Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

67 | 2021

**La théorie et la pratique dans les travaux et la
correspondance d'Émile Clapeyron et de Gabriel Lamé
(1818-1835)**

Partie I

Formation et travaux d'un binôme de polytechniciens (1818-1831)

Évelyne Barbin

Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/sabix/2905>

DOI : 10.4000/sabix.2905

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 1 août 2021

Pagination : 13-45

ISSN : 0989-30-59

Référence électronique

Évelyne Barbin, « Partie I », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 67 | 2021, mis en ligne le 01 août 2021, consulté le 21 novembre 2021. URL : <http://journals.openedition.org/sabix/2905> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.2905>

Partie I

Formation et travaux d'un binôme de polytechniciens (1818-1831)

Évelyne Barbin

Lamé est entré deux ans avant Clapeyron à l'École polytechnique. Il a été licencié de cette École en 1816 pour « insubordination »⁷ et il subvient alors à ses besoins en donnant des cours de mathématiques, qui rencontrent un certain succès⁸. Il a été reçu troisième au concours d'entrée et il a pu préparer ses élèves à résoudre des problèmes donnés au concours. Il tire de cette expérience en 1818 un ouvrage sur les méthodes en géométrie, où il expose des conceptions qu'il reprendra par la suite, seul ou en compagnie de Clapeyron. Une remarque de celui-ci, sur la méthode employée dans son article sur les engrenages, suggère qu'il avait lu l'ouvrage en 1820.

Clapeyron et Lamé se sont probablement rencontrés en 1819, au moment où ils sont reçus tous les deux comme élèves ingénieurs au Corps des mines. Alors élèves, ils signent chacun deux articles individuels dans les *Annales des Mines*, en 1819 et 1820, qui indiquent des intérêts assez éloignés, Lamé sur la forme géométrique des cristaux et Clapeyron sur les bateaux à vapeur. Puis en 1820, ils sont recrutés tous les deux pour entrer à l'Institut des voies de communication de Saint-Petersbourg. Cette circonstance va les rapprocher, d'autant qu'ils habiteront sur le même palier d'une maison, comme nous le savons par un croquis⁹ que Lamé envoie à sa famille le 8 décembre 1823.

Le croquis de l'étage partagé par Clapeyron et le couple Lamé (© Bibliothèque de l'École polytechnique).

7. [Pinet, 1887, 94-97].

8. [Bertrand, 1878].

9. [Jeanson, 14-15].

Les deux jeunes ingénieurs ont probablement commencé leur collaboration en préparant leurs cours ensemble, les mathématiques, la mécanique rationnelle et la théorie des machines, de sorte à relier les parties théoriques et les applications pratiques en « un tout homogène ». Deux sujets enseignés seront développés dans leurs articles, les engrenages et les voûtes. Ces articles sont significatifs pour comprendre comment se sont élaborées les méthodes propres au binôme. En effet, Clapeyron écrit seul un premier mémoire sur les engrenages en 1820 en employant une « démonstration synthétique », puis en 1823 le binôme écrit son mémoire sur les voûtes en mêlant habilement mécanique et géométrie, avant qu'en 1824 le binôme ne revienne sur les engrenages en adoptant une méthode analytique.

Leur premier article commun, paru en 1822 dans les *Annales des Mines*, fait suite à une mission accomplie dans le pays du Hartz¹⁰, et nous verrons les circonstances dans lesquelles il est signé dans l'ordre non alphabétique « Lamé et Clapeyron ». Cette signature sera consacrée par l'Académie des sciences car elle est celle du « Mémoire sur la stabilité des voûtes », présenté en 1823, qui vaudra au « binôme » un premier rapport élogieux de Charles Dupin et Gaspard de Prony pour « la marche de l'analyse [...] conduite avec adresse et élégance »¹¹.

L'accent mis sur les méthodes, par le binôme lui-même dans tous ses articles et par les rapporteurs qui les ont lus, nous a conduit à rechercher, dans ces écrits aux sujets variés, une démarche propre caractérisant l'entité « Lamé et Clapeyron ». Ceci amène à distinguer trois périodes. Sur la première période,

de 1822 à 1825, nous analysons les liens entre les premières publications du binôme et leur appartenance à l'Institut de Saint-Petersbourg. Dans la seconde période, en 1826 et 1827, nous mettons en évidence la systématisation d'une méthode mécanico-géométrique pour résoudre des problèmes de construction et d'équilibre, et dans la troisième, de 1828 à 1831, l'élaboration d'une analyse physico-mathématique pour résoudre des problèmes physiques comme l'élasticité, la chaleur et le refroidissement.

Les premiers travaux individuels : mathématiques et machines (1818-1820)

Dès 1817, Lamé publie dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées*¹² une nouvelle méthode de résolution de problèmes, connue plus tard sous le nom de « notation abrégée »¹³. Ces *Annales*, éditées par Joseph-Diaz Gergonne, sont destinées à un large public d'élèves, de mathématiciens et d'enseignants¹⁴. L'année suivante, en 1818, Lamé tire de son expérience un ouvrage destiné à ce même public et intitulé *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre des problèmes de géométrie*¹⁵.

L'examen des méthodes en géométrie de Lamé

L'ouvrage est original car il est organisé à partir de problèmes, eux-mêmes classés selon des méthodes de résolution¹⁶, de sorte que les théories mathématiques sont d'emblée comprises à partir des applications et des problèmes qu'elles permettent de résoudre.

10. [Lamé et Clapeyron, 1822].

11. [Dupin et Prony, 1823, 836].

12. [Lamé, 1817].

13. [Barbin, 2011].

14. [Gérini, 2002], [Gérini et Verdier, 2006].

15. [Lamé, 1818].

16. [Barbin, 2009b].

En effet, Lamé justifie dans l'introduction l'ordre qui va des problèmes aux méthodes et aux théories en écrivant que « c'est en partie dans la vue de perfectionner les problèmes de Géométrie, que les mathématiciens ont enrichi l'Analyse des calculs qui composent aujourd'hui les sciences exactes »¹⁷. Il explique que, dans l'histoire, l'analyse a été augmentée par la trigonométrie, l'application de l'algèbre à la géométrie de Descartes, le calcul différentiel de Leibniz, le calcul intégral, la théorie générale des équations de Lagrange et l'analyse appliquée de Monge. Il demande si « dans l'enseignement des sciences abstraites, la meilleure méthode à prendre ne serait-elle pas de suivre la marche de l'invention ? »¹⁸. Cet « ordre des inventeurs », qui va des problèmes aux théorèmes, a été illustré et défendu dans les *Éléments de géométrie* d'Alexis Clairaut de 1741 et dans *l'Essai sur l'origine des connaissances humaines* de 1746 d'Étienne Bonnot de Condillac. Lamé lui trouve l'avantage de faire apercevoir le but des mathématiques et de montrer la coordination de ses diverses branches.

Une partie de l'introduction est consacrée à l'opposition entre l'analyse et la synthèse, qui se retrouve dans les écrits de Clapeyron et de Lamé. Pour les géomètres grecs, la synthèse et l'analyse sont deux chemins inverses dans la déduction logique des propositions. En 1640, René Descartes apporte une autre conception de l'analyse, qui montre la voie méthodique par laquelle une chose a été inventée. Au siècle suivant, Condillac écrit contre l'usage de la synthèse que « si les idées des mathématiciens sont exactes, c'est qu'elles sont l'ouvrage de l'algèbre et de l'analyse »¹⁹. Pour Lamé, il est « constant qu'un problème quel qu'il soit, ne peut être trouvé

que par une méthode analytique ». Cependant, il la faire suivre par une « méthode synthétique » car « l'Analyse éclaire ainsi la Synthèse ; la Synthèse, de son côté, éclaircit les passages que l'Analyse n'a pour ainsi dire qu'effleurés »²⁰.

Lamé exemplifie l'analyse avec la méthode cartésienne qui consiste à résoudre des problèmes de géométrie en les ramenant à la résolution d'équations algébriques. Il souligne « l'accord constant de l'Algèbre avec la Géométrie, accord qui permet de confier au calcul le soin de découvrir de nouveaux théorèmes »²¹. Il examine la pratique du calcul algébrique, en insistant sur la visualisation des équations, sur le choix des notations et sur la symétrie des écritures²² :

La notation est à l'Analyse ce que l'arrangement et le choix des mots est à la clarté du style. Avec son secours, les calculs les plus longs deviennent une somme de transformations semblables, et il ne faut, pour achever le tout, que la patience de répéter la partie principale. C'est avec de pareilles inventions que l'Analyse algébrique, si pénible dans son origine, est parvenue au point de donner des leçons de simplicité à la géométrie.

Mais il écrit en faveur de la géométrie²³ :

Que doit-on le plus admirer, ou du calcul qui commence ses travaux avec confiance, et finit presque toujours par répondre à la question, ou de la Géométrie qui part sans rien promettre, et revient quelque fois offrir avec la solution du problème, celle de plusieurs autres qu'on ne lui demandait pas, et qu'elle a recueilli sur son passage ?

17. [Lamé, 1818, 1].

18. [Lamé, 1818, 2].

19. [Condillac, 1746, 63].

20. [Lamé, 1818, 8 et 9].

21. [Lamé, 1818, 6].

22. [Lamé, 1818, 26-27].

23. [Lamé, 1818, 19].

La richesse de la géométrie vient du « secours qu'elle tire des sciences qui lui doivent sinon leur naissance, du moins leur accroissement et leur clarté ». Le recours à ces sciences conduit à ce que Lamé appelle des « méthodes indirectes », par exemple pour la mécanique²⁴ :

La Mécanique est sans doute la science qui promet le plus de découvertes à la Géométrie ; la statique emprunte souvent sa synthèse, ses principaux théorèmes, et lui donne en échange, soit une nouvelle démonstration d'un principe déjà connu, soit la solution d'un problème dont elle a traduit l'énoncé dans son propre langage. [...] Quelque fois la science de l'équilibre se fait un jeu des problèmes les plus difficiles de la géométrie, et va quelque fois de pair avec les calculs les plus élevés de l'Analyse algébrique.

Il illustre ceci avec des problèmes de maxima et minima de distances, qui sont « souvent l'écueil de la Géométrie » alors qu'ils peuvent être résolus facilement par la statique. Son premier exemple est le problème de trouver un point dont la somme de ses distances à trois points donnés soit un minimum. Il décrit un système mécanique qui correspond au problème lorsque le système est en équilibre et il traduit la situation d'équilibre par une condition angulaire. Un problème plus complexe fera l'objet d'un article du binôme en 1827.

La lecture de l'*Examen* de 1818 pose la question de savoir où son jeune auteur a puisé les conceptions qu'il défend. Nous savons que les instigateurs des écoles de la Révolution ont repris les idées de Condillac, comme Étienne Barruel qui s'est prononcé en 1791 en faveur de l'analyse et contre l'exposition

synthétique dans l'écriture des livres élémentaires²⁵. Ces idées nourrissent aussi l'esprit des cours de l'École normale de l'an III, qu'a suivi Sylvestre-François Lacroix. Ce disciple de Gaspard Monge, devenu professeur de mathématiques à l'École centrale des Quatre-Nations en 1794, a écrit plusieurs manuels et des *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier* en 1805. Il consacre vingt pages des *Essais* aux « deux méthodes pour traiter les sciences mathématiques, la synthèse et l'analyse ». Il cite Condillac et affirme, comme le fera Lamé, que « l'analyse est en général la méthode d'invention », et il conseille aussi de « rapprocher la synthèse de l'analyse, toutes les fois que l'on peut se servir en même temps de l'une et de l'autre »²⁶. Lamé a pu être amené à lire les *Essais* car Lacroix est examinateur de l'École polytechnique²⁷ de 1809 à 1815, donc pendant l'année où Lamé est élève de l'École.

Les mesures des angles des cristaux de Lamé

Dans son article « Sur une nouvelle manière de mesurer les angles des cristaux » de 1819, Lamé reprend, presque à l'identique, ce qu'il a écrit dans l'*Examen* de 1818 à partir des travaux de René-Just Haüy sur la forme des cristaux. Haüy a écrit son *Essai sur les cristaux*²⁸ en 1784, mais Lamé a pu lire son *Traité élémentaire de physique*, édité en 1803 puis en 1806. Ce traité, issu des cours de l'École normale de l'an III et destiné aux élèves des lycées, contient une partie sur la cristallisation et la forme des cristaux²⁹. Haüy a donné des cours de minéralogie à l'École des Mines en 1795, à la Sorbonne en 1809, et, en 1816, année où Lamé est licencié, il est aussi

24. [Lamé, 1818, 83-84].

25. [Barbin, 2021a].

26. [Lacroix, 1805, 240 et 251].

27. [Correspondance sur l'École polytechnique, 1814, II, 36].

28. [Haüy, 1784].

29. [Haüy, 1806, t. I, 58-79].

membre du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique³⁰.

Lamé explique que ce sont des raisonnements purement géométriques qui ont conduit le minéralogiste à la détermination des éléments des cristaux, alors que des calculs par abscisses et ordonnées sont possibles à condition d'inclure les angles des faces des cristaux³¹ :

Cependant, pour prouver que l'analyse de Descartes n'est pas incapable de traiter une des plus belles applications du calcul à la géométrie, je vais indiquer la marche qu'elle pourrait prendre. Si je réussis à donner une analyse simple et facilement applicable, je m'applaudirai d'avoir fait entrer sous le domaine d'un calcul qui doit être général, un sujet qui semblait le fuir; et si malgré mes tentatives ce calcul se trouve compliqué, on ne pourra rien en conclure contre la généralité de son application.

Il expose une méthode analytique générale qui fournit des formules pour trouver les angles des cristaux. Il montre l'avantage de ses calculs, dans un second article, en les appliquant à la détermination de l'inclinaison d'une couche minérale par trois trous de sonde, c'est-à-dire la détermination de l'angle avec l'horizontal d'un plan dont on connaît trois points³².

L'article sur les bateaux à vapeur de Clapeyron

Clapeyron publie en 1820 deux articles dans les *Annales des Mines*. Nous reviendrons plus loin sur le premier, qui porte sur les engre-

nages, car il sera repris par le binôme. Le second, intitulé « Sur les bateaux à vapeur », est le témoin de son intérêt précoce pour les machines à vapeur³³. Quand il écrit son article, la question de l'amélioration des bateaux à vapeur n'est pas nouvelle, mais elle se pose de manière importante en France. En effet, en 1737, l'anglais Jonathan Hull a utilisé une machine à vapeur pour mouvoir des bateaux avec des roues à aubes, sans succès, mais un bateau, équipé d'une machine à vapeur de Robert Fulton, est construit en 1807 à New-York, puis, en 1812, un bateau navigue en Angleterre sur la Clyde. Ce type de navigation y devient rapidement florissant alors que des essais de bateaux à vapeur, effectués en France en 1815 avec des machines imparfaites, échouent. L'ingénieur de la marine royale Marestier écrira en 1824 un *Mémoire sur les bateaux à vapeur des Etats-Unis d'Amérique*³⁴ et son rapport par Charles Dupin contient un historique sur ces bateaux, repris en 1826 dans sa *Géométrie et Mécanique des arts et métiers et des Beaux-arts*³⁵.

Un cours sur les machines a été donné dès sa création³⁶ à l'École centrale des travaux publics (renommée École polytechnique en 1795). Ce cours a été projeté par Gaspard Monge, un des promoteurs de l'École centrale, et il a été assuré par son disciple Jean Nicolas Pierre Hachette, qui y enseigne jusqu'en 1816. En 1817-1818, année où Clapeyron est élève, le programme du cours des machines indique³⁷ :

[Les machines] se réduisent au fond à un petit nombre d'éléments simples, qui s'assemblent et se combinent les uns les autres d'une infinité de manières. Ce

30. [Hulin, 1997].

31. [Lamé, 1819a, 70].

32. [Lamé, 1819b, 81].

33. [Redondi, 1980, 102].

34. [Marestier, 1824, 7].

35. [Dupin, 1826, 450-455].

36. [Hachette, 1808, v]. [Dupont, 2000, 15].

37. [Bulletin de la Sabix, 25, 2000, 15].

genre de combinaisons est lui-même soumis à des règles fixes, et les effets qui en résultent peuvent être généralement déterminés d'avance par le calcul.

Le mémoire de 1820 est écrit dans cet esprit, selon lequel des règles fixes permettent d'établir un calcul pourvoyeur de généralité. Clapeyron y explique qu'une machine à vapeur, destinée à faire mouvoir un bateau devant produire une pression égale et opposée à celle que le courant exerce contre lui, il faut communiquer aux fluides qui entourent le bateau une force vive dans un sens opposé à celui dans lequel agit la pression. Il propose donc de « déterminer la quantité de force vive [...] qu'il faut dépenser pour se procurer une pression donnée pendant un temps donné »³⁸. Il s'appuie sur le « principe des forces vives » car ses calculs doivent être valables quel que soit le moteur. La notion de force vive et le principe de la conservation de la somme des forces vives ont été introduits par Gottfried Leibniz, la force vive mv^2 s'exprime comme le produit de la masse m par le carré de la vitesse v d'un corps. D'Alembert donne une démonstration du principe en 1743 dans son *Traité de dynamique* en le faisant dépendre du principe des vitesses virtuelles³⁹. La notion et le principe figurent dans le tome second sur la dynamique du *Traité de mécanique* de 1811 de Siméon Denis Poisson, écrit suite à ses cours à l'École polytechnique donnés à partir de 1806 (Partie II).

La conservation des forces vives devient un principe fondamental dans les travaux visant l'édification d'une théorie générale des machines au tournant du siècle. En 1786, le mathématicien et physicien Lazare Carnot expose une théorie des machines dans son *Essai sur les machines en général*, où il écrit :

« la conservation des forces vives sert de base à toute notre théorie des Machines, soit en repos, soit en mouvement »⁴⁰. Dans sa préface au *Traité élémentaire des machines* de Hachette, édité en 1811, il insiste encore sur l'usage du principe de conservation des forces vives⁴¹ :

Le principe de la conservation des forces vives ayant lieu pour tout système de corps qui change d'état par degrés insensibles, soit qu'ils agissent immédiatement les uns sur les autres, soit qu'ils se transmettent leurs mouvements respectifs par un assemblage quelconque de fils inextensibles, de verges incompressibles et de leviers, ce principe, dis-je, semble être spécialement approprié au calcul des machines ; et comme il est indépendant de la forme même de ces machines, on conçoit combien son application doit être générale, et combien de calculs résultant de la configuration particulière de telle ou telle machine, il doit épargner.

Le traité d'Hachette expose une théorie élémentaire des machines en trois chapitres : sur les machines simples et hydrauliques, les engrenages et des machines diverses comme le cabestan. Plusieurs de ces machines feront l'objet de travaux de « Lamé et Clapeyron ».

Dans le mémoire « Sur l'emploi des forces vives dans le calcul de l'effet des machines » de 1818, Alexis Petit, professeur de physique à l'École polytechnique de 1815 à 1820, écrit que « la théorie des machines, envisagée sous ce point de vue [le principe des forces vives] est presque entièrement à créer »⁴². Il explique que l'expression de l'effet d'une machine en mouvement peut toujours se ramener à une force vive : si m est la masse du poids élevé à

38. [Clapeyron, 1820b, 191].

39. [d'Alembert, 1785, 87].

40. [Carnot, 1786, 39].

41. [Hachette, 1811, np].

42. [Petit, 1818, 287].

la hauteur h , l'effet produit sera représenté par gmh , or si v est la vitesse acquise par un corps qui tombe de la hauteur h , on a

$$gmh = \frac{1}{2} mv^2$$

Son mémoire concerne les machines mues par des fluides et il énonce le principe des forces vives de la manière suivante⁴³ :

La force vive communiquée à la résistance est égale à celle que possédait le moteur, diminuée, et des forces vives perdues dans les changements brusques de vitesse, et de celle que le moteur conserve après avoir exercé son action.

À la suite de ce mémoire, Claude Henri Navier remarque, dans ses « Détails historiques sur l'emploi des forces vives dans la théorie des machines, et sur diverses roues hydrauliques »⁴⁴ de 1818, que l'idée d'utiliser les forces vives pour l'étude des machines⁴⁵ se trouve dans les travaux d'hydrodynamique de Daniel Bernoulli de 1738, dans deux mémoires de Jean-Charles de Borda, sur les roues hydrauliques en 1767 et sur les pompes en 1768, puis dans un mémoire sur les moulins à vent de Charles-Augustin Coulomb en 1781. Navier a été élève de l'École polytechnique en 1802 puis de l'École des ponts et chaussées, où il donne à partir de 1820 un enseignement de mécanique appliquée à mi-chemin entre la science pure et la pratique⁴⁶. Le mémoire de Petit reçoit un accueil enthousiaste de la part de José Maria de Lanz et Augustin de Bétancourt, qui reprennent *in extenso* son texte dans la seconde édition de leur *Essai sur la composition des machines*⁴⁷ de 1819. Il est aussi salué par Joseph Fourier, Gaspard de Prony et Charles Dupin dans un

rapport à l'Académie des sciences consacré à un mémoire de Navier⁴⁸.

Clapeyron a pu connaître le traité de Hachette et le mémoire de Petit, qui s'intéressent tous deux aux machines hydrauliques. De manière générale, il suppose qu'une machine à vapeur communique une vitesse v à une masse m d'eau ayant une vitesse u . Cette vitesse est communiquée à l'eau au moyen d'une surface plane S se mouvant dans l'eau avec une vitesse v et une pression p communiquée par la machine. Il applique le principe des forces vives pour obtenir⁴⁹ :

$$m \left(\frac{v^2 - u^2}{2} \right) = \frac{Spv}{g}$$

Puis il propose de remplacer la roue à palette par une pompe, dont il décrit le fonctionnement et montre les avantages. Cette pompe est une invention technique, dont il justifie l'intérêt par le calcul. L'utilisation d'une propulsion à jet d'eau à l'aide d'une pompe à vapeur sera présentée à l'Académie des sciences en 1829 par Pelletan⁵⁰.

La pompe de Clapeyron pour les bateaux à vapeur
(mémoire cité en note 49)

43. [Petit, 1818, 290].

44. [Navier, 1818].

45. [Navier, 1818, 149-150].

46. [Picon, 1995, 257-260].

47. [Lanz et Bétancourt, 1819, 21].

48. [Revue Encyclopédique, 1819, II, 327-331].

49. [Clapeyron, 1820, 192].

50. [Revue des deux mondes, 1833, 2, I, 435].

La formation du binôme « Lamé et Clapeyron » (1822-1825)

Les deux élèves ingénieurs arrivent en Russie en 1820. Ils ne publient pas dans les *Annales des Mines* en 1821, mais, de 1822 à 1826, il y paraît deux articles individuels pour chacun, dont deux sont repris dans un article commun, plus un article cosigné tous les ans.

Le nombre de cinq articles cosignés dans ce journal est un cas assez rare. En effet, parmi tous les articles de la « Table Alphabétique et analytique des matières »⁵¹ des *Annales* pour la période 1816-1830, il se trouve cinq binômes signant plus de trois articles. Joseph-Louis Gay-Lussac écrit de nombreux articles dans les *Annales* et en cosigne trois avec M. Welter, un sur la dilatation de l'air et deux sur des essais chimiques. Pierre-Louis Dulong et Louis-Jacques Thénard cosignent trois articles, dont deux sur les fluides élastiques. Jean-Baptiste Boussingault et Mariano Eduardo de Rivero cosignent trois articles, dont deux sont écrits à l'occasion d'une mission commune en 1822 dans les Andes. Armand Dufrénoy et Léonce Élie de Beaumont cosignent sept articles à la suite d'une mission en Angleterre en 1823 sur les fabrications de métaux, qui seront repris dans *Le Voyage métallurgique en Angleterre* en 1827. Léon Coste et Auguste Perdonnet en cosignent neuf à la suite aussi d'une mission en Angleterre en 1829 sur les fabrications du fer, de la fonte, de l'acier, de l'étain et du coke.

Dans tous ces cas, les articles cosignés par un binôme concernent un seul thème, parfois deux. Il n'en est pas de même avec les cinq articles cosignés par Clapeyron et Lamé. L'article de 1822, relate, comme bien d'autres, une mission: elle a été effectuée dans le Hartz, région du centre nord de l'Allemagne. Les articles suivants abordent quatre ques-

tions très différentes les unes des autres: la stabilité des voûtes en 1823, la forme des dents dans les engrenages en 1824, les ponts suspendus en 1825 et un cabestan en 1826. Pour comprendre cette variété et le choix des méthodes mises en œuvre, il est nécessaire de se reporter aux activités que les deux ingénieurs mènent ensemble à l'Institut de Saint-Pétersbourg.

Clapeyron et Lamé à l'Institut de Saint-Pétersbourg

L'Institut du Corps des ingénieurs des voies de communication de Saint-Pétersbourg a été mis en place lors de l'arrivée de l'ingénieur des ponts et chaussées Augustin de Bétancourt en 1808, avec pour modèles l'École polytechnique et l'École des ponts et chaussées⁵². Augustin de Bétancourt en est le directeur depuis 1819 et l'ingénieur des ponts et chaussées Pierre Dominique Bazaine est chargé de recruter des ingénieurs français, avant de devenir lui-même directeur en 1824. Clapeyron et Lamé enseignent les mathématiques, la mécanique rationnelle et la théorie des machines. Lamé expliquera en 1851 qu'ils ont préparé ensemble leurs cours pour en faire un « tout homogène » liant parties théoriques et applications pratiques, parmi lesquelles se trouvent deux thèmes développés dans leurs articles, les engrenages et les voûtes⁵³:

Il y a plus de trente ans, en 1820, M. Clapeyron et moi nous quittons le corps des Mines, en France, pour aller à Saint-Pétersbourg relever une école d'ingénieurs, qui menaçait ruine faute de professeurs. Là nous avons dû enseigner, successivement et simultanément, toutes les mathématiques, depuis les éléments jusqu'au

51. [*Annales des Mines*, Table alphabétique et analytique des matières, 1831, 3].

52. [Gouzévitch et Gouzévitch, 1993], [Gouzévitch, 2009], [Gouzévitch et Gouzévitch, 2018].

53. [Lamé, 1851, 227-228].

calcul infinitésimal, la mécanique rationnelle, la théorie des machines, et les cours de construction dans toutes ses parties. [...] Le cours de machines et celui de construction, que nous professions aussi, nous venaient en aide par les exemples qu'ils fournissent. Et ces trois cours, réunis dans les mêmes mains, formaient un tout homogène, où dominait la rigueur mathématique, et d'où l'empirisme était scrupuleusement banni.

Toutefois pour rester dans ces conditions dont nous ne voulions nous départir à aucun prix, nous avons dû nous condamner à de rudes travaux de préparation. C'est ainsi que nous avons introduit, peut-être les premiers dans les cours d'application, le chapitre relatif aux engrenages, à leur génération, au calcul de leurs frottements, celui de la poussée des voûtes et du tracé de leurs joints de rupture; chapitres qui forment, dans les cours dont ils font partie, comme deux oasis de théorie rigoureuse.

Les deux ingénieurs participent aussi aux travaux menés dans l'Institut, qui ont débuté en 1817. Ces travaux sont présentés dans les premiers numéros du *Journal des voies de communication* créé par l'Institut en juillet 1826. Le premier article indique⁵⁴ :

Les occupations auxquelles se livrent les ingénieurs sont si variées et si intimement liées, par leur objet, aux branches de l'administration de l'empire, qu'une critique sage et raisonnée de leurs travaux doit nécessairement développer une foule de vérités utiles. Si ces vérités sont restées cachées jusqu'à présent, c'est que

le monde savant ne peut les admettre qu'autant qu'elles sont accompagnées de preuves irrécusables. La discussion, l'échange mutuel des connaissances, feront paraître dans tout leur jour ces vérités, d'autant plus importantes à constater et à répandre que tout perfectionnement apporté par elles aux voies de communication, a pour effet de faire fleurir le commerce et l'industrie de l'Empire.

La « partie théorique » des travaux de l'Institut figure dans deux articles de 1826, elle donne une liste d'ouvrages écrits à partir des cours donnés à l'Institut: la géométrie descriptive, discipline emblématique de l'École polytechnique⁵⁵, avec les trois traités⁵⁶ de Potier de 1816 et 1818, la géométrie analytique avec un ouvrage du colonel Maïoroff, et le calcul différentiel. Bazaine a écrit en 1817 un *Traité élémentaire de calcul différentiel*⁵⁷, qui a ensuite été complété par Lamé et édité aux noms de Bazaine et Lamé en 1825 sous le titre *Traité élémentaire de calcul intégral*. Plusieurs traités de sciences de l'ingénieur sont mentionnés. Le nom de Clapeyron est cité une fois pour des expériences accomplies avec Lamé sur les chaux de Russie. Les articles des deux ingénieurs, parus dans les *Annales des Mines* puis repris dans le *Journal des voies de communication*, ne sont pas mentionnés.

Clapeyron et Lamé ont bénéficié des échanges au sein de l'Institut, de l'Académie des sciences impériale et de la Commission des projets et des devis, dirigée par Potier et Destrem. Les deux notes signées séparément en 1823 dans les *Annales des Mines* peuvent être situées dans ce large contexte : Lamé écrit sur la lampe à gaz hydrogène⁵⁸ et Clapeyron

54. [*Journal des voies de communication*, 1826, 2, 26].

55. [Barbin, 2019].

56. [*Journal des voies de communication*, 1826, 2, 32].

57. [Bazaine, 1817].

58. [Lamé, 1823].

sur le ciment russe⁵⁹. En 1826, le binôme publie aussi un court article commun sur un cabestan mis en usage par Bétancourt⁶⁰.

Les deux ingénieurs fréquentent aussi des cercles privés, comme le Cercle de philosophie et d'économie politique d'Antoine Raucourt. Celui-ci est entré à l'École polytechnique en 1809 et il enseigne les constructions à l'Institut de 1821 à 1827. Il a publié en 1822 un *Traité sur l'art de faire de bons mortiers*, qui sera réédité en 1828 en France comme « Méthode pour fabriquer la chaux, les ciments et les mortiers les meilleurs et les plus économiques »⁶¹. Dans le cercle de Raucourt, Clapeyron et Lamé ont pu être initiés aux idées saint-simoniennes et rencontré des disciples, tel que Prosper Enfantin. Celui-ci a été élève de l'École polytechnique en 1813 et il a séjourné en Russie dans les années 1821 à 1825 (Partie II).

La signature

« *Lamé et Clapeyron* »

Pour comprendre les circonstances dans lesquelles s'est formé le binôme, nous examinons les cinq articles parus dans les *Annales*, de 1822 à 1826, en analysant les thèmes abordés et les méthodes utilisées.

Le « Précis d'une course dans le pays du Hart »⁶², paru dans un numéro de 1822, est le premier article signé par les deux ingénieurs, ils y décrivent des sites miniers, métallurgiques ou encore géologiques. L'article est signé dans l'ordre « Lamé et Clapeyron » sans qu'une différence de grade ne puisse être un élément explicatif. Tandis que Clapeyron signe seul un article du même numéro, une « Notice sur une nouvelle machine soufflante »⁶³, où il indique que, lors de leur passage dans le Hartz, Lamé et lui ont entendu

parler d'une machine soufflante qui « nous a paru très ingénieuse ». Les palettes de cette machine servent à la fois à recevoir la pression de l'eau motrice et à comprimer l'air dans un réservoir d'où il s'échappe par un conduit. Après avoir décrit l'appareil, Clapeyron recherche comment varie la quantité d'air lancé quand on fait varier la quantité d'eau motrice et il répond en trois pages de calculs. L'article est commenté par les rédacteurs de la revue, qui estiment que cette « espèce de soufflet » n'est pas préférable à la machine soufflante proposée dans un numéro antérieur de la revue, mais elle constitue bien une invention nouvelle qu'il est utile de faire connaître.

Pourquoi l'ordre des signatures du premier article n'est-il pas alphabétique ? Une lecture des sommaires de tous les numéros des *Annales des Mines* pour la période 1816-1826 permet d'apporter une réponse. En effet, en dehors du cas « Lamé et Clapeyron », trois autres articles présentent cette particularité. En 1820, deux articles sont écrits par Lamé et Charles-Édouard Thirria, élève de l'École des Mines, suite à une mission commune dans des mines du sud de la France. Pour l'un, sur le minerai de fer au Creusot et à Vienne, le premier signataire est Lamé et pour l'autre, sur la mine de fer de la Voulte, le premier signataire est Thirria. Nous trouvons le même dispositif d'équilibre des signatures en 1824 et 1826 pour des ingénieurs en visite dans les Andes et au Chili. Nous pouvons situer la signature « Lamé et Clapeyron » dans ce cadre : dans le numéro des *Annales des Mines* de 1822, où paraissent les deux articles faisant suite à la mission dans le Hartz, cette signature permet un équilibre avec l'autre article, signé par Clapeyron seul.

59. [Clapeyron, 1823].

60. [Lamé et Clapeyron, 1826a].

61. [Raucourt, 1828].

62. [Lamé et Clapeyron, 1822]

63. [Clapeyron, 1822]

Le mémoire sur la stabilité des voûtes

Le « Mémoire sur la stabilité des voûtes » de 1823 est signé par « Lamé et Clapeyron » et il est présenté comme le résultat d'une commande pour la cathédrale Saint-Isaac de Saint-Petersbourg, bâtie à partir de 1818 selon les plans d'un architecte français, Auguste Ricard de Monferrand. Il a été prévu de construire une voûte en berceau, assise sur des colonnades et sans massif latéral pour résister à la poussée. Des doutes ayant été émis sur la possibilité d'une telle construction, « on nous a proposé de calculer la poussée de cette voûte et d'indiquer les précautions à prendre pour assurer la stabilité »⁶⁴.

Depuis le *Traité de mécanique* de Philippe de la Hire de 1695, les constructions de voûtes ont été traitées dans une cinquantaine de mémoires et dans plusieurs ouvrages⁶⁵, comme le *Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture* d'Amédée-François Frézier de 1737 et le *Cours d'architecture* de Jacques-François Blondel de 1771. Les méthodes utilisées sont variées. Dans les « Recherches sur l'équilibre des voûtes » du *Cours de mathématiques* de 1802, Charles Bossut s'appuie sur l'analyse : pour déterminer les conditions d'équilibre entre les voussoirs (c'est-à-dire les pierres) d'une voûte en berceau, il suppose que leur nombre est infini et il utilise le calcul différentiel⁶⁶. Tandis que, dans *La science des ingénieurs* de Bernard Forest de Bélidor de 1729, la « mécanique des voûtes » s'appuie sur la géométrie⁶⁷. Navier réédite⁶⁸ cet ouvrage en 1813, et la troisième section de ses cours à l'École des ponts et chaussées de 1820, publiés en 1833, porte sur l'équilibre et à l'établissement des voûtes⁶⁹.

En 1823, Lamé et Clapeyron ramènent la condition d'équilibre de la voûte $ABCDE$ à celle de l'équilibre de deux leviers FB et BK , liés en un point B , tels que l'extrémité F du premier est fixe et l'extrémité K du second soit assujettie à se mouvoir sur la verticale KC . Ils calculent le moment de la résultante de la force qui tend à renverser la voûte et de la force qui tend à la maintenir, puis la valeur minimum de ce moment. Ce qui leur permet de montrer, après simplification, qu'un point de rupture B correspond au cas où le rapport de ma à h est un maximum, avec m le poids du levier BK , a égal à BL et h égal à KN .

Les deux leviers de la condition d'équilibre de la voûte (mémoire cité en note 64).

64. [Lamé et Clapeyron, 1823, 789].

65. [Becchi, 2002]

66. [Bossut, 1802, 393-398].

67. [Bélidor, 1754, 25-29].

68. [Bélidor, 1813].

69. [Navier, 1833, 173-225].

Puis ils traduisent cette condition par une construction géométrique très simple : le point de rupture B est tel que la tangente à l'intrados AC en ce point vient couper l'horizontale passant par le sommet K de la voûte au même point que la verticale passant par le centre de gravité de la masse $BCKH$ tendant à se détacher. Cette simplicité peut être rapprochée du fait que les constructions de voûtes ont donné lieu aussi à un « cours d'application », donné par le binôme à l'Institut sur « la poussée des voûtes et du tracés de leurs joints de rupture »⁷⁰, à des élèves qui étaient plus habiles en géométrie qu'en calcul différentiel (Partie II).

La construction géométrique du point de rupture de la voûte (mémoire cité en note 64).

Le mémoire, d'une trentaine de pages, a été présenté à l'Académie royale des sciences en mai 1823. Le rapport, écrit pour l'Académie par Charles Dupin et Gaspard de Prony, occupe une vingtaine de pages et figure aussi dans les *Annales des Mines*. Les rapporteurs relèvent la simplicité du résultat et l'intérêt des conséquences obtenues. Mais ils indiquent que le binôme a été devancé par le mémoire de Audoy (nommé par erreur Audry dans le rapport). En effet, ce chef de bataillon du génie a écrit en 1820 un « Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau », d'une centaine de pages, dans lequel il donne un

aperçu des méthodes utilisées depuis la Hire. Il met en avant la méthode de Coulomb, qui introduit les circonstances physiques en ramenant le problème à la recherche de maxima et de minima, tandis qu'il estime les solutions de Bossut « sans aucune utilité bien réelle pour les constructeurs »⁷¹. Audry, lui-même modifie et applique la méthode de Coulomb à de nouvelles expériences. Son mémoire ayant pu ne pas arriver à la connaissance du binôme, les rapporteurs concluent sur l'adresse et l'élégance de la « marche de l'analyse » et sur le caractère original de l'exposition du mémoire⁷²:

Nous devons ajouter qu'abstraction faite du mérite de l'invention pour ce qui est relatif aux bases de théorie générale, leur travail n'en est pas moins digne d'éloges sur plusieurs objets de détail ; la construction géométrique du point de rupture, les problèmes résolus dans le supplément du mémoire, offrent des résultats curieux et nouveaux. La marche de l'analyse concernant deux espèces de voûtes est conduite avec adresse et élégance. [...] En général, leur exposition a de la netteté et même de l'originalité, et nous les croyons très-capables d'appliquer utilement leur analyse aux recherches physico-mathématiques. Si l'Académie partage à cet égard notre façon de penser, son opinion sera pour M.M. Lamé et Clapeyron un puissant encouragement à continuer leurs recherches sur les questions qui intéressent les arts de construction, et qui fournissent aux ingénieurs savants et laborieux de grands moyens de se distinguer.

Le mémoire a été signé avec le nom de Lamé en premier, comme pour l'article de 1822, et l'Académie a encouragé les deux ingénieurs en respectant cet ordre. Ils seront donc dès

70. [Lamé, 1851, 228].

71. [Audoy, 1820, 3-5].

72. [Dupin et Prony, 1823, 836].

lors connus dans la communauté scientifique sous le nom de « Lamé et Clapeyron ».

Les deux articles suivants, publiés en 1824 et 1825, indiquent que les deux ingénieurs ont pris acte des encouragements en continuant à écrire ensemble et en gardant le même ordre des signatures. Ils ont pour point de départ des thèmes qui ont d'abord intéressé un seul d'entre eux, mais ils deviennent des productions qui feront connaître l'entité « Lamé et Clapeyron ».

Les deux articles sur les engrenages

L'article du binôme de 1824, intitulé « Mémoire sur les engrenages », est précédé en 1820 par un article de Clapeyron « Sur les engrenages ». L'étude géométrique des engrenages a été entreprise par Philippe de la Hire et elle a fait l'objet du Livre X des *Éléments de mécanique statique* de 1752 de Charles Étienne Louis Camus. Ce dernier montre que la forme des dents des engrenages tels que « la machine puisse être mue uniformément par une puissance constamment égale »⁷³ est en épicycloïde. Les engrenages font partie du programme de l'École polytechnique⁷⁴ en 1813-1814 et la question du frottement dans les engrenages figure⁷⁵ dans le *Traité élémentaire des machines* de 1811 d'Hachette, enseignant dans cette École. Un des « cours d'application » donné par le binôme à l'Institut est « relatif aux engrenages, à leur génération, au calcul de leurs frottements »⁷⁶.

Dans son article de 1820, Clapeyron précise son but, indique qu'il utilise le principe des forces vives et qu'il se sert d'une « démonstration synthétique »⁷⁷ :

Le but que je me suis proposé, dans mes recherches à ce sujet, a été de déterminer

la forme à donner aux dents d'engrenage pour rendre nul le frottement qu'elles exercent les unes sur les autres dans les machines ordinaires, inconvénient d'où résulte une perte de forces vives, inutilement employées à user les dents.

Il serait un peu long d'exposer la méthode analytique qui m'a conduit au résultat que j'expose ; une démonstration synthétique me conduira plus rapidement au but.

Il considère deux ellipses égales dont les foyers sont alignés au départ, l'une étant fixe et l'autre roulant sur la première et il démontre par un court raisonnement géométrique qu'il n'y aura alors aucun frottement exercé sur les surfaces de contact. Il en déduit que le mouvement communiqué d'une roue à une autre roue extérieure est sans frottement lorsque les dents se terminent par des arcs égaux d'ellipses égales. Puis il examine le cas d'une roue intérieure à une autre, la forme indiquée est alors celle d'arcs d'hyperboles, puis celui de deux roues.

L'article sur les engrenages du binôme de 1824 se veut plus général puisqu'il est destiné à « présenter d'une manière simple la théorie des engrenages et de résoudre diverses questions importantes pour leur emploi dans la pratique »⁷⁸. La théorie est exposée sur une vingtaine de pages et elle examine les mouvements pour des engrenages cylindriques et coniques. Le binôme affirme que « seul le calcul peut résoudre les questions formulées sur le plan théorique » et il utilise le calcul différentiel, en particulier dans l'application au calcul des frottements dans les engrenages qui clôt l'article. Le choix analytique peut être celui de Lamé, car, comme l'affirmait Clapeyron en 1820, la « méthode analytique » est « un peu longue ».

73. [Camus, 1752, 306].

74. [Dupont, 2000, 14].

75. [Hachette, 1811, 161-224].

76. [Lamé, 1851, 278].

77. [Clapeyron, 1820a, 113].

78. [Lamé et Clapeyron, 1824, 601].

Les deux articles sur les ponts suspendus

La situation est symétrique de celle pour les articles sur les engrenages car l'article cosigné en 1825 par le binôme fait suite à un article signé par Lamé seul la même année et intitulé « Sur les ponts de chaînes (de Russie) et sur la résistance des fers employés dans leur construction ». Ce dernier article se présente comme une lettre de Lamé à M. Baillet du 18-24 octobre 1824. Arsène Nicolas Baillet du Belloy⁷⁹ a été le professeur du cours d'exploitation des mines des deux ingénieurs à l'École des Mines, fonction qu'il

occupera jusqu'en 1832, et Lamé est resté en correspondance avec lui.

Des ponts suspendus ont été construits aux États-Unis et en Angleterre au tournant du siècle. Dans les *Annales de l'Industrie nationale et étrangère* de 1821, le polytechnicien et ingénieur François-Noël Mellet (Partie II) écrit un « Mémoire sur un pont suspendu en câbles de fer, de 500 pieds d'ouverture », à partir d'extraits de plusieurs mémoires anglais. Il explique les nombreux avantages de ces ponts et il fournit des données techniques sur les dimensions et sur les matériaux utilisés⁸⁰.

Le pont sur la rivière de Mersey dans le Mémoire de Mellet de 1821.

Les études et les constructions se succèdent dans les années 1820. Navier est envoyé en mission en Angleterre en 1821 et il publie en 1823 son *Rapport et mémoire sur les ponts suspendus*, dans lequel il vante ces ponts pour leur stabilité et la facilité de leur installation⁸¹. En 1822, l'ingénieur Marc Seguin projette un pont suspendu à câble métallique⁸² sur le Rhône, entre Tain et Tournon, et il le pré-

sente en 1824 dans son ouvrage *Des ponts en fil de fer*. Louis Becquey, alors directeur des ponts et chaussées, en fait envoyer des copies à tous les ingénieurs de son corps⁸³. L'ingénieur suisse Guillaume Henri Dufour réalise le premier pont à câble métallique à Genève avec Marc Seguin et Marc-Auguste Pictet⁸⁴ en 1823.

79. [École polytechnique, *Livre du centenaire*, III, 1897, 165].

80. [Mellet, 1821].

81. [Navier, 1823, xii-xiii].

82. [Seguin, 1824].

83. [Peters, 1987, 66-67].

84. [Peters, 1987, 70].

Les ponts suspendus dans l'ouvrage de Marc Seguin de 1824.

Le *Bulletin des sciences technologiques* de 1826 indique la construction de six ponts suspendus à Saint-Petersbourg⁸⁵. Un membre de l'Institut, le colonel Traitteur, a construit deux ponts suspendus, dits « ponts de chaîne » en 1824 dont il donne une description⁸⁶ dans un ouvrage de 1825, que Lamé ne mentionne pas dans son mémoire.

Lamé commence sa lettre à Baillet en mettant en avant la solidité et la légèreté des ponts suspendus par des chaînes, et en écrivant que, pour ces motifs, Clapeyron et lui-même ont décidé « de s'occuper de ce genre de construction ». Cependant, il choisit un genre épistolaire familier pour présenter les méthodes qui semblent redevables à chacun des deux ingénieurs : « comme les méthodes dont nous nous sommes servis sont très simples, suffisamment rigoureuses dans la pratique, et d'une application facile et prompte, j'ai pensé que vous en liriez avec plaisir l'exposé »⁸⁷. Cet « exposé » est écrit ailleurs à la première personne du singulier et l'article ne porte que le nom de Lamé. Il contient l'étude de l'équilibre du polygone qui représente les chaînes successives et

les expériences qui ont été menées sur une « machine à essayer les fers ».

Dans son mémoire de 1823, Navier a obtenu des formules d'équilibre d'un pont suspendu par des calculs différentiels. Deux ans plus tard, l'ingénieur des ponts et chaussées Nicolas René Désiré Le Moyne en déduit des tableaux d'un usage difficile⁸⁸. La méthode exposée par Lamé est bien différente de celle de Navier car elle s'appuie sur la mécanique et la géométrie. Il explique que le plancher d'un pont suspendu est soutenu par des tiges verticales équidistantes fixées par leur extrémité supérieure aux sommets de polygones en fer. Le calcul de la traction qui s'exerce en chacun des sommets peut être ramené au cas d'un polygone unique. Il note P la force qui s'exerce en chaque sommet et exprime la condition d'équilibre du polygone⁸⁹ :

L'équilibre de ce polygone exige que les composantes horizontales des tractions des deux côtés adjacents à chaque sommet soient égales entre elles et directement opposées l'une à l'autre, et que la somme algébrique des composantes verticales de

85. [*Bulletin des sciences technologiques*, 1826, V, 120].

86. [*Bulletin des sciences technologiques*, 1827, VIII, 355-356].

87. [Lamé, 1825, 312]

88. [Le Moyne, 1825], [*Bulletin des sciences technologiques*, 1826, VII, 120-121]

89. [Lamé, 1825, 314-315].

ces mêmes tractions soit égale et directement opposée au poids P , qui sollicite le sommet que l'on considère; de plus il faut que les tractions d'un même côté à ses deux extrémités soient égales entre elles.

Il appelle A la valeur commune des composantes horizontales et représente sa grandeur par la projection horizontale a de chaque côté du polygone. Il suppose que les extrémités du polygone sont au même niveau et il considère deux cas, selon que le nombre de côtés est impair ou pair. Dans le cas impair, la projection verticale du côté milieu est nulle et celle du côté adjacent représente P , il note h cette projection. Nous avons donc :

$$\frac{A}{P} = \frac{a}{h}.$$

D'après la condition d'équilibre, les projections verticales des autres côtés seront $h, 2h$, etc. Si $2n + 1$ est le nombre de côtés du polygone alors la flèche F du pont est $F = h + 2h + \dots nh$ et

$$h = \frac{2F}{n(n+1)}.$$

Une représentation de l'équilibre du polygone dans un pont suspendu (croquis d'Évelyne Barbin, d'après le mémoire cité en note 89).

D'après le théorème de Pythagore, les longueurs des côtés du polygone sont :

$$a, \sqrt{a^2 + h^2}, \sqrt{a^2 + 4h^2}, \dots, \sqrt{a^2 + n^2 h^2}.$$

La proportion ci-dessus permet d'obtenir la traction du côté milieu puis celle des autres côtés :

$$\frac{a}{h} P, \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h} P, \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{h} P, \dots, \frac{\sqrt{a^2 + n^2 h^2}}{h} P.$$

Lamé mène des calculs identiques dans le cas où n est pair, puis il donne des applications. L'article se termine par « etc. », ce qui signifie que la suite viendra dans un article ultérieur.

Cependant, le second article n'a pas le même titre et il est signé par Lamé et Clapeyron. Il est présenté comme une « Description d'un pont suspendu de 1022 pieds d'ouverture » projeté par M. Bazaine et par MM. Lamé et Clapeyron. L'article est écrit à la première personne du pluriel : « Dans la première lettre que nous avons eu l'honneur de vous écrire relativement aux ponts suspendus [...] »⁹⁰. Mais, Lamé ayant présenté la théorie dans le premier article signé par lui seul, le second article est effectivement une simple description.

L'article de Lamé seul sera republié, toujours à son seul nom, sous le titre « Mémoire sur les ponts suspendus », dans le *Journal des voies de communication* en 1826. Une note de bas de page indique que l'article est identique à l'extrait de la lettre de Baillet écrite « par Mrs les lieutenants-colonels Lamé et Clapeyron »⁹¹, ce qui semble contredire sa signature. Pourtant les deux articles de 1825 et de 1826 sont un peu différents, en particulier parce que le dernier mentionne plusieurs ingénieurs, autres que Clapeyron. Alors que

90. [Lamé et Clapeyron, 1825, 265].

91. [Lamé, 1826a, 51].

dans les premières pages de l'article de 1825 Lamé citait Clapeyron, dans celui-ci il est question du colonel Traitteur, qui a construit deux ponts de chaînes et une « machine pour s'assurer les différents fers de Russie, décrite sous le nom de sidéro-mètre ». De même, la « note théorique », intitulée « Calcul des tensions et des dimensions des chaînes d'un pont suspendu », cite maintenant le mémoire de Navier sur les ponts suspendus. Enfin,

Lamé précise que les « expériences à essayer les fers » ont été confiées à une commission, composée de Traitteur, Lamé et le capitaine Bougaïsky, et il décrit le sidéro-mètre de Traitteur destiné à tester les fers en traction. L'absence du nom de Clapeyron corrobore une signature du seul Lamé, nonobstant la note étrange en bas de page. Lamé a-t-il voulu associer Clapeyron ? Était-il prévu que l'article soit signé des deux noms ?

Le sidéro-mètre du colonel Traitteur (mémoire cité en note 91).

En 1826, André-Guillaume Henry publie dans le *Journal des voies de communication* un long « Mémoire sur l'emploi du fer dans les ponts suspendus »⁹² à propos des qualités des différentes espèces de fer. Lamé ne le cite pas mais il reviendra sur le sujet dans ce

journal en 1828 avec un article de dix pages, intitulé « Résultats d'expériences sur les fils de fer de Russie, dans lequel il conclut que « les fils de fer russes sont plus résistants que les fils de fer étrangers et cela dans une proportion assez forte »⁹³.

Des problèmes de construction aux situations d'équilibre (1826-1827)

À partir de 1826, le binôme n'écrit plus dans les *Annales des Mines*, mais dans le *Journal des voies de communication* de l'Institut de Saint-Petersbourg, qui paraît à partir de juillet 1826. De 1826 à 1828, Clapeyron y écrit deux articles, Lamé en écrit trois, et le binôme signe trois articles. Parmi tous ceux-ci, deux articles

sont repris des *Annales des Mines*: celui de Lamé seul sur les ponts suspendus de 1825 et celui du binôme sur la stabilité des voûtes de 1823. Deux nouveaux articles sont signés par le binôme dans le *Journal des voies de communication* en 1826 et 1827, ils concernent des situations d'équilibre.

92. [Henry, 1826].

93. [Lamé, 1828a, 60].

Les polygones funiculaires : un mémoire en deux parties

Le « Mémoire sur la construction des polygones funiculaires » est publié en deux parties en 1826 et 1827. Les polygones funiculaires ont été introduits dans la *Spartostatique* de Simon Stevin, traduite en français en 1634. Dans la *Nouvelle mécanique ou statique* de Pierre de Varignon de 1687, parue en 1725, tout comme dans les « Éléments de mécanique statique » du *Cours de mathématique* de 1752 de Camus, qui a été élève de Varignon⁹⁴, l'équilibre d'un polygone funiculaire est exprimé par des proportions. Camus considère une corde $ABCD$ fixée en deux points A et B , où sont suspendus en C et D deux poids P et Q , et les intersections N et M des prolongements de AB et DC avec CQ et BP . Il montre que

$$P : Q = CN : BM,$$

c'est-à-dire que le rapport de P à Q est identique au rapport de CN à BM . Camus donne des constructions géométriques qui permettent d'obtenir les tensions sur les côtés du polygone funiculaire, similaires à celles que propose le binôme.

Le polygone funiculaire chez Camus
(Cours de mathématique de 1752).

Il n'est pas certain que Clapeyron et Lamé aient connu l'ouvrage de Camus. En revanche, ils ont pu lire le *Traité élémentaire de mécanique* de Louis-Benjamin Francœur de 1800, car la quatrième édition de 1807 mentionne qu'il est « ordonné pour les élèves de l'École polytechnique »⁹⁵. Ce traité contient une étude des polygones funiculaires où la condition d'équilibre de Camus et de Varignon est exprimée en utilisant la trigonométrie. Le même type de condition est utilisé par Poisson, dans son *Traité de mécanique*⁹⁶ de 1811, et par Louis Poinot, dans les *Éléments de statique*⁹⁷ destinés aux lycées et réédités en 1811.

Francœur a été élève à l'École centrale des travaux publics à sa création en 1794 et il dédie son livre à Laplace. Il considère un polygone $P'M'M''$, etc. et P' , P'' , etc. des puissances qui font avec une demi-droite quelconque AX des angles α' , α'' , etc. Il nomme a' , a'' , etc. les angles que forment les directions des côtés du polygone avec AX et t' , t'' , etc. les tensions sur les côtés $P'M'$, $P''M''$, etc. Il traduit analytiquement la condition d'équilibre en chaque point M' d'un polygone funiculaire par⁹⁸:

$$\begin{aligned} P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + t' \cos \alpha' &= 0, \\ P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + t' \sin \alpha' &= 0. \end{aligned}$$

Le polygone funiculaire chez Francœur
(Traité élémentaire de mécanique de 1800).

94. [Chatzis, 2004, 13].

95. [Francœur, 1807, np].

96. [Poisson, 1811, 185-186].

97. [Poinot, 1811, 253-254].

98. [Francœur, 1807, 99].

L'étude du polygone funiculaire repose sur un ensemble de calculs analytiques. Il semble bien que le binôme fasse allusion à ce type de calculs au début de leur mémoire⁹⁹:

Lorsqu'on connaît les forces qui doivent être appliquées aux sommets d'un polygone funiculaire, les longueurs et l'ordre de ses côtés, enfin la position respective de ses deux extrémités fixes, la forme statique de ce polygone n'a plus rien d'arbitraire. En effet la mécanique analytique indique le moyen de conclure des données qui précèdent les angles du polygone, la direction des côtés extrêmes et l'intensité des pressions ou tractions exercées sur les points fixes. Cette détermination exige des calculs longs et pénibles, et devient même impraticable pour des polygones ayant un grand nombre de côtés [...].

Le binôme mentionne ensuite l'article de Lamé sur les ponts suspendus avant d'indiquer que « un de nous (Clapeyron) a été conduit aux constructions qui font le principal objet de cette note, en cherchant à déterminer les éléments nécessaires à la rédaction d'un projet de pont suspendu d'une forme particulière »¹⁰⁰. Les constructions attribuées à Clapeyron conjuguent mécanique et géométrie. Sa méthode s'appuie sur l'application de l'algèbre à la géométrie prescrite par Lamé dans son *Examen* huit ans plus tôt, qui permet de simplifier l'expression de l'équilibre d'un polygone funiculaire. Le polygone funiculaire est rapporté à deux droites perpendiculaires EA_1 et A_1C_1 . Les données du problème étant les forces $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, la flèche F égale à EA_1 et les abscisses $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ des sommets du polygone $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, il s'agit de déterminer les distances $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, qui séparent les points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Toutes les forces qui agissent sur une moitié du polygone sont remplacées par une force unique

T horizontale qui permet d'écrire l'équilibre des tractions et des compressions s'exerçant autour de chaque sommet :

- pour A_1 : $Ta_1 = P_1 x_1$;
- pour A_2 : $T(a_1 + a_2) = P_1 x_1 + P_2 x_2$ donc $Ta_2 = P_2 x_2$;
- pour A_3 : $T(a_1 + a_2 + a_3) = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3$ donc $Ta_3 = P_3 x_3$, etc.

L'équilibre autour du point E s'écrit :

$$TF = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots P_n x_n$$

donc

$$T = \frac{\sum P_k x_k}{F}$$

La construction du polygone funiculaire (croquis d'Évelyne Barbin, d'après le mémoire cité en note 99).

Ces équations permettent de remplacer les calculs par une construction graphique simple, utile aux constructeurs¹⁰¹ :

Ce qui précède donne le moyen de construire graphiquement un polygone funiculaire, dont les sommets sont sollicités par des forces verticales données, lorsqu'on connaît ses extrémités, son sommet inférieur, et les projections orthogonales de ses côtés.

99. [Lamé et Clapeyron, 1826c, 35].

100. [Lamé et Clapeyron, 1826c, 37].

101. [Lamé et Clapeyron, 1826c, 44].

Cette construction et les formules très simples qui y conduisent, permettent de déterminer avec promptitude et facilité tous les éléments nécessaires à la rédaction d'un projet de pont suspendu, quelles que soient sa forme, son étendue et l'inégalité de ses différentes parties.

Dans la seconde partie du mémoire, parue en 1827, le binôme expose une méthode graphique simple et générale qui « contient à elle seule presque toute la théorie des polygones funiculaires »¹⁰². Ils considèrent n

lignes consécutives $f_0f_1, f_1f_2, \dots, f_{n-1}f_n$, qui correspondent en grandeur et en direction aux n forces $F_1, F_2, \dots, F_n$ et deux lignes f_0A, f_nA parallèles aux côtés extrêmes du polygone et proportionnelles aux pressions exercées aux extrémités E et E' du polygone funiculaire. Ils expliquent que chaque diagonale Af_k issue de A est parallèle aux côtés C_kC_{k+1} du polygone funiculaire et qu'elle représente la traction éprouvée par ce côté. Cette traction fait équilibre à la pression Af_0 supportée par E et aux forces $F_1, F_2, \dots, F_k$. Ce polygone remarquable est appelé par le binôme « polygone secondaire » de pôle A .

Le polygone secondaire de pôle A (croquis d'Éveline Barbin, d'après le mémoire cité en note 102).

Dans le cas où les forces $P_1, P_2, \dots, P_n$ agissant sur les sommets sont parallèles, la donnée de la traction horizontale T permet d'obtenir toutes les tractions s'exerçant sur chaque côté. Il suffit de prendre une ligne horizontale AT représentant T et de porter sur une demi-droite verticale issue de T des segments successifs égaux $T_0T_1 = P_1, T_1T_2 = P_2, \dots$ car alors, les segments $AT_1, AT_2, \dots, AT_n$, représenteront les tractions exercées sur les côtés. Le binôme fournit plusieurs corollaires de ce « théorème » et diverses applications avant de conclure¹⁰³ :

Le théorème sur les polygones secondaires et leurs pôles, que nous avons énoncé dans le paragraphe 17, et dont

nous avons donné plusieurs corollaires, nous paraît jeter un nouveau jour sur la théorie des polygones funiculaires, dont l'énoncé contient presque toute la démonstration, et qui sont infiniment plus fertiles en applications que beaucoup d'autres théorèmes plus difficiles à démontrer.

La construction graphique du polygone est bien adaptée aux élèves ingénieurs qui n'ont plus besoin ainsi d'utiliser des expressions analytiques. Le polygone que le binôme appelle secondaire figure dans la *Nouvelle mécanique* de Pierre Varignon¹⁰⁴ parue en 1725 et dans le *Cours de mathématiques* de Camus de 1752.

102. [Lamé et Caheyron, 1827a, 45].

103. [Lamé et Clapeyron, 1827a, 55].

104. [Bénard, 2009, 118].

*Le polygone des tensions dans le Cours
de Camus de 1752.*

Le « Mémoire sur la construction des polygones funiculaires » du binôme, paru en 1828 dans le *Journal du génie civil*, ne contient que la première partie du mémoire. La seconde partie ne figure pas dans ce *Journal* en 1829 et 1830 et elle a pu rester méconnue, mais elle est citée chez des auteurs allemands à la fin du siècle, dans l'ouvrage historique sur les machines théoriques¹⁰⁵ de Christian Moritz Rühlmann de 1885 et dans le cours de statique de construction¹⁰⁶ de Georg Christoph Mehrtens de 1905.

La résolution graphique des problèmes de degré trois et quatre par Lamé

Dans un article de 1826, Lamé donne une résolution graphique des problèmes du troisième et du quatrième degré. Il commence par indiquer que « le tracé des projets de construction présente une foule de problèmes de géométrie qu'il est plus avantageux de résoudre graphiquement au moyen de la règle et du compas, que par l'analyse

algébrique, surtout lorsque le calcul conduit à des équations finales très compliquées »¹⁰⁷. Tous les problèmes ne sont pas constructibles à la règle et au compas et il propose donc « un autre genre de tâtonnement ». Il s'agit en fait de la « neusis », attribuée à Archimède, qui consiste à intercaler un segment de longueur donnée entre deux lignes à l'aide d'une règle marquée par deux points¹⁰⁸. Selon sa manière favorite, Lamé énonce le problème général qui peut être résolu à l'aide d'une règle marquée, puis il donne des applications à la trisection d'un angle, à la construction d'un polygone régulier de quatorze côtés, à la duplication du cube et à la recherche de la normale d'une ellipse. Toutes ces applications sont géométriques mais Lamé poursuit¹⁰⁹ :

Ces recherches sont immédiatement applicables à différentes questions qui intéressent particulièrement les ingénieurs. On aura l'occasion de les appliquer, dans un des numéros prochains de ce journal à la solution d'un problème intéressant relatif au tracé des routes secondaires destinées à l'approvisionnement des chaussées.

Bazaine donne une telle application dans le *Journal des voies de communication* en 1827 dans un « Mémoire sur la détermination des distances moyennes pour le transport des matériaux » pour construire une chaussée d'après les procédés de John Loudon McAdam présentés en 1819. Une longueur de route déterminée devant être fournie en matériaux par un nombre déterminé de carrières dont les positions sont données, le problème consiste à minimiser le coût de transport de chaque « sagène cube » (unité de volume russe) de ces matériaux. Cette question demande de résoudre un système d'équations dont il observe que la solution

105. [Rühlmann, 1885, 473].

106. [Mehrtens, 1905, 432].

107. [Lamé, 1826b, 37].

108. [Barbin, 2014, 118-119].

109. [Lamé, 1826b, 46]

rigoureuse se ramène à la construction de l'intersection d'une circonférence et d'une hyperbole données. Il indique alors qu'on peut substituer à cette construction un moyen pratique extrêmement simple en marquant sur une règle une longueur donnée¹¹⁰.

Clapeyron et Lamé accordent une importance à leurs articles, en vertu de leurs applications pratiques pour les travaux d'ingénieurs. Ainsi, comme d'autres membres de l'Institut, ils republient plusieurs articles, parus d'abord dans le *Journal des voies de communication*, dans le *Journal du génie civil, des sciences et des arts*, créé en juillet 1828 et destiné aux différents corps d'ingénieurs, mais aussi à des entrepreneurs de divers corps de métiers et à des artistes. Nous y trouvons, en 1828 et 1829, deux articles de Lamé, un article de Clapeyron et deux articles du binôme, sur les voûtes¹¹¹ et sur les polygones funiculaires¹¹². Leur parution dans ce *Journal* assure une publicité à ces articles auprès d'un large lectorat, car comme l'indique son « prospectus »¹¹³:

Pour nous, notre tâche est de recueillir et de publier périodiquement toutes les nouvelles découvertes et toutes les améliorations qui tendront à perfectionner et à simplifier les constructions civiles, de manière que toutes les personnes qui s'en occupent puissent trouver dans notre ouvrage tout ce qui peut les intéresser, sans qu'elles soient obligées de recourir aux divers ouvrages qu'on publie chaque jour; qui par leur étendue et leur prix ne sont pas à la portée de la majorité des lecteurs.

Le problème des moindres distances

Comme dans l'article de Lamé de 1826 sur les problèmes du troisième et du quatrième degré, le problème des moindres distances est résolu en 1827 par le binôme de manière graphique. Les deux ingénieurs établissent une « analogie singulière et remarquable » entre des problèmes de la statique et des problèmes de moindres distances afin de résoudre ces derniers par « des procédés d'un genre nouveau », ainsi que de nombreuses questions. Cette analogie a déjà été exploitée par Lamé dans son *Examen* de 1818 pour résoudre des problèmes géométriques. En 1827, le binôme évoque des problèmes économiques¹¹⁴:

Le choix des centres de communication, politiques ou commerciaux, l'approvisionnement des armées, et même l'art militaire en général, l'établissement des mines, des usines, des manufactures, et l'approvisionnement des routes, donnent lieu à des problèmes relatifs aux moindres distances, qu'il serait presque toujours impossible d'entreprendre avec l'unique secours de l'analyse algébrique, et qui sont complètement résolus par les procédés que nous allons développer.

Le binôme énonce d'abord le problème général de la « théorie des moindres distances », qui consiste à déterminer les positions de points tels que la somme des longueurs des segments joignant ces points multipliés par des coefficients donnés soit la plus petite possible. En utilisant la théorie des infiniment petits, enseignée à l'École polytechnique, il montre que cette condition est satisfaite si la somme algébrique des écarts infiniment petits entre les points multipliés par les coef-

110. [Bazaine, 1827].

111. [Lamé et Clapeyron, 1829].

112. [Lamé et Clapeyron, 1828].

113. [*Journal du génie civil*, 1828, I, 2].

114. [Lamé et Clapeyron, 1827b, 26-27].

ficients est nulle. Il explique que cette équation générale, dite « principe des moindres distances », est celle qui résulte du « principe des vitesses virtuelles » si on suppose que les points sont attirés l'un vers l'autre par des forces respectivement proportionnelles aux coefficients donnés. Le principe des vitesses virtuelles figure dans le *Traité de mécanique* de Poisson de 1811, qui fait suite à ses cours à l'École polytechnique. Poisson fait intervenir des déplacements infiniment petits et il énonce que, si des forces P, P', P'' , etc. sont en équilibre alors la somme de ces forces multipliées respectivement par les vitesses virtuelles p, p', p'' , etc. estimées selon leurs directions est nulle¹¹⁵ :

$$Pp + P'p' + \text{etc.} = 0.$$

Le binôme décrit des systèmes mécaniques qui matérialisent la situation, mais qui

seraient « d'un emploi long et difficile dans la pratique » à cause des frottements et des erreurs sensibles. Cependant, « on sera forcé de convenir que dans l'état d'imperfection où l'analyse algébrique se trouve encore de nos jours, le mode de solution dont il s'agit ici est le seul qui convienne à la question proposée »¹¹⁶. Ainsi, pour résoudre le cas plus simple où tous les points seraient donnés, sauf un seul qu'il s'agirait de déterminer, il suffit de placer à chaque point fixe une poulie verticale tournante et d'enrouler autour de la poulie un fil auquel est suspendu un poids proportionnel au coefficient correspondant à ce point, et d'attacher les extrémités libres de tous les fils à un seul et même anneau mobile. Alors, le système abandonné à lui-même arrivera à un état de repos tel que cet anneau occupera la position du point recherché.

*Le système pour le problème des moindres distances
(croquis d'Évelyne Barbin, d'après le mémoire cité en note 116).*

La matérialisation proposée dans l'article est déjà présente dans l'*Examen* de Lamé de 1818. Elle peut être rapprochée de la « balance funiculaire »¹¹⁷ des *Éléments de mécanique statique* de 1752 de Camus, qui

permet d'obtenir un poids Q à partir d'un poids P connu. Ces deux poids P et Q sont attachés aux points B et C d'une corde fine suspendue en deux points fixes A et D . Lorsque l'équilibre est réalisé, on attache en A

115. [Poisson, 1811, 233].

116. [Lamé et Clapeyron, 1827b, 30].

117. [Camus, 1752, 40-41].

et D deux cordons qui permettent de repérer les intersections N et M des prolongements de AB et CD avec CQ et BP . La mesure de CN et BM permet d'obtenir Q grâce à la proportion $CN : MB = P : Q$.

La « balance funiculaire » de Camus
(Cours de mathématiques 1752).

Lamé et Clapeyron appliquent ce mode de solution au problème de placer une usine destinée à traiter des minerais métalliques extraits de différentes mines situées dans des lieux donnés. Ils imaginent des conditions à remplir, par exemple que « la position de cette usine, soit celle de la plus grande économie possible dans le prix des transports »¹¹⁸. Puis ils donnent des applications diverses, pour obtenir les positions de centres d'approvisionnement et de quartiers généraux des armées, pour trouver l'emplacement de « la capitale d'un nouvel empire » selon l'emplacement des autres villes et des états voisins, et celui de la ferme centrale d'une vaste entreprise agricole de sorte à faciliter l'exportation des produits agricoles, etc. Ils concluent l'article en écrivant :

Nous prions le lecteur de ne pas perdre de vue, avant de porter un jugement sur l'objet de ce mémoire qu'il donne un moyen, si non exact, au moins très approché, de résoudre une infinité de problèmes qu'il serait impossible d'entreprendre par l'analyse algébrique, tant à cause de la complication des équations auxquelles ils conduiraient, que par la difficulté d'exprimer dans le calcul des données totalement discontinues.

Cet article ne passe pas inaperçu. Il fait l'objet d'un compte rendu de deux pages signé C. S. dans le *Bulletin des sciences mathématiques*¹¹⁹ de 1829, qui indique « les autres applications intéressantes et nombreuses qu'ils [les auteurs] font de cette méthode de solution mécanique » et qui affirme qu'il avait déjà remarqué « l'usage de la statique pour résoudre des problèmes de ce genre » dans des articles parus dans les *Annales mathématiques* en 1823. L'auteur est le mathématicien Charles Sturm, qui a suivi des cours au Collège de France et à la Sorbonne. Il écrit que le problème est résolu à l'aide d'une « méthode mécanique », d'un principe de la statique. Dans son article de 1823, « Recherches analytiques, sur une classe de problèmes de géométrie dépendant de la théorie des maxima et minima »¹²⁰, Sturm a considéré le problème général de trouver un point M telle qu'une fonction connue F , liant les distances de M à des points donnés, à des courbes données et à des surfaces données, soit un maximum ou un minimum. Puis il ramène à ce problème la situation d'équilibre d'un point M sollicité par des forces. Les calculs sont analytiques et bien éloignés des raisonnements du binôme.

Le compte-rendu de Sturm montre que, contrairement à ce qui a été affirmé¹²¹, le *Journal des voies de communication* n'est pas

118. [Lamé et Clapeyron, 1827b, 32].

119. [*Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, 1829, XI, 327-328].

120. [Sturm, 1823].

121. [Grattan-Guinness, 1993].

inconnu en France et que les deux auteurs font bien œuvre ici de mathématiciens. Remarquons que le problème de la « théorie des moindres distances » a attiré l'attention de mathématiciens, dont Fermat. Notons aussi que les applications données par le binôme ne relèvent pas d'une préoccupation liée aux avantages des chemins de fer. Il serait plus pertinent de les situer dans le contexte du Cercle de philosophie et d'économie politique de Raucourt, fréquenté par le binôme.

L'analyse physico-mathématique (1828-1831)

Dans les années 1828-1831, Clapeyron et Lamé écrivent trois mémoires sur des problèmes physiques en mettant en œuvre des calculs qui relèvent de ce que Lamé appelle en 1829 « analyse physico-mathématique »¹²² ; le premier concerne la résistance des matériaux, le second la propagation de la chaleur et le troisième le refroidissement d'une sphère liquide. Le premier et le troisième sont cosignés par le binôme et le second par Lamé seul. Les trois mémoires sont présentés à l'Académie des sciences respectivement en 1828, 1829 et 1830, aucun ne sera publié dans le *Journal des voies de communication*.

L'équilibre intérieur des corps solides homogènes

Le « Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes », envoyé à l'Académie des sciences en septembre 1828, sera publié dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* en 1831, précédé du rapport des académiciens Poinsot et

Navier. Ce mémoire a une portée différente des mémoires précédents du binôme, par son ampleur puisqu'il occupe environ 80 pages, par ses méthodes car il repose sur le calcul différentiel, et par son actualité dans le milieu scientifique. Clapeyron et Lamé indiquent d'abord l'importance de connaître la loi suivant laquelle des forces, qui se font équilibre, acquièrent un degré suffisant d'intensité pour que le corps solide, après avoir changé de forme d'une manière plus ou moins sensible, finisse par se briser.

Leibniz, Jacques Bernoulli, Euler et, plus récemment, Lagrange se sont intéressés au problème de la résistance et de l'élasticité des corps¹²³. Dans les années 1820, la théorie mathématique de l'élasticité s'élabore avec des travaux de Poisson et de Fresnel¹²⁴. En 1827, des recherches concurrentes¹²⁵ sont présentées, par Navier dans son « Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques » devant l'Académie des sciences¹²⁶, et par Louis-Augustin Cauchy dans ses *Exercices de mathématiques*¹²⁷.

Mais, pour le binôme, leur mémoire répond à des préoccupations pratiques d'ingénieurs¹²⁸ :

Les ingénieurs, dans la pratique de leur art, devant proportionner la force de leurs constructions, aux efforts qu'elles doivent supporter, ont sans cesse à s'occuper de considérations de ce genre ; aussi ont elles fixé depuis longtemps l'attention des géomètres, et la science s'est successivement enrichi de formules importantes sur la résistance des solides ; mais toutes celles qui sont parvenues à notre connaissance, fondées sur des hypothèses plus ou moins gratuites, et présentées comme l'expres-

122. [Lamé, 1833, 195].

123. [Lecornu, 1929, 44-45].

124. [Grattan-Guinness, 1990, 852-915].

125. [Grattan-Guinness, 1990, 968-1045], [Lecornu, 1929, 46-49].

126. [Navier, 1827].

127. [Cauchy, 1827, 42-56, 60-69, 108-111].

128. [Lamé et Clapeyron, 1831a, 150].

sion empirique faites par leurs auteurs [...] seront longtemps utiles aux gens de l'art mais une théorie doit leur servir de base.

Dans leur rapport à l'Académie des sciences, présenté le 29 septembre 1828, Poinso et Navier écrivent que la théorie qui fait l'objet de ce mémoire est nouvelle et qu'elle a attiré l'attention de plusieurs géomètres, qui ne s'accordent pas sur les notions. Ils ajoutent que les principes adoptés par les auteurs ne diffèrent point de ceux qui ont été pris par Navier lui-même dans un mémoire présenté en 1821, mais ils admettent qu'ils ont pu ne pas en avoir connaissance et ils reconnaissent au travail « un mérite distingué ». Ils demandent donc qu'il soit approuvé et imprimé dans le recueil des savants étrangers. Encore une fois, l'originalité des résultats de Clapeyron et Lamé est contestée mais leur écrit est cependant remarqué. Le rapport est à la fois sévère et bienveillant, peut-être parce que les deux ingénieurs jouent dans leur pré carré, mais qu'en même temps ils donnent raison aux travaux de l'un des rapporteurs.

Le mémoire comprend quatre sections. La première établit les équations différentielles du problème général en considérant que, dans un corps solide au repos homogène¹²⁹ :

Si en vertu d'une pression extérieure ou d'une force accélératrice qui vient à naître tout à coup, deux points pris au hasard se rapprochent ou s'éloignent l'un de l'autre, il en résulte entre ces deux molécules une action ou force répulsive dans le premier cas, et attractive dans le second, qui est une fonction de la distance primitive des deux points et de l'écartement, c'est-à-dire de la quantité dont ils sont rapprochés ou éloignés.

Dans la seconde section, consacrée aux théorèmes sur les pressions, le binôme donne une interprétation géométrique simple et remarquable des calculs en reconnaissant dans une des équations obtenues celle d'un ellipsoïde de centre M , à savoir que « si sur des directions des pressions ou tractions exercées sur tous les éléments plans, passant par le point M , on imagine des lignes prises à partir de ce point et respectivement proportionnelles à ces pressions, leurs secondes extrémités seront situées sur un ellipsoïde ayant M pour centre »¹³⁰. Cette invention, appelée aujourd'hui « ellipsoïde de Lamé », résulte du travail de visualisation des équations prônée en 1818 par Lamé.

La troisième section s'intéresse à des cas simples. Dans le cas d'un prisme le binôme fournit des valeurs numériques de la compressibilité cubique pour une pression de 100 atmosphères de neuf métaux, depuis le fer forgé, la fonte jusqu'au chêne et au sapin rouge. Dans le cas d'un cylindre, les deux ingénieurs confrontent leurs résultats à des expériences et ils introduisent ce que nous appelons aujourd'hui « le coefficient d'élasticité de Lamé ». Ils traitent ensuite le « cas d'une sphère dont toutes les parties gravitent les unes sur les autres »¹³¹, c'est-à-dire dont tous les points s'attirent avec une force qui est en raison inverse du carré de leurs distances. La quatrième section s'intéresse à des cas généraux : plan indéfini, solide limité par deux plans parallèles, cylindre indéfini. La complexité des équations obtenues, par exemple dans le second cas, est simplifiée à l'aide d'une technique proche de celle de la « notation abrégée » présentée en 1817 par Lamé. Pour les réduire en séries numériques, le binôme introduit un « genre particulier d'intégrales indéfinies que nous proposons de publier incessamment »¹³². En effet, dans un article du même Journal, le binôme pré-

129. [Lamé et Clapeyron, 1831a, 152].

130. [Lamé et Clapeyron, 1831a, 237-238].

131. [Lamé et Clapeyron, 1831a, 394].

132. [Lamé et Clapeyron, 1831a, 406-407].

sente un nouveau type de développement des fonctions en séries trigonométriques d'arcs imaginaires¹³³. Il y donne aussi un autre article mathématique sur des formules analogues aux séries de Taylor et de MacLaurin¹³⁴.

Le mémoire contient des innovations au plan des méthodes, qui seront reprises par Lamé

dans ses fameuses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* de 1852, et qui seront connues par la suite sous le nom de Lamé seul¹³⁵. Il introduit un problème nouveau, la déformation d'une sphère élastique sollicitée par des forces quelconques sur la surface, qu'on appelle « problème de Lamé »¹³⁶.

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{A} \iiint \left[\left(\frac{1}{2r} \frac{B-aA}{AB-ar} \cdot \frac{F-f}{4} + \frac{Az}{AB+ar} \cdot \frac{F+f}{4} \right) \frac{z}{s} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2r} \frac{A-aB}{AB+ar} \cdot \frac{F+f}{4} + \frac{Bz}{AB-ar} \cdot \frac{F+f}{4} \right) \frac{z}{s} \right] \frac{p}{r} s_z c_s \partial p \partial \mu \partial q \partial v, \\ v &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{A} \iiint \left[\left(\frac{1}{2r} \frac{B-aA}{AB-ar} \cdot \frac{F-f}{4} + \frac{Az}{AB+ar} \cdot \frac{F+f}{4} \right) \frac{z}{s} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2r} \frac{A-aB}{AB+ar} \cdot \frac{F+f}{4} + \frac{Bz}{AB-ar} \cdot \frac{F+f}{4} \right) \frac{z}{s} \right] \frac{q}{r} c_s s_z \partial p \partial \mu \partial q \partial v, \\ w &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{A} \iiint \left[\left(\frac{3}{2r} \frac{A+aB}{AB+ar} \cdot \frac{F+f}{4} - \frac{Bz}{AB-ar} \cdot \frac{F-f}{4} \right) \frac{z}{s} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{2r} \frac{B+aA}{AB-ar} \cdot \frac{F-f}{4} - \frac{Az}{AB+ar} \cdot \frac{F+f}{4} \right) \frac{z}{s} \right] c_z c_s \partial p \partial \mu \partial q \partial v. \end{aligned} \right.$$

Les équations dans le cas d'un solide limité par deux plans parallèles

Certains historiens ont avancé que les nouvelles préoccupations du binôme en 1828 ont été inspirées par la présence de Mikhaïl Ostrogradsky à Saint-Petersbourg, mais il est difficile de les suivre pour plusieurs raisons. En effet, le jeune mathématicien russe a quitté l'Université de Karkhov pour poursuivre des études à Paris en 1822, où il a assisté à des cours donnés à l'École polytechnique, à la Sorbonne et au Collège de France, dont ceux de Poinot, Fourier, Cauchy et Poisson. Le

6 novembre 1826, il présente un mémoire « Sur la propagation des ondes dans un bassin cylindrique » à l'Académie des sciences, donc sur une question différente de celle qu'aborde le binôme en 1828. Il rentre en Russie¹³⁷ au printemps 1828 alors que le rapport de l'Académie sur le mémoire du binôme date de septembre 1828. Par ailleurs, son nom n'est pas mentionné dans le mémoire de 1828, ni dans le rapport de l'Académie sur ce mémoire. Ostrogradsky fréquentera les

133. [Lamé et Clapeyron, 1830b].

134. [Lamé et Clapeyron, 1830a].

135. [Timoshenko, 1953, 116].

136. [Tazzioli, 2009, 67].

137. [Youschkevitch, 2008]

deux ingénieurs français¹³⁸ un peu plus tard et il est cité plusieurs fois par Lamé dans son mémoire présenté en mai 1829.

Une publicité du mémoire du binôme auprès des ingénieurs sera assurée grâce à la publication du rapport de Navier et Poisson dans le *Journal du génie civil*¹³⁹ de 1830. Il a été connu de James Clark Maxwell, dont les brouillons de 1849-1850 pour son ouvrage *On the equilibrium of elastic solids* contiennent un compte rendu détaillé et élogieux du mémoire (notre traduction): « les lois mathématiques (géométriques) de compressions et de pressions ont été complètement examinées, et elles sont démontrées avec une très grande élégance dans le mémoire très complet et très élaboré de MM. Lamé et Clapeyron »¹⁴⁰. Maxwell apprécie l'ingéniosité des méthodes pour le cas de la sphère, traité dans la cinquième section, mais il remarque ici que « bien que ce cas soit un bel exemple des méthodes de ces ingénieurs, cela ne peut jamais se produire car les particules ne peuvent pas être formées en une sphère solide avant de commencer à (attirer) graviter »¹⁴¹.

Le mémoire de Lamé sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres

Lamé présente à l'Académie des sciences le 8 mai 1829 un mémoire « Sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres, et principalement dans le prisme triangulaire régulier » qui sera publié dans le *Journal de l'École polytechnique* en 1833, école où il est devenu professeur de physique. Il situe son travail dans la perspective très générale de la recherche de lois pour des phénomènes différents de propagation: élasticité, lumière

et chaleur. Il rassemble ces phénomènes selon un point de vue mathématique, celui de la résolution des équations différentielles auxquelles ils conduisent. Il explique que les géomètres peuvent espérer aborder avec succès les intégrations de ces équations en « suivant une marche méthodique », c'est-à-dire en commençant par les équations les plus simples, celles qui expriment les lois du mouvement de la chaleur, et par le cas simple des corps de forme polyédrique. Parmi ceux-ci, le parallélépipède rectangle, à cause de « la simplicité des équations de sa surface », devrait être essayé le premier. Lamé cite alors Ostrogradsky, qui a le premier traité le cas du mouvement de la chaleur dans un prisme ayant pour base un triangle isocèle. Il se propose de trouver les lois dans le cas d'un prisme droit ayant pour base un triangle équilatéral¹⁴².

Dans l'*Examen* de 1818, Lamé insistait sur la nécessité d'accoupler la géométrie et l'analyse et sur l'importance d'observer la symétrie des calculs. Ces aspects méthodiques sont mis en œuvre dans le mémoire, quand Lamé commente sa démarche¹⁴³:

La nécessité de choisir des coordonnées qui permettent de transporter dans les équations, la symétrie que présente la forme du prisme rectangulaire droit à base équilatérale, m'a conduit à un moyen nouveau de représenter les intégrales particulières de l'équation différentielle du mouvement de la chaleur dans les corps solides, moyen qui semble pouvoir être très utile dans les recherches que l'on entreprendra par la suite sur les polyèdres en général. L'application que j'en ai faite à la question dont il s'agit fournit des équations très symétriques, et en quelque sorte

138. [Gouzévitch, 2009, 25].

139. [*Journal du génie civil*, 1830, VII, 312-314].

140. [Maxwell, 1990, 136].

141. [Maxwell, 1990, 142].

142. [Lamé, 1833, 194-195].

143. [Lamé, 1833, 196].

indépendantes de la position des axes coordonnés. C'est cette symétrie et cette indépendance qui forment les traits caractéristiques de mon travail.

Ainsi, il passe de la symétrie géométrique du solide à des formules symétriques, puis à un système de coordonnées curvilignes avec lequel il peut travailler aisément et indépendamment d'un système a priori de coordonnées rectilignes. Avec « ce moyen nouveau », il propose une méthode qui est générale parce qu'elle est susceptible de s'appliquer à tous les phénomènes de propagation. Cette méthode sera, avec d'autres notions introduites par lui plus tard, au départ de ses « coordonnées curvilignes »¹⁴⁴ exposées dans les *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* de 1859.

Le mémoire, de près de 60 pages, est divisé en trois parties. Dans les deux premières, il traite les cas de refroidissement du prisme rectangulaire par communication ou par rayonnement. Dans la troisième partie, il passe au refroidissement de divers polyèdres : prisme triangulaire irrégulier, tétraèdre irrégulier, sixième partie du cube puis vingt quatrième partie du cube. Le passage au tétraèdre est obtenu par Lamé en interprétant géométriquement une formule, ce qui est une « caractéristique de son travail » déjà présente dans le mémoire précédent du binôme et dans bien d'autres.

La solidification par refroidissement d'un globe liquide

Dans le mémoire « Sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide », présenté à l'Académie des Sciences en 1830 et paru dans les *Annales de chimie et de physique* en 1831, le binôme explique que la température intérieure du globe terrestre augmentant au

fur et à mesure que l'on s'éloigne de la surface, il est permis de croire que la matière de ce globe est à l'état de fusion à une certaine profondeur. La question soulevée est donc celle de « déterminer les circonstances physiques et variables qui se présenteraient dans les différentes parties d'une sphère, d'abord liquide, qui se refroidirait dans l'espace et se solidifierait successivement à sa surface »¹⁴⁵. Sur six pages, le mémoire présente la méthode générale à suivre pour résoudre ce problème, sa mise en œuvre et les résultats obtenus dans un cas particulier. Une note fournit, sans exposer les détails des calculs, les équations différentielles obtenues dans ce cas et leurs intégrales.

Les lois du refroidissement de la Terre, lorsque le globe est entièrement solide, ne sont pas les mêmes lorsque le noyau intérieur est fluide. Le problème examiné demande de prendre en compte quatre équations différentielles, celle qui lie les températures des différents points de la partie déjà solidifiée, celle pour la surface extérieure et fixe, celle pour la surface intérieure et mobile qui sépare les parties solide et liquide, et enfin, celle qui exprime qu'à la surface de séparation la température est égale à celle de la solidification du liquide intérieur. La troisième équation contient deux fonctions, la première qui exprime les températures et la seconde qui représente l'épaisseur de la partie solide. Lamé écrit pour le binôme¹⁴⁶ :

Les méthodes employées jusqu'à présent, dans la théorie analytique de la chaleur, nous semblent insuffisantes pour déterminer simultanément les deux fonctions qui se présentent ici, pour intégrer complètement les équations différentielles d'après les circonstances données de la question physique. En essayant de lever ces difficultés, nous sommes parvenus, M. Clapeyron et moi, à résoudre un cas par-

144. [Guitart, 2009].

145. [Lamé et Clapeyron, 1831b, 251].

146. [Lamé et Clapeyron, 1831b, 252].

ticulier qui nous semble devoir éclaircir la route à suivre pour trouver une solution générale.

Le cas traité est caractérisé par trois hypothèses : 1) le globe est composé d'une seule substance, 2) la croûte qui se forme a une épaisseur assez petite pour être considérée dans les calculs comme une masse liquide homogène terminée par un plan, 3) la surface sphérique mobile qui sépare la croûte solide de la masse liquide est constamment à la température de congélation de ce liquide. Dans ce cas, l'épaisseur de l'enveloppe solide augmente proportionnellement à la racine carrée du temps écoulé depuis le commencement de la solidification et la température v d'un point quelconque de la croûte solide est fonction de sa profondeur x et du temps écoulé t :

$$v = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{4k}} dy.$$

L'examen de ce type de problème sera poursuivi par le physicien et mathématicien austro-hongrois Joseph Stephan, qui s'intéresse à l'évolution d'une séparation entre solide et liquide et qui publie en 1891 un mémoire sur la formation des glaciers en mers polaires¹⁴⁷.

Le mémoire sur la solidification d'un globe liquide a été lu le 10 mai 1830 devant l'Académie des Sciences par Lamé seul¹⁴⁸. Celui-ci est arrivé à Paris fin avril 1830 et il y restera jusqu'au 11 juin avant de rejoindre l'Angleterre, où il est chargé d'une mission d'étude sur les innovations techniques et industrielles. Pendant ce séjour parisien, il va rencontrer plusieurs sommités scientifiques, mais aussi le saint-simonien Prosper Enfantin et Auguste Comte¹⁴⁹. En Angleterre, il se rend dans de

nombreuses villes pour visiter des ateliers de constructions de machines, comme des locomotives, des mines et des usines métallurgiques (Partie II). À son retour, il effectue un séjour de deux mois, de fin août à mi-octobre, à Paris, Lyon et à Marseille, où il visite des ponts, des arsenaux et des usines.

Les méthodes, des liens entre enseignements théoriques et applications pratiques

La question des méthodes est explicite dans les écrits de Clapeyron et de Lamé. Certes, cette question est d'importance dans tout écrit scientifique, mais il y a avec eux un « discours sur les méthodes ». Le plus souvent ils justifient le choix de la méthode qu'ils vont suivre parce qu'elle permet des solutions plus simples ou plus générales. Connaissant l'intérêt précoce de Lamé pour les méthodes, nous pouvons penser que celui-ci a orienté le binôme sur ce terrain.

Nous examinons les méthodes de Clapeyron et Lamé dans le contexte dans lequel ils travaillent, comme ingénieurs chargés de cours et de travaux à l'Institut des voies de communication. Dans leur *Plan d'écoles, générale et spéciales* de 1833, ils indiquent « qu'ils étaient principalement chargés de professer » et de suivre les projets des élèves ingénieurs, des ponts ou des écluses. Pourtant, certains historiens¹⁵⁰ lisent leurs travaux de cette époque comme ceux des « savants » qu'ils seront et négligent la différence de génération entre eux et leurs aînés, les Navier et les Poisson. Dans les années 1820-1831, les deux polytechniciens ne sont pas des « savants » faisant œuvre d'ingénieurs, ce sont alors des ingénieurs et des enseignants.

147. [Stephan, 1891].

148. [*Revue bibliographique pour servir de complément aux Annales de sciences naturelles*, 1830, XXI, 80].

149. [Jeanson, 1998, 48-54].

150. [Grattan-Guinness, 1993].

Les cours à l'Institut de Saint-Pétersbourg s'étalent sur six ans et englobent les enseignements des classes préparatoires, de l'École polytechnique puis de l'École des ponts et chaussées. Clapeyron et Lamé ont suivi 600 élèves pendant leurs six années d'études puis quand ils devenaient jeunes ingénieurs. Ils racontent cette expérience à leur retour en France en 1833 dans leur *Plan d'écoles, générale et spéciales* (Partie II). Ils écrivent qu'un tiers des élèves comprenaient avec beaucoup de rapidité les cours de mathématiques spéciales, mais¹⁵¹ :

Arrivés aux mathématiques transcendantes, le progrès de la presque totalité d'entre eux s'arrêtait tout à coup de manière à désespérer tous les efforts de leurs professeurs qui ne pouvaient que les forcer à apprendre par cœur des séries de calcul et de formules dont ils ne comprenaient ni le sens ni l'étendue [...]. Mais dans les sciences d'applications, dans le cours de construction par exemple, les nationaux reprenaient leur marche rapide et progressive. Un grand nombre d'entre eux atteignaient, surtout dans l'art du dessin linéaire, un degré de perfection extraordinaire.

Le cours de la classe de « mathématiques transcendantes » comprend l'analyse infinitésimale tandis que le dessin linéaire consiste à effectuer des constructions géométriques pour répondre à des problèmes. Dans son manuel de 1819, *Le dessin linéaire, d'après la méthode de l'enseignement mutuel*, Francœur écrit que « le dessin est un art qu'il faut savoir lire, pour concevoir les objets dont l'exécution a été commandée d'après un modèle tracé, et écrire, pour rendre ses idées et les faire comprendre aux autres »¹⁵². Puisque que pour Clapeyron et Lamé, il « faut

étudier les dispositions naturelles de chaque individu, pour assigner le genre d'éducation qui leur convient », ils ont pu considérer que les constructions géométriques étaient ce qui convenaient à des jeunes gens qui excellaient dans le dessin linéaire et qui avaient des difficultés avec l'analyse. Le choix de méthodes de résolution géométriques ou graphiques, qualifiées de simples ou de très simples, est aussi celui que le binôme opère dans ses articles de 1829 à 1827.

Lamé précise en 1851 comment leurs trois cours sur les mathématiques, la mécanique et la théorie des machines étaient reliés¹⁵³ :

Dans cette école, le temps consacré aux études scientifiques était plus limité qu'il ne l'est en France; par exemple, il fallait parcourir toute la mécanique rationnelle en trente leçons; c'était bien peu. Pour utiliser le mieux possible le temps assigné, nous avons à peu près réduit le cours à la connaissance du principe des vitesses virtuelles, et de celui des forces vives, en multipliant leurs applications sur des sujets nombreux.

La restriction des principes à deux d'entre eux permet de construire la mécanique rationnelle comme une théorie et d'accroître le nombre d'applications pratiques. Ces principes, en particulier celui des forces vives, permettent d'accéder à une plus grande généralité et d'unifier les traitements des diverses applications. Cette démarche est proche des conceptions de Lazare Carnot et d'Hachette. Notons que Bazaine, pour faire du principe des vitesses virtuelles une base fondamentale de la mécanique, en donne une démonstration¹⁵⁴ dans un ouvrage édité à Saint-Pétersbourg en 1832. Les deux principes cités par Lamé, avec celui du levier, sont ceux que le binôme utilise dans leurs articles.

151. [Clapeyron et Lamé, 1833, 17-18].

152. [Francœur, 1819, 1-2].

153. [Lamé, 1851, 278].

154. [Bazaine, 1832].

Pour relier les trois cours et répondre aux goûts de leurs élèves, les deux ingénieurs ont pu associer la géométrie et la mécanique. Dans leurs articles, cette association prend la forme d’une méthode que nous appelons mécanico-géométrique. Elle consiste à utiliser un principe mécanique pour interpréter un problème de manière géométrique puis à résoudre celui-ci, en général par l’algèbre. Cette méthode a obtenu un franc succès en 1823 pour le problème de la stabilité des voûtes quand les rapporteurs écrivent de la solution que « la marche de l’analyse est conduite avec adresse et élégance ». Dans les années 1820-1827, l’usage de cette méthode est tellement fréquent qu’elle peut caractériser alors le style du binôme.

Dans son texte de 1851, Lamé indique que leur enseignement a pris une autre forme¹⁵⁵ :

Cependant nous n’étions pas satisfaits, nous cherchions à jeter les bases de la théorie mathématique de l’élasticité, et notre travail sur l’équilibre intérieur des corps solides indique tous les efforts que nous avons faits, pour éviter l’empirisme et ses funestes conséquences.

De même, en 1828, le binôme oriente ses travaux vers des problèmes d’ordre physique et a recours à des calculs analytiques. Dans la période de 1828 à 1831, les deux articles du binôme et celui de Lamé seul relèvent d’une méthode commune que nous appelons physico-mathématique en suivant la terminologie de Lamé. Les auteurs énoncent d’abord un problème qui se veut général puis mènent les calculs propres à le résoudre. Ensuite, après avoir constaté l’impossibilité de résoudre les équations différentielles obtenues, ils proposent de résoudre des cas pratiques qui sont choisis pour simplifier les calculs mathématiques. Cependant, les études de ces cas particuliers permettent de trouver des procédures qui seront généralisables. Le mémoire « Sur l’équilibre intérieur des corps solides homogènes » est typique de ce point de vue, car c’est pour résoudre des cas particuliers qu’ils introduisent des méthodes qui n’en dépendent pas et qui sont fécondes en général. De même, le mémoire sur le refroidissement présente une méthode générale qui est aussitôt considérée dans un cas particulier, pour lequel les auteurs obtiennent une équation remarquable par sa simplicité.

Méthode	Sujet	Auteur	Année	Outils
Mécanico-géométrique	Bateaux à vapeur	C	1820	Principe des forces vives
	Engrenages (1)	C	1820	Principe des forces vives
	Stabilité des voûtes	L & C	1823	Principe du levier Composition géométrique
	Ponts suspendus (1)	L	1825	Composition géométrique des tractions
	Polygone funiculaire	L & C	1826	
	Moindres distances	L & C	1827	Principe des vitesses virtuelles
Physico-mathématique	Angles des cristaux	L	1819	Calcul des coordonnées
	Engrenages (2)	L & C	1824	Calcul différentiel
	Équilibre intérieur	L & C	1831	
	Solidification	L & C	1831	
	Propagation de la chaleur	L	1833	

Les méthodes dans les travaux du binôme (1819-1831)

155. [Lamé, 1851, 278].

La méthode mécanico-géométrique semble due aux deux ingénieurs. Dès 1818, Lamé exhibe un usage de la mécanique pour les problèmes des minima et maxima, mais cet usage est attribué à Clapeyron pour les ponts suspendus et le polygone funiculaire. Tandis que le passage au calcul algébrique ou différentiel pour construire une théorie générale semble devoir surtout à Lamé. Elle est exprimée dans son article sur les cristaux et dans l'article du binôme sur les engrenages¹⁵⁶ de 1824, où elle est opposée à la « démonstration synthétique » de Clapeyron dans l'article sur le même sujet en 1820.

Dans son mémoire sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres de 1829, Lamé caractérise son travail par la mise en œuvre d'une méthode spécifique. En effet, quand il écrit que la symétrie et l'indépendance par rapport à un repère « forment les traits caractéristiques de mon travail », il indique que la possibilité d'envisager ensemble tous les phénomènes de propagation passe par une nouvelle pratique scientifique. Ce qu'il appellera « physique mathématique » est le résultat d'un effort de généralité et d'unification qui ne suppose pas une subordination d'une science à l'autre, mais une dialectique entre physique et mathématique¹⁵⁷. Dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* de 1852, il réduira toute la physique mathématique à trois chapitres : la théorie de l'électricité statique, la théorie de la chaleur et la théorie de l'élasticité¹⁵⁸.

Les mémoires de 1828 et 1829 relèvent d'une pratique calculatoire faisant appel à une visualisation des calculs pour repérer des

symétries et pour opérer des abréviations. Il y a tout lieu de penser que cette virtuosité dans les calculs doit beaucoup à Lamé. Dans une lettre à son ami Picard écrite en août 1829, Enfantin écrit¹⁵⁹ :

Je suis charmé d'apprendre par vous que Clapeyron et Lamé n'ont pas cessé de couvrir les étincelles saint-simoniennes dont nous avons essayé de les pénétrer, et je compte beaucoup sur vous, quoique vous en disiez, pour exciter l'incendie ; [...] que Lamé fasse comme à l'ordinaire, qu'il vérifie ou redresse par le calcul les prévisions de Clapeyron, et vous, soyez entre eux deux pour entretenir le mouvement alternatif de l'analyse et de la synthèse : avec une pareille trinité vous pourrez aller loin ; l'école sera réellement représentée à Saint-Petersbourg.

D'après Enfantin, Clapeyron et Lamé seraient deux pôles d'un « mouvement alternatif de l'analyse et de la synthèse », le premier faisant des prévisions et le second vérifiant celles-ci par le calcul. Cette affirmation laisse de côté aussi bien la démonstrativité des figures géométriques de Clapeyron que l'inventivité des calculs analytiques de Lamé. Il y aurait plutôt lieu de voir dans leur « association », « l'association créatrice de l'analyse et de la géométrie »¹⁶⁰ prônée par Lamé dans son *Examen* de 1818. De fait, les travaux des deux ingénieurs mettent en avant un autre mouvement alternatif, celui du général et du particulier, qui vise à la fois à édifier des conceptions théoriques en généralisant un problème et à répondre à des problèmes pratiques en particularisant un résultat théorique.

156. [Lamé et Clapeyron, 1824, 605].

157. [Barbin, 2013].

158. [Barbin et Guitart, 2013].

159. [Saint-Simon et Enfantin, 1865, 66-67].

160. [Barbin, 2009b].