Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

39 | 2005

André-Louis Cholesky (1875-1918)

Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

André-Louis Cholesky

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/sabix/529>

DOI : 10.4000/sabix.529

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 1 décembre 2005

Pagination : 81 - 95

ISBN : ISSN N° 2114-2130

ISSN : 0989-30-59

Référence électronique

André-Louis Cholesky, « Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 39 | 2005, mis en ligne le 07 décembre 2010, consulté le 10 décembre 2020. URL :

<http://journals.openedition.org/sabix/529> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.529>

Ce document a été généré automatiquement le 10 décembre 2020.

© SABIX

Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

André-Louis Cholesky

- 1 La solution des problèmes dépendant de données expérimentales, qui peuvent dans certains cas être soumises à des conditions, et auxquelles on applique la méthode des moindres carrés, est toujours subordonnée au calcul numérique des racines d'un système d'équations linéaires. C'est le cas de la recherche des lois physiques ; c'est aussi le cas de la compensation des réseaux géodésiques. Il est donc intéressant de rechercher un moyen sur et aussi simple que possible d'effectuer la résolution numérique d'un système d'équations linéaires.
- 2 Le procédé que nous allons indiquer s'applique aux systèmes d'équations symétriques auxquels conduit la méthode des moindres carrés ; mais nous remarquerons tout d'abord que la résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues peut très facilement se ramener à la résolution d'un système de n équations linéaires symétriques à n inconnues.
- 3 Considérons en effet le système suivant :

[illegible]

- 4 Effectuons la transformation lineaire représentée par le système :

[illegible]

- 5 Le système d'équations I donnant les n inconnues γ se trouve remplacé par le système III donnant les n inconnues λ permettant, à l'aide de II, de calculer les valeurs des γ .

[illegible]

- 6 On a d'une façon générale :

$$\text{IV) } \begin{aligned} A_p^p &= \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_k^p)^2 \\ A_p^q &= \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k^p \alpha_k^q. \end{aligned}$$

- 7 Le coefficient A_p^q est obtenu en faisant le produit des coefficients des lignes p et q du système I qui se trouvent dans la même colonne et en faisant la somme des produits ainsi obtenus dans les n colonnes, ce qu'on peut exprimer symboliquement en disant que A_p^q est le produit de la ligne p par la ligne q .
- 8 L'ordre des facteurs pouvant être inversé dans chaque produit, on voit immédiatement que

$$A_p^q = A_q^p$$

- 9 dans le déterminant du système III les termes symétriques par rapport à la diagonale
sont égaux, autrement dit le système d'équations aux X est symétrique.
- 10 Proposons-nous donc de résoudre un système d'équations de la forme III.
- 11 Remarquons d'après ce qui précède que le système d'équations II si l'on y supposait les
 γ connus serait un système d'équations aux λ équivalent au système III. On aurait donc
un moyen de résoudre le système III si l'on pouvait trouver un système I permettant de
calculer facilement les γ .

- 12 C'est ce qui arrive si dans le système I, la première équation contient seulement γ_1 , la 2ème γ_1 et γ_2 , la 3ème γ_1, γ_2 et γ_3 , ainsi de suite. On peut en effet calculer ainsi tous les γ successivement à partir de γ_1 . Le problème est donc ramené à la recherche du système.

$$V) \begin{cases} \alpha_1^1 \gamma_1 & + C_1 = 0 \\ \alpha_1^2 \gamma_1 + \alpha_2^2 \gamma_2 & + C_2 = 0 \\ \alpha_1^3 \gamma_1 + \alpha_2^3 \gamma_2 + \alpha_3^3 \gamma_3 & + C_3 = 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_1^n \gamma_1 + \alpha_2^n \gamma_2 + \alpha_3^n \gamma_3 + \dots + \alpha_n^n \gamma_n & + C_n = 0. \end{cases}$$

- 13 Ce système étant en effet trouvé le problème devient très facile, puisque le système II est remplacé par le système VI qui permet de calculer les λ de proche en proche à partir de λ_n .

$$VI) \begin{cases} \alpha_1^1 \lambda_1 + \alpha_1^2 \lambda_2 + \dots + \alpha_1^n \lambda_n - \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2^2 \lambda_2 + \alpha_2^3 \lambda_3 + \dots + \alpha_2^n \lambda_n - \gamma_2 = 0 \\ \alpha_3^3 \lambda_3 + \dots + \alpha_3^n \lambda_n - \gamma_3 = 0 \\ \dots + \alpha_n^n \lambda_n - \gamma_n = 0. \end{cases}$$

- 14 Nous calculerons facilement les coefficients α en partant des coefficients A du système III, en appliquant les relations générales IV) au système V. On voit ainsi qu'on peut calculer ligne par ligne tous les coefficients du système VI

$$\begin{array}{l}
 \text{1}^{\text{ère}} \text{ ligne} \\
 \text{2}^{\text{ème}} \text{ ligne} \\
 \text{les } \alpha_1 \text{ sont déjà} \\
 \text{connus par le calcul} \\
 \text{de la 1}^{\text{ère}} \text{ ligne} \\
 \text{p}^{\text{ème}} \text{ ligne} \\
 \text{Tous les } \alpha \text{ dont l'indice} \\
 \text{inférieur est plus petit} \\
 \text{que } p \text{ sont connus par} \\
 \text{le calcul des lignes} \\
 \text{précédentes.}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{ll}
 \begin{array}{l}
 A_1^1 = (\alpha_1^1)^2 \\
 A_2^1 = \alpha_1^1 \alpha_1^2 \\
 \dots\dots\dots \\
 A_p^1 = \alpha_1^1 \alpha_1^p \\
 A_n^1 = \alpha_1^1 \alpha_1^n
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 \text{d'où} \quad \alpha_1^1 = \sqrt{A_1^1} \\
 \alpha_1^2 = \frac{A_2^1}{\alpha_1^1} \\
 \alpha_1^p = \frac{A_p^1}{\alpha_1^1} \\
 \alpha_1^n = \frac{A_n^1}{\alpha_1^1}
 \end{array}
 \end{array}
 \right.$$

$$\left\{
 \begin{array}{ll}
 \begin{array}{l}
 A_1^2 = (\alpha_1^2)^2 + (\alpha_2^2)^2 \\
 A_3^2 = \alpha_1^2 \alpha_1^3 + \alpha_2^2 \alpha_2^3 \\
 A_p^2 = \alpha_1^2 \alpha_1^p + \alpha_2^2 \alpha_2^p
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 \alpha_2^2 = \sqrt{A_2^2 - (\alpha_1^2)^2} \\
 \alpha_2^3 = \frac{A_3^2 - \alpha_1^2 \alpha_1^3}{\alpha_2^2} \\
 \alpha_2^p = \frac{A_p^2 - \alpha_1^2 \alpha_1^p}{\alpha_2^2}
 \end{array}
 \end{array}
 \right.$$

$$\left\{
 \begin{array}{ll}
 \begin{array}{l}
 A_p^p = (\alpha_1^p)^2 + (\alpha_2^p)^2 + (\alpha_3^p)^2 + \dots + (\alpha_{p-1}^p)^2 + (\alpha_p^p)^2 \\
 A_p^q = \alpha_1^p \alpha_1^q + \alpha_2^p \alpha_2^q + \alpha_3^p \alpha_3^q + \dots + \alpha_{p-1}^p \alpha_{p-1}^q + \alpha_p^p \alpha_p^q \\
 \alpha_p^q = \frac{A_p^q - \alpha_1^p \alpha_1^q - \alpha_2^p \alpha_2^q - \dots - \alpha_{p-1}^p \alpha_{p-1}^q}{\alpha_p^p}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 \alpha_p^p = \sqrt{A_p^p - (\alpha_1^p)^2 - (\alpha_2^p)^2 - (\alpha_3^p)^2 - \dots - (\alpha_{p-1}^p)^2} \\
 q > p
 \end{array}
 \end{array}
 \right.$$

15 Quant au calcul des γ il s'effectue facilement à l'aide des équations V. On obtient

$$\begin{array}{rcl}
 (-\gamma_1) & = & \frac{C_1}{\alpha_1^1} \\
 (-\gamma_2) & = & \frac{C_2 - \alpha_1^2(-\gamma_1)}{\alpha_2^2} \\
 \dots & \dots & \dots\dots\dots \\
 (-\gamma_p) & = & \frac{C_p - \alpha_1^p(-\gamma_1) - \alpha_2^p(-\gamma_2) - \dots}{\alpha_p^p}
 \end{array}$$

- 16 ce qui montre que les coefficients $(-\gamma)$ qui figurent dans le tableau des équations VI) se calculent par rapport aux termes constants C du tableau III exactement de la même façon que les coefficients α par rapport aux A .
- 17 Les calculs peuvent être disposés d'une façon commode en un seul tableau. Les équations données étant symétriques, il suffit d'écrire dans le tableau les coefficients d'un seul côté de la diagonale, en-dessus par exemple.
- 18 Les équations transformées du système VI peuvent alors être disposées en dessous de la diagonale symétriquement placées par rapport aux équations données, chaque nouvelle équation occupant une colonne en dessous de la diagonale.
- 19 Les écritures se bornent à la transcription des coefficients α ; en effet le calcul d'un coefficient α de la forme

$$A_p^p = \sum_{k=1}^{k=p} (\beta_k^p \delta_k^p)$$

$$A_p^q = \sum_{k=1}^{k=p} (\beta_k^p \delta_k^q).$$

D'où l'on peut conclure que le système unique des coefficients α que l'on a employé précédemment est remplacé dans tous les autres modes de résolution par un double système de coefficients β et δ tels que l'on a toujours $\beta_p^q \delta_p^q = (\alpha_p^q)^2$.

Or les calculs s'effectuent nécessairement avec une précision limitée et on est amené pour éviter des erreurs [rayé et remplacé par "fautes"] et rendre le calcul aussi simple que possible, à calculer tous les nombres employés avec un nombre de décimales fixe. Il en résulte que les nombres α, β, δ sont affectés d'une erreur η dépendant des décimales négligées et indépendante de la grandeur du nombre calculé.

L'emploi de la quantité $(\alpha_p^q)^2$ dans les calculs correspond à l'introduction d'une erreur $2\alpha_p^q \eta$.

L'emploi de la quantité égale $(\beta_p^q \delta_p^q)$ correspond à l'introduction de l'erreur $(\beta_p^q + \delta_p^q) \eta$.

On sait que le produit $\beta_p^q \delta_p^q$ étant constant la somme de ses deux facteurs atteint son minimum lorsqu'ils sont égaux. L'erreur la plus faible que l'on puisse introduire est donc

$$2\alpha_p^q \eta.$$

- 27 Il en résulte que le mode de résolution des systèmes linéaires qui vient d'être exposé apparaît comme celui qui fournit la meilleure approximation des calculs. Cette propriété qui permet de réduire au strict minimum le nombre de décimales à employer dans les calculs, compense largement le petit inconvénient d'employer la racine carrée dans la résolution d'équations linéaires.
- 28 D'autant plus que la racine carrée peut être obtenue facilement et rapidement à l'aide de la machine à calculer par le procédé suivant complètement différent des procédés généralement indiqués par les fabricants de machines à calculer.
- 29 Soit à extraire la racine carrée d'un nombre N .
- 30 Supposons qu'on connaisse un nombre n voisin de la racine r cherchée. Soit pour fixer les idées
- 31 $r = n + \varepsilon$
- 32 $N = r^2 = (n + \varepsilon)^2 = n^2 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2$.
- 33 Si ε^2 est d'un ordre inférieur à la dernière décimale que l'on veut calculer, on a le droit d'écrire
- 34 $N = n^2 + 2n\varepsilon = n(n + 2\varepsilon)$
- 35 c'est à dire qu'en divisant N par n on a pour quotient
- 36 $n + 2\varepsilon$.
- 37 2ε représente l'excès de ce quotient sur le diviseur n et l'on obtient r en ajoutant à n la moitié de cet excès.
- 38 Pratiquement, il est avantageux d'avoir à sa disposition une table de carrés qui donne à première vue la racine carrée d'un nombre quelconque avec 3 chiffres significatifs exacts.

$$\frac{\varepsilon}{n^2} \text{ est alors inférieur à } \frac{1}{10^4}.$$

- 39 La première division donne la racine carrée avec 5 chiffres significatifs.

$$\frac{\varepsilon^4}{n^4} \text{ est inférieur à } \frac{1}{10^8}$$

- 40 donc la 2^{ème} division faite avec la racine a 5 chiffres exacts donnerait 9 chiffres significatifs exacts et ainsi de suite. On peut énoncer une règle simple en supposant que le nombre comporte une virgule placée à la droite du premier chiffre de gauche. Dans ces conditions chaque division double le nombre de décimales de la racine. A l'aide de ce procédé, un opérateur exercé obtient en quelques secondes la racine carrée d'un nombre de 5 chiffres avec le même nombre de chiffres exacts.

- 41 La méthode de résolution des systèmes linéaires qui vient d'être exposée a été complétée par l'adaptation du système de vérification indiqué par Gauss sous le nom de preuve par sommes.

- 42 La vérification est obtenue de la façon suivante : On juxtapose au terme constant C_p de l'équation de rang p un terme V_p donné par la relation

$$-V_p = A_1^p + A_2^p + \dots + A_n^p + C_p.$$

- 43 Dans ces conditions la somme des nombres inscrits dans la ligne p du système des équations est nulle. Si l'on traite V_p dans la résolution de la même façon que C_p , cette relation linéaire se maintiendra et sera encore vraie pour les coefficients α .

- 44 De plus il sera encore possible de vérifier le calcul des λ à partir du système des équations VI), car si l'on remplace dans les équations III les termes constants C par les termes de vérification V , l'opération équivaut à changer λ en $(1 - \lambda)$; le calcul des inconnues fait avec les V donne donc des valeurs λ' telles que $\lambda_p + \lambda'_p = 1$.

- 45 On peut en opérant comme il vient d'être dit réussir à coup sur et en peu de temps la résolution de systèmes d'équations très complexes.

- 46 La résolution d'un système de 10 équations à 10 inconnues peut être faite avec 5 chiffres exacts, en 4 à 5 heures, y compris la vérification des équations et le calcul des résidus.

- 47 On a résolu par cette méthode plusieurs systèmes dépassant 30 équations, et en particulier un système de 56 équations. Ce dernier cas fait partie d'un calcul de compensation des altitudes des chaînes primordiales de la triangulation de l'Algérie. En raison de l'importance des calculs et pour éviter l'encombrement, on a dû adopter une disposition spéciale, mais les calculs ont été conduits exactement comme il vient d'être dit.

- 48 Vincennes le 2 Décembre 1910

49 Signature

Pages manuscrites du chapitre sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

L'opération ci-dessus en effet terminée & finissant donnera pour point de l'opération II est remplacée par l'opération VI qui permet de calculer le λ de point en point à partir de λ_n .

$$\text{VI) } \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{array}$$

Nous calculons maintenant les coefficients α en partant des coefficients λ de l'opération III, en affectant les relations générales IV) de l'opération V. On voit ainsi qu'on peut calculer ligne par ligne tous les coefficients de l'opération VI.

$$\begin{array}{l} \text{1}^{\text{re}} \text{ ligne} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 = (\lambda_1^2)^2 \\ \lambda_2^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \\ \lambda_3^2 = \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ \lambda_4^2 = \lambda_1^2 \lambda_4^2 \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{l} \alpha_1^2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2} \\ \alpha_2^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \\ \alpha_3^2 = \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1^2} \\ \alpha_4^2 = \frac{\lambda_4^2}{\lambda_1^2} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{2}^{\text{de}} \text{ ligne} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 = (\lambda_1^2)^2 + (\lambda_2^2)^2 \\ \lambda_2^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_1^2 \\ \lambda_3^2 = \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \alpha_1^2 = \frac{\lambda_1^2 - (\lambda_1^2)^2}{\lambda_1^2} \\ \alpha_2^2 = \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^2}{\lambda_1^2} \\ \alpha_3^2 = \frac{\lambda_3^2 - \lambda_1^2 \lambda_3^2}{\lambda_1^2} \end{array}
 \end{array}$$

On voit ainsi qu'on peut calculer ligne par ligne tous les coefficients de l'opération VI.

$$\begin{array}{l} \text{3}^{\text{de}} \text{ ligne} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 = (\lambda_1^2)^2 + (\lambda_2^2)^2 + (\lambda_3^2)^2 \\ \lambda_2^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ \lambda_3^2 = \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \alpha_1^2 = \frac{\lambda_1^2 - (\lambda_1^2)^2 - (\lambda_2^2)^2}{\lambda_1^2} \\ \alpha_2^2 = \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_2^2 \lambda_3^2}{\lambda_1^2} \\ \alpha_3^2 = \frac{\lambda_3^2 - \lambda_1^2 \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \lambda_3^2}{\lambda_1^2} \end{array}
 \end{array}$$

On voit ainsi qu'on peut calculer ligne par ligne tous les coefficients de l'opération VI.

$$\begin{array}{l} \text{4}^{\text{de}} \text{ ligne} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 = (\lambda_1^2)^2 + (\lambda_2^2)^2 + (\lambda_3^2)^2 + (\lambda_4^2)^2 \\ \lambda_2^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_4^2 \\ \lambda_3^2 = \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 + \lambda_3^2 \lambda_4^2 \\ \lambda_4^2 = \lambda_1^2 \lambda_4^2 + \lambda_2^2 \lambda_4^2 + \lambda_3^2 \lambda_4^2 + \lambda_4^2 \lambda_1^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \alpha_1^2 = \frac{\lambda_1^2 - (\lambda_1^2)^2 - (\lambda_2^2)^2 - (\lambda_3^2)^2}{\lambda_1^2} \\ \alpha_2^2 = \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_2^2 \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \lambda_4^2}{\lambda_1^2} \\ \alpha_3^2 = \frac{\lambda_3^2 - \lambda_1^2 \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \lambda_3^2 - \lambda_3^2 \lambda_4^2}{\lambda_1^2} \\ \alpha_4^2 = \frac{\lambda_4^2 - \lambda_1^2 \lambda_4^2 - \lambda_2^2 \lambda_4^2 - \lambda_3^2 \lambda_4^2}{\lambda_1^2} \end{array}
 \end{array}$$

Quant au calcul de γ d'opération particulière à l'ordre de l'opération V, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (-\gamma) &= \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2} \\
 (-\gamma) &= \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \\
 (-\gamma) &= \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2} \\
 (-\gamma) &= \frac{\alpha_4^2}{\alpha_1^2}
 \end{aligned}$$

ce qui montre que les coefficients $(-\gamma)$ qui figurent dans la relation de l'opération VI) se calculent par rapport aux coefficients α de l'opération V.

[illegible]

On peut encore une règle simple en supposant
que le nombre constant est toujours placé à la droite des premières
chiffres de gauche. Dans ce cas, chaque division donne
le nombre des décimales de la racine.

Il s'agit de ce principe, on opérera avec l'Algorithme
quelques exemples de racines carrées et on verra de 5 chiffres sans
le nombre entier de chiffres écrits.

Le système de résolution des équations linéaires qui vient
d'être exposé est très compliqué par l'adaptation des systèmes de résolution
indiqués par Gauss ou le nom de Gauss par exemple.

La résolution est obtenue de la façon suivante : On part d'un
système constant C_p de l'équation de rang p on trouve V_p donné
par la relation $-V_p = h_p^2 + h_p^2 + \dots + h_p^2 + C_p$.

Pour ce système le nombre de nombres écrits dans la ligne p de
l'équation de rang p est nul. Si l'on écrit V_p dans la
résolution de la même façon que C_p , cette relation linéaire en
multiplication et on aura une nouvelle relation X .

On fera alors une petite de calcul de calcul
des X à partir de l'équation de l'équation V_p , car on aura
seulement dans la relation X le terme constant C par la
relation de résolution V_p , l'équation opérant à changer X
en $(X-X)$, le calcul de racines, fait par la V dans la
de valeur X telle que $X_p + X_p = 1$.

On peut se représenter comme il vient d'être dit
révisé à un point et en fait de temps la résolution de l'équation
d'équation de rang p .

La résolution d'un système de 10 équations à 10 inconnues
peut être faite ~~à la main~~ avec 5 chiffres écrits, car
il y a 5 heures, y compris la résolution des équations et le calcul
des résultats.

On a vu par cette méthode plusieurs autres
dépassant 30 équations, et en particulier un système de 10
équations. On donne un fait fait d'un calcul de comparaison.

La méthode des choses précédentes de la triangulation
de l'Algérie. Le nombre de l'équation de calcul et
pour cela l'écriture, on a des choses
équation linéaire, mais le calcul est-il calculé également
comme il vient d'être dit.

Vendredi 22 Octobre 1900

(Signature)

Archives de l'Ecole Polytechnique (Fonds A. Cholesky)