibid.*, p. 93.

Klein pouvait alors résumer l'originalité et l'essentiel de son programme dans cette formule: « *Pour la première fois les divers ordres de recherche de la géométrie sont exprimés par les groupes de transformations qui leur correspondent*²³ ».

Il faut souligner l'élargissement, et même, en un sens, le renversement de perspective ainsi opéré par Klein. Non seulement un ordre est introduit dans la géométrie par la répartition des propriétés des figures en classes correspondant chacune à un groupe de transformation, ces groupes étant hiérarchisés, mais la géométrie est désormais plutôt considérée comme l'étude, non plus des propriétés ainsi ordonnées des figures de l'espace euclidien, mais des divers groupes de transformations, à chaque groupe correspondant un espace. Et, par la logique même de sa doctrine, Klein est amené à envisager des transformations plus générales que les transformations projectives auxquelles s'étaient arrêtés ses prédécesseurs, allant jusqu'à considérer le groupe général des transformations continues²⁴.

Cette extension fut suggérée à Klein par les travaux de Lie; mais, comme il ne la développa vraiment qu'après la formulation du programme d'Erlangen auquel se limite cette étude, nous n'y insisterons pas davantage²⁵. Klein souligne lui-même le contraste entre la liberté que connaît désormais la nouvelle géométrie qui peut s'attacher à son gré à tel groupe de transformations, alors que, dans la géométrie traditionnelle, « *un groupe complètement déterminé, le groupe principal, était donné a priori*²⁶ ».

Réflexions épistémologiques

Par leur portée et leur caractère fondamental, les démarches qui ont conduit à cette vue unifiée de la géométrie, partielle sans doute, mais remarquable, que constitue le programme d'Erlangen, appellent tout spécialement une réflexion épistémologique. Nous sommes en présence d'un cas exemplaire où les traits les plus caractéristiques du dynamisme de la pensée scientifique se manifestent d'une façon particulièrement accusée et explicite.

Mise en question et interrogations critiques

Rarement dans l'histoire de la science la mise en question des conceptions traditionnelles est apparue à la fois plus difficile et plus féconde que dans le cas de l'avènement des géométries non-euclidiennes, qui, on l'a vu, ont joué un rôle essentiel dans la genèse du programme d'Erlangen. Bien grand déjà est à cet égard le mérite de Gauss, puis de Lobatchevski et Bolyai qui, les premiers ont contesté le dogme de la structure euclidienne de l'espace, et, par voie de conséquence, ont contribué à faire de la géométrie, jusque-là science de l'espace physique, une discipline rationnelle, indépendante des données sensibles. Plus audacieuse encore, est la démarche de Riemann surmontant le refus que ses prédécesseurs avaient opposé avec tant d'intransigeance à la possibilité de concevoir que deux droites puissent enclore un espace, ou, équivalamment, que l'espace puisse être limité.

Besoin de compréhension en profondeur

À mesure que progresse la réflexion, aussi bien en géométrie non-euclidienne qu'en géométrie projective, nous voyons le besoin de compréhension devenir plus exigeant. Alors que Chasles s'accommode encore de la simple coexistence en géométrie des propriétés projectives et des propriétés métriques, sans se soucier de déterminer leur nature exacte et leurs rapports, Cayley montre que les propriétés métriques peuvent être caractérisées de manière projective.

²³ Programme d'Erlangen, p. 100.

²⁴ « *Le groupe qui fixe la façon de traiter un domaine donné peut être à volonté généralisé* » (Programme d'Erlangen, p. 176).

²⁵ Programme d'Erlangen, p. 182-183. C'est seulement de 1872 que datent les premières publications de Lie sur les groupes de transformations.

²⁶ Programme d'Erlangen, p. 189.

Autre situation significative : chez Poncelet, la géométrie projective est développée sans souci explicite d'une formulation cohérente de ses fondements, alors que Staudt en donne une présentation axiomatique et en même temps abstraite, qui en fait apparaître les structures essentielles.

Mais, ainsi qu'on l'a vu, nous ne trouvons ni chez Staudt, ni chez Cayley, le souci de préciser le rôle exact de l'axiome des parallèles. C'est Klein qui, le premier, tirera au clair ce point si délicat.

De la diversité à l'unité. Vers une unification englobant toujours plus

Dans l'histoire de la géométrie au XIX^e siècle, comme dans la plupart des autres domaines de l'histoire des sciences, nous sommes en présence d'une dialectique de diversification unification qui mérite d'être plus explicitée qu'elle ne l'est communément. Le pluralisme des points de vue sous lesquels les géomètres du XIX^e siècle s'intéressent à la géométrie est particulièrement accusé²⁷. Cayley, sensible à ce qu'a d'anormal cette situation, opère déjà une unification remarquable en instaurant une théorie projective générale de la géométrie. Mais Klein est plus ambitieux. Dans un passage du programme d'Erlangen, cité au début de cet exposé, il observe que « *bien qu'elle soit une par essence... (la géométrie) s'est scindée dans ces derniers temps en des disciplines presque séparées* ». De là cet effort plus accentué d'unification, qui le conduit à intégrer dans une même théorie les géométries non euclidiennes et la géométrie projective. Mais, si remarquable que soit cette synthèse, elle laisse en dehors d'elle des aspects majeurs de la géométrie.

Il convient de le souligner. Notamment Klein n'a pas vraiment porté attention aux vues si profondes de Riemann sur la définition des géométries à partir du ds^2 d'un élément infinitésimal. On sait qu'il faudra attendre Elie Cartan pour voir rapprocher ces deux points de vue dans une conception plus ample de la géométrie.

En d'autres termes, Klein n'a pas aperçu les limites de l'unification qu'apportait à la géométrie la notion de groupe de transformation. Déjà « débordée » par les vues de Riemann sur le ds^2 , cette unification le sera aussi par l'axiomatique de Hilbert à la fin du XIX^e siècle, et, plus encore, à partir des années 1910-1920, par la topologie générale.

Ouverture et refus

Si amples et profondes que soient les vues d'un Staudt, d'un Cayley, d'un Klein, elles demeurent enfermées dans une conception de la géométrie, dans un système de visées, qui, à côté d'aspects très féconds, apparaît marqué du refus de s'ouvrir à certains points de vue plus amples et plus profonds dont la portée sera pourtant bientôt reconnue. Ainsi il est typique de voir Cayley s'arrêter au point de vue projectif. Pour lui, nous l'avons noté plus haut, « *la géométrie projective est toute la géométrie* ». Plus limitatif encore nous apparaît le maintien, si avant dans le XIX^e siècle, de l'idéal d'une géométrie pure, indépendante de l'analyse.

Ainsi, dans cette histoire de la genèse du programme d'Erlangen, nous retrouvons une situation qui s'offre en maintes autres périodes et domaines de l'histoire des sciences : ceux-là même qui font faire à la science les plus grands progrès, apparaissent toujours par quelque côté y opposer des obstacles, ou du moins les retarder. Ceci parce qu'ils ne savent pas reconnaître les limites et les imperfections de leur œuvre et qu'ils ne portent pas une attention suffisante à des travaux poursuivis dans des perspectives différentes de la leur.

De la sorte le progrès de la science apparaît moins comme résultant du concours harmonieux de contributions partielles, où chacun viendrait compléter la précédente, que comme un rapprochement de recherches divergentes et qui se sont mutuellement ignorées.

²⁷ Il est très bien mis en évidence dans les chapitres sur les mathématiques du volume sur le XIX^e siècle de l'*Histoire générale des sciences*, publiée sous la direction de René Taton.

Structure du progrès de la science

Ainsi que nous l'annoncions au début de cet exposé, et comme l'aura fait apparaître l'exposé lui-même, la genèse du programme d'Erlangen ne se présente pas comme une suite de démarches sans liens. En dépit des multiples aléas qui s'y manifestent, elle apparaît, avec le recul du temps, constituer un processus en grande part soumis à une assez stricte logique. Aussi l'histoire de cette genèse ne pouvait consister seulement dans une juxtaposition des faits. Elle avait à en dégager la structure. Après la description assez complexe qui vient d'être donnée, il paraît opportun d'en rappeler les composantes essentielles :

1. Formation et développement, indépendamment l'une de l'autre :
 - a) de la géométrie projective ;
 - b) de la géométrie non euclidienne de Bolyai-Lobatchevski.
2. Unification et approfondissement de la géométrie projective, notamment grâce à l'interprétation en termes projectifs des propriétés métriques.
3. Achèvement de l'élucidation du problème des géométries non euclidiennes par adjonction de la géométrie de Riemann à la géométrie de Bolyai-Lobatchevski.
4. Rapprochement des deux géométries non euclidiennes par interprétation projective de celles-ci.
5. Développement des vues nouvelles et générales sur la notion d'espace, dépassant la notion d'espace euclidien à trois dimensions :
 - a) généralisation de la notion d'espace à plusieurs points de vue : notamment espaces à plus de trois dimensions ;
 - b) introduction de l'idée de caractérisation d'une géométrie par un groupe ;
 - c) mutation de la notion de géométrie, considérée non plus comme science des propriétés des figures, mais comme science des propriétés de l'espace.

Les rapports entre ces différents éléments constitutifs de la structure du développement du programme d'Erlangen sont suffisamment clairs pour qu'il ne soit pas nécessaire d'en donner une représentation figurée.

Histoire des acquisitions de la science et histoire de sa conception

L'histoire que nous venons de retracer a porté non pas directement sur les acquisitions de la géométrie, mais sur l'évolution de sa conception. Ainsi, dans ce cas particulier, se manifeste de façon très caractéristique la nécessité, encore insuffisamment reconnue, de faire place dans l'histoire des sciences, à côté de l'histoire proprement dite des découvertes, à l'histoire de la conception même que chaque époque, chaque savant, s'est fait de la science. Dans le cas présent, on parle assez communément d'histoire des fondements de la géométrie. Cette qualification nous paraît étroite. L'idée d'histoire des fondements suggère l'établissement de principes logiques et formant un tout cohérent, à partir desquels une science pourra être développée. Or, ce dont nous avons traité inclut certes les fondements ainsi entendus, mais les déborde de beaucoup. La genèse que nous avons décrite nous a fait assister à des mutations plus « fondamentales » qui concernent, notamment, la notion d'espace. C'est pourquoi il conviendrait ici, comme dans bien d'autres domaines, de joindre à l'histoire des fondements et des principes, une histoire des conceptions que l'on s'est fait de chaque discipline.

La science œuvre internationale

Une dernière observation générale portera sur le caractère international de l'effort qui a conduit à l'énoncé du programme d'Erlangen. Il vaut la peine de noter que nous y avons vu concourir directement des Allemands (Klein, Staudt, Grassmann, Helmholtz, Riemann), un Russe (Lobatchevski), un Tchèque (Bolyai), un Anglais (Cayley), des Français (Poncelet, Chasles), un Italien (Beltrami).

Par là se manifeste encore davantage la qualité, l'ampleur, et la portée de cette genèse du programme d'Erlangen qui, en faisant converger les travaux d'hommes si divers par leur génie et leur tempérament, nous a valu l'une des conquêtes les plus remarquables de la science moderne.