Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

44 | 2009

Gabriel Lamé (1795-1870) : Les pérégrinations d'un
ingénieur au XIX^e siècle

L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé

Évelyne Barbin

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/sabix/644>

DOI : 10.4000/sabix.644

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 1 octobre 2009

Pagination : 101 - 111

ISBN : ISSN N° 2114-2130

ISSN : 0989-30-59

Référence électronique

Évelyne Barbin, « L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 44 | 2009, mis en ligne le 21 mai 2011, consulté le 08 septembre 2020. URL : <http://journals.openedition.org/sabix/644> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.644>

Ce document a été généré automatiquement le 8 septembre 2020.

© SABIX

L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé

Évelyne Barbin

- 1 L'expression « association créatrice de l'analyse et de la géométrie » est employée par Gabriel Lamé dans le discours préliminaire des *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* de 1859. Lamé écrit :

Quand on médite sur l'histoire des mathématiques appliquées, on est effectivement conduit à attribuer leurs principales découvertes, leurs progrès les plus décisifs, à l'association de l'analyse et de la géométrie. Et les travaux, que produit l'emploi exclusif de chacun de ces instruments, apparaissent alors comme des préparations, des perfectionnements, en attendant l'époque qui sera fécondée par leur réunion. [...] Je regarde comme un devoir de respecter l'association créatrice de l'analyse et de la géométrie, lorsque j'exposerai la théorie des surfaces orthogonales [...]¹.

- 2 L'importance d'associer analyse et géométrie n'est pas nouvelle chez Lamé, puisqu'elle est très présente dans un autre ouvrage publié quarante ans auparavant, son *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*.

L'examen des différentes méthodes

- 3 L'ouvrage intitulé *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* paraît en 1818. Il fait sans doute suite aux cours particuliers donnés par le jeune polytechnicien. En effet, rappelons que Gabriel Lamé entre à l'École Polytechnique en 1814 à l'âge de 19 ans et que l'école est fermée en 1816. Il donne alors des cours particuliers. En décembre 1816, il présente le mémoire « Sur les intersections des lignes et des surfaces » à l'Académie Royale des Sciences, qui paraît² dans les *Annales de Mathématiques pures et appliquées* de 1816-17. Une partie de ce mémoire se retrouve dans l'ouvrage de 1818. En 1817, il est reçu à l'École des Mines.

- 4 L'ouvrage se présente bien comme un ouvrage d'enseignement, dans lequel Lamé prend délibérément un parti, celui d'enseigner la marche d'invention : « dans l'enseignement des sciences abstraites, la meilleure méthode à prendre ne serait-elle pas de suivre la marche de l'invention ?³ ». C'est ce que proposait Alexis Clairaut, quelques années auparavant, dans ses *Éléments de géométrie* de 1741. Comme son illustre prédécesseur, Lamé propose des problèmes à résoudre car « les mathématiques doivent leur accroissement à l'idée de perfectionner la solution des problèmes ». Mais pour lui, il s'agit d'abord de présenter des méthodes nouvelles. Avec cet ouvrage de méthodes et de problèmes, il initie un nouveau genre d'ouvrage qui se développera au XIX^e siècle. Comme il l'explique dans l'introduction, l'objectif est double : « classer les problèmes selon les ressemblances plus ou moins grandes de leurs moyens de solution » et « parvenir à un composé fini de moyens différents que l'on pourrait regarder comme généraux vu leurs nombreuses applications ». De ce point de vue, il faut rechercher une coordination des diverses branches des mathématiques : géométrie, géométrie descriptive, arithmétique, calcul infinitésimal, algèbre, analyse appliquée. Pour lui, la « coordination des diverses branches des Mathématiques en ferait mieux concevoir toute la richesse, toute l'importance⁴ ».
- 5 Lamé distingue l'analyse et la synthèse, en expliquant que la première est le guide des inventeurs, mais que la seconde permet la destruction des doutes. Cette distinction a reçu bien des significations dans l'histoire des mathématiques. Il se contente d'indiquer la nécessité de recourir à ces deux voies : « L'analyse éclaire ainsi la synthèse ; la synthèse, de son côté, éclaircit les passages, que l'analyse n'a pour ainsi dire qu'effleurés⁵ ». Mais il considère plus longuement la part de la géométrie et celle de l'algèbre dans la résolution d'un problème. Tandis que la première démontre les rapports des quantités considérées, la seconde détermine des quantités inconnues. La recherche d'un problème de géométrie est composée de trois parties : la mise en équations, la résolution des équations, et la vérification de la solution. Lamé précise que la géométrie s'occupe de la première et de la dernière de ces parties, tandis que l'algèbre se charge exclusivement de la seconde.
- 6 Un problème est central dans l'ouvrage, celui des intersections de lieux, en lien avec ce qui sera appelé, un peu plus tard, faisceaux de coniques et faisceaux de quadriques. L'ouvrage considère un grand nombre de problèmes se ramenant à des intersections de lieux comme : la caractérisation des types de quadriques par leurs équations, la théorie des transversales, la détermination de quadriques par des points donnés, la résolution des équations.

L'invention algébrique

- 7 Lamé explicite le travail algébrique, avec comme but d'en faire une opération inventive. Chez lui, le travail avec les lettres n'est pas du tout un travail aveugle. Au contraire, c'est un travail visuel, qui demande de regarder avec attention les équations pour inventer et voir des solutions.
- 8 Dans la méthode de l'application de l'algèbre à la géométrie, il faut, certes, mettre les problèmes en équations, c'est-à-dire les énoncer algébriquement. Mais il y a ensuite à savoir manier les équations obtenues de façon à obtenir des résultats prompts et satisfaisants. Cette partie de l'analyse n'est pas aisée. Mais, Lamé veut montrer que : « cependant la marche sûre et méthodique de cette analyse, la symétrie, la variété des

éliminations, conduisent à des équations finales où la réponse à la question, se trouve écrite⁶. Il insiste particulièrement sur deux aspects, où le recours à la visualisation des formules algébriques joue un rôle essentiel : le choix des notations et le recours à la symétrie des équations. Concernant la notation, il écrit :

La notation est à l'Analyse ce que l'arrangement et le choix des mots est à la clarté du style. Avec son secours, les calculs les plus longs deviennent une somme de transformations semblables, et il ne faut pour achever le tout, que la patience de répéter la partie principale. C'est avec de pareilles inventions que l'Analyse algébrique, si pénible dans son origine, est parvenue au point de donner des leçons de simplicité à la Géométrie.

- 9 Un soin très particulier doit être apporté aux choix des axes de coordonnées, car ceci peut simplifier les équations. Mais il ne faut pas pour autant que le choix de la simplicité détruise la symétrie, dont il faut toujours profiter : « si cette simplification de position anéantit cette même symétrie en détruisant les quantités qui pourraient la faire apercevoir [...], il vaut mieux placer les axes de coordonnées de manière arbitraire⁷ ». Nous trouvons donc, dès 1818, l'expression du rôle de la symétrie, qui jouera un rôle fondamental plus tard chez Lamé, et particulièrement dans l'ouvrage de 1859.
- 10 Lamé donne un exemple frappant de l'importance de la visualisation de la symétrie d'une formule. Il écrit que : « il arrive quelques fois qu'un problème mis en équation, établit une symétrie réelle entre les données et les inconnues. Cette symétrie remarquée, étudiée avec soin, met la solution demandée sous la puissance du calcul, pour ainsi dire au moment où il s'y attend le moins ».
- 11 Le problème consiste à construire un triangle équilatéral qui ait ses sommets sur trois circonférences concentriques de rayons donnés.

- 12 Lamé note x le côté du triangle ABC, O le centre du cercle et $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. L'angle BAC est égal à la somme ou à la différence des angles CAO et BAO. On a :

$$\cos CAO = \frac{x^2 + a^2 - c^2}{2ax} \quad \text{et} \quad \cos BAO = \frac{x^2 + a^2 - b^2}{2ax}$$

- 13 donc

$$\arccos \left(\cos = \frac{x^2 + a^2 - c^2}{2ax} \right) \pm \arccos \left(\cos = \frac{x^2 + a^2 - b^2}{2ax} \right) \pm \frac{\pi}{3} = 0$$

- 14 Or cette équation est symétrique en a et x . Par conséquent, si les trois conférences circonscrites avaient pour rayon b, c, x , alors a serait le côté du triangle demandé. Donc si on inscrit entre les circonférences de rayon b et c la droite $MN = a$ et si on construit un triangle équilatéral MNP (il y a deux solutions), alors $OP = x$.

Une méthode centrale : la « notation abrégée »

- 15 Comme le relève Gino Loria⁸, le principe qui deviendra la méthode de « notation abrégée » apparaît dans le mémoire⁹ de 1816 de Lamé, puis dans *l'Examen* de 1818. Il est repris dans un cadre plus général dans les articles d'Étienne Bobillier et de Julius Plücker, qui paraissent dans les *Annales de Gergonne* de 1827-1829. Or, Bobillier intègre Polytechnique en 1817 et Plücker séjourne à Paris de 1823 à 1825. Donc, l'un et l'autre ont pu connaître les écrits de Lamé. La méthode est ensuite présentée dans le *Analytisch-geometrische Entwicklungen* de Plücker de 1828-1831, puis dans les ouvrages de Salmon des années 1860, où elle fait l'objet d'un chapitre indépendant¹⁰. Gaston Darboux attribue la méthode de la « notation abrégée » à Bobillier et à Plücker¹¹. Aujourd'hui, elle est souvent associée au nom de ce dernier¹².
- 16 Le principe est énoncé en 1818 dans le cas général de la détermination des intersections de lieux, et il est ensuite appliqué à un grand nombre de problèmes se ramenant à des intersections de lieux. Ce sont des problèmes relatifs à des questions déjà connues, comme la théorie des transversales, la caractérisation des types de quadriques par leurs équations ou comme la résolution graphique des équations. Mais, des problèmes nouveaux sont aussi proposés, qui conduisent à des considérations de faisceaux de coniques et quadriques, de « polarisation » et de détermination de quadriques par des points.

Le principe de la notation abrégée

- 17 Le principe est énoncé comme « évident » dans le cadre de la recherche de l'expression analytique de « la communauté d'intersections des lieux géométriques » :
- Si l'on combine les équations de deux lieux géométriques d'une manière quelconque, l'équation résultante exprime un troisième lieu géométrique, sur lequel se trouve l'intersection des deux premiers. [...] Si l'intersection doit se trouver sur un troisième lieu, il doit exister une équation combinée de celles des deux premiers lieux qui exprimera le troisième lieu. Tout se réduit donc, à trouver de quelle manière doit s'effectuer cette combinaison¹³.
- 18 Il explique que si on considère trois lieux d'équations $E = 0$, $E' = 0$, $E'' = 0$, alors l'intersection des deux premiers satisfait : $mE + m'E' = 0$. Donc pour traduire que cette intersection se trouve sur le troisième lieu, il suffit d'identifier $mE + m'E'$ et E . En fait, le principe vaut si l'on suppose E, E' et E'' du premier degré ou bien si l'on suppose E ou E' du second degré et E'' du second degré au plus. C'est dans ces cas que Lamé l'utilise.
- 19 Ce principe permet de déduire sept problèmes conditionnels d'intersections de lieux, et des corollaires dont Lamé écrit : « les propositions suivantes, qui en dérivent aisément, peuvent conduire à la solution d'un grand nombre de problèmes curieux ; d'un principe qui n'est rien en lui-même, je déduis des corollaires dont l'utilité n'est pas incertaine¹⁴

». Nous résumons les problèmes dans le tableau ci-dessous indiquant quelle intersection est soumise à quelle condition :

problème	intersection	condition
I	trois droites	un même point
II	trois coniques	les mêmes points
III	trois plans	une même droite
IV	trois quadriques	une même courbe
V	quatre plans	un même point
VI	quatre quadriques	les mêmes points
VII	deux coniques	sur une même droite

20 Pour examiner la pratique de Lamé avec les équations et la mise en application du principe, nous prenons comme exemple les problèmes III et IV. Le premier demande de trouver les conditions nécessaires pour que trois plans se coupent suivant une même droite. Les équations des plans sont :

21 $ax + by + cz + d = 0$

22 $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

23 $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$

24 On obtient par « combinaison » la condition :

25 $am + a'm' = a''bm + b'm' = b''$

26 $cm + c'm' = c''dm + d'm' = d''$

27 Dans le problème IV, on cherche les conditions nécessaires pour que trois quadriques se coupent suivant une même courbe. Les quadriques ont pour équations :

28 $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0$

29 $a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2d'xy + 2e'xz + 2f'yz + 2g'x + 2h'y + 2k'z + l' = 0$

30 $a''x^2 + b''y^2 + c''z^2 + 2d''xy + 2e''xz + 2f''yz + 2g''x + 2h''y + 2k''z + l'' = 0$

31 On obtient par « combinaison » dix équations :

32 $am + a'm' = a''bm + b'm' = b''$

33 $cm + c'm' = c''dm + d'm' = d''$ etc...

34 et en les joignant :

35 $am + a'm' = a''dm + d'm' = d''$

36 $em + e'm' = e''gm + g'm' = g''$.

37 Par conséquent, d'après le résultat du problème III, cela indique que les trois plans d'équations

38 $ax + dy + ez + g = 0$

39 $a'x + d'y + e'z + g' = 0$

40 $a''x + d''y + e''z + g'' = 0$

41 se coupent suivant une même droite. Or ces équations sont celles des trois plans diamétraux, conjugués à des diamètres parallèles à l'axe des x, dans les trois quadriques. Lamé en déduit le théorème suivant : « Si trois quadriques se coupent suivant une même courbe, les plans diamétraux se coupent suivant une même droite ». Il ne parle pas ici des « polaires », qui feront l'objet des travaux de Poncelet¹⁵ et Gergonne après ceux de Brianchon. Cependant, cette droite est la polaire d'un point à l'infini du faisceau de quadriques. Nous parlerons ici de « polarisation » pour un

passage d'un faisceau de quadriques se coupant selon une même courbe à un faisceau de plans se coupant selon une même droite.

Caractérisation des types de quadriques par leurs équations

- 42 Lamé remarque que « cette manière de combiner les équations peut encore servir à exprimer la nature particulière de certains lieux géométriques ». Il examine quatre problèmes qui consistent à exprimer qu'une surface du second ordre est un cylindre, un cône, un plan et une surface de révolution. Gaspard Monge résout ce type de problèmes dans les *Applications de l'analyse à la géométrie à l'usage de l'École Impériale Polytechnique* de 1807. Mais les résolutions de Lamé sont à la fois plus simples et plus systématiques.
- 43 Pour exprimer la condition sur l'équation de la quadrique pour qu'elle soit une surface de révolution¹⁶, il introduit a, b, c les coordonnées de son centre et prend pour équation de la quadrique
1. $A(x-a)^2 + A'(y-b)^2 + A''(z-c)^2 + 2B(y-b)(z-c) + 2B'(x-a)(z-c) + 2B''(x-a)(y-b) + D = 0.$
- 44 Puis il considère une sphère centrée en ce centre d'équation
1. $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$
- 45 Cette sphère coupe la quadrique en deux cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de révolution. Il prend pour équation de l'axe :
- 46 $(x-a) = m(z-c)$
- 47 $(y-b) = n(z-c)$ et pour équations des deux plans :
- 48 $(z-c) + m(x-a) + n(y-b) = \alpha$
- 49 $(z-c) + m(x-a) + n(y-b) = \alpha.$
- 50 L'ensemble des deux plans a pour équation
1. $m^2(x-a)^2 + n^2(y-b)^2 + (z-c)^2 + 2n(y-b)(z-c) + 2m(x-a)(z-c) + 2mn(x-a)(y-b) = \alpha^2.$
- 51 Pour écrire que les trois lieux (1), (2), (3) ont même intersection par la méthode de combinaison, on multiplie (1) par une indéterminée P , (2) par Q et on les ajoute, puis on identifie avec (3). Lamé obtient la condition suivante sur l'équation (1) de la quadrique :
- 52 $BB''(A'' - A) = B'(B^2 - B'^2)$
- 53 $B'B''(A'' - A') = B(B'^2 - B''^2).$
- 54 Dans le traité de Monge, deux « manières » sont proposées pour résoudre ce problème¹⁷. Selon la première manière, Monge utilise le calcul différentiel pour écrire l'équation du plan méridien de la surface de révolution et celle du plan tangent. Puis il obtient une équation différentielle qui traduit que ces deux plans sont perpendiculaires. Selon la seconde manière, il faut exprimer que l'intersection avec un plan perpendiculaire à l'axe de révolution de la surface est un cercle dont le centre est sur l'axe. Pour cela, il introduit une fonction qui relie les termes constants de l'équation du plan perpendiculaire et de l'équation de sphères. Dans les deux cas, la solution passe par l'intrusion d'une analyse fonctionnelle, voire différentielle. Les procédés sont donc à la fois plus complexes et plus difficilement adaptables à d'autres problèmes du même type.

La théorie algébrique des transversales de Lamé

- 55 Lamé applique aussi sa notation abrégée en remarquant qu'elle est utile pour représenter par une seule équation l'intersection de deux figures géométriques :

En général, quand on doit considérer les intersections d'un ensemble de deux lignes droites avec des lieux géométriques du second degré, il est plus simple d'exprimer cet ensemble par une même équation [...]. Pour donner une preuve frappante de l'utilité de cette remarque, nous ferons voir avec quelle facilité l'Analyse peut démontrer les principes de la théorie des transversales¹⁸.

- 56 La théorie des transversales a été exposée par Lazare Carnot dans sa Géométrie de position¹⁹ de 1803 et dans l'Essai sur la théorie des transversales²⁰ de 1806. Lamé considère le problème suivant : si par un point fixe M sur le plan d'une section conique on mène deux sécantes, que l'on joigne par des droites les extrémités réciproques des cordes résultantes, quel sera le lieu géométrique de l'intersection M' de ces nouvelles sécantes ?

- 57 En notant les coordonnées du point M par a et b, les coordonnées du point M' par a' et b', alors l'équation de deux droites passant par M est
- 58 (1) : $(y - b)^2 + 2A(x - a)(y - b) + B(x - a)^2 = 0$
et l'équation des deux droites passant par M' est
- 59 (2) : $(y - b')^2 + 2A'(x - a')(y - b') + B'(x - a')^2 = 0$.
- 60 On prend pour équation de la conique
- 61 (3) : $y^2 + p x^2 = 2 q x$
- 62 Alors, par « combinaison » de (1) et (2) et par identification avec (3), on obtient :
- 63 $m + m' = 1, mA + m'A' = 0, mB + m'B' = p$
- 64 $mb + m'b' + mAa + m'A'a' = 0$
- 65 $mBa + m'B'a' + mAb + m'A'b' = q$
- 66 $mb^2 + m'b'^2 + 2mAab + 2m'A'a'b' + mBa^2 + m'B'a'^2 = 0$.
- 67 Lamé obtient ainsi que le lieu de M' est une droite d'équation :
- 68 $bb' + p aa' = q(a + a')$
- 69 qui est la « polaire » du point M. Il obtient donc un traitement analytique simple de la théorie des transversales et des polaires.

Problèmes d'intersection et polaires

- 70 Plus loin, Lamé pose le problème dans l'espace équivalent au précédent. En effet, il considère deux cônes et une quadrique ayant une intersection commune. Si le sommet

M' du premier cône est fixe et la quadrique est fixe, il demande quel est le lieu du sommet du deuxième cône M'' .

71 Les coordonnées des sommets sont notées (x', y', z') et (x'', y'', z'') et les équations des trois surfaces sont

72 $(1) (x-x')^2 + a (y-y')^2 + b (z-z')^2 + 2c (x-x')(y-y') + 2d (x-x')(z-z') + 2e (y-y')(z-z') = 0$

73 $(2) (x-x'')^2 + a' (y-y'')^2 + b' (z-z'')^2 + 2c' (x-x'')(y-y'') + 2d' (x-x'')(z-z'') + 2e' (y-y'')(z-z'') = 0$

74 $(3) p x^2 + q y^2 + r z^2 = 2 s x + 2 t y.$

75 Par combinaison, identification et élimination, il obtient l'équation d'un plan passant par M'' :

76 $p x' x'' + q y' y'' + r x' x'' = s (x' + x'') + t (y' + y'')$

77 La solution est l'équation du plan polaire du sommet (x', y', z') par rapport à la quadrique

Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie (1818)

L'invention de nouveaux problèmes

- 78 Ce qui est sans doute le plus notable, dans l'invention de la notation abrégée, est qu'elle permet d'introduire de nouveaux problèmes, ou, si on préfère, qu'elle met à la portée du géomètre la résolution de problèmes inédits²¹. En effet, Lamé propose six problèmes de « détermination des courbes et surfaces par la Géométrie descriptive ». Il écrit :

En appliquant aux lignes et surfaces du second degré, le moyen d'élimination que nous avons indiqué, nous avons déduit de la simple considération de quelques équations, la démonstration de plusieurs théorèmes qui peuvent servir à la solution complète des problèmes suivants²².

- 79 Les six problèmes consistent à déterminer une conique ou une quadrique soumise à passer par des points en nombre donné avec éventuellement une condition de coplanarité. Nous les résumons dans le tableau ci-dessous.

problème	courbe ou surface	passant par
I	parabole	4 points co-planaires
II	conique	5 points co-planaires
III	cône	8 points dont 5 co-planaires
IV	quadrique	9 points dont 5 co-planaires

V	quadrique	9 points dont 4 co-planaires
VI	quadrique	9 points quelconques

- 80 Lamé note que pour obtenir ces résultats, aucune propriété des lignes et des surfaces n'a été énoncée, la solution s'appuyant uniquement sur l'analyse. Il commente le type de problèmes qu'il a systématiquement parcouru et résolu :

Ne pourrait-on pas conclure de là, qu'un des principaux buts de l'étude des propriétés des lieux géométriques, est d'acquérir assez de connaissances sur les courbes et surfaces pour pouvoir les construire, ou du moins les déterminer complètement par la géométrie, lorsqu'on en donne un nombre suffisant de points²³.

- 81 Un nouveau problème est encore proposé dans la section suivante, qui est consacrée à la « résolution graphique des équations finies ». On sait que la résolution d'équations de degrés 3 et 4 s'obtient par intersection de deux coniques, et celle de degrés 5 à 8 par intersection de trois quadriques. Or l'intersection de deux cônes peut être « construite graphiquement », c'est-à-dire par les moyens de la géométrie descriptive, d'où le problème de ramener l'intersection de trois quadriques à celle de trois cônes.

- 82 Lamé cherche à caractériser une quadrique pour qu'elle soit un cône. Il exprime que le centre doit être sur la surface, en remarquant que les quatre équations suivantes doivent avoir lieu en même temps :

83 $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$

84 $Ax + B''y + B'z + C = 0$

85 $B''x + A'y + Bz + C' = 0$

86 $B'x + By + A''z + C'' = 0.$

- 87 En vertu des trois autres, la première s'écrit

88 $Cx + C'y + C''z + D = 0.$

- 89 Donc on obtient un système de quatre équations linéaires, dont la condition de résolubilité est une équation de degré 4. Par conséquent quatre cônes répondent au problème.

- 90 Ainsi, la condition pour qu'un cône passe par l'intersection de deux quadriques s'obtient en combinant les équations des deux quadriques :

91 $mE + m'E' = 0$

- 92 et en identifiant celle-ci avec un troisième surface qui soit un cône. Le rapport de m sur m' doit donc être solution d'une équation de degré 4, et par l'intersection de deux quadriques il passe quatre cônes. On en conclut que de degrés 3 à 8 ont une résolution graphique. Avec ce type de problèmes et de solutions, Lamé initie l'étude des faisceaux de quadriques²⁴. Il a montré qu'un faisceau ponctuel de quadriques contient quatre cônes.

La notation abrégée chez Bobillier

- 93 Deux articles de « *Philosophie mathématique* » d'Étienne Bobillier paraissent dans le tome 18 des Annales de Gergonne de 1827-28. Dans le premier article, intitulé « Essai sur un

nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue », Bobillier ne fait pas référence à Lamé et il annonce une nouveauté :

La méthode de recherche que nous allons faire connaître est susceptible d'applications nombreuses et variées que nous proposons de publier successivement. Nous choisirons, pour le présent, celles de ces applications qui, par leur simplicité, nous semblent les plus propres à en bien faire saisir l'esprit²⁵.

- 94 Le second, intitulé « Démonstration nouvelle de quelques propriétés des lignes du second ordre », donne de nouvelles applications :

Nous nous proposons, dans ce qu'on va lire, d'appliquer la méthode de recherche dont nous avons déjà fait l'essai dans un précédent article. C'est en examinant en effet comment cette méthode conduite à la découverte des vérités, déjà connues, qu'on pourra juger de ce qu'on peut en espérer dans la recherche des vérités bien plus nombreuses et plus importantes qui restent encore à découvrir²⁶.

- 95 Nous allons examiner le premier article qui concerne la figure simple du triangle. Comme chez Lamé, les résultats sont obtenus par des notations abrégées et par combinaisons d'équations.

Essai sur un nouveau mode de recherche

- 96 Bobillier note A, B, C trois fonctions linéaires en x et y, et il indique que l'équation est celle d'un triangle. Les côtés, les angles, les sommets sont désignés par ces trois lettres. Puis Bobillier considère trois constantes a, b, c, indéterminées et il indique que
- 97 $a BC + b CA + c AB = 0$
- 98 est une équation du second degré qui est celle de toutes les coniques circonscrites au triangle. En combinant les équations, il obtient aussi les tangentes à la conique aux sommets du triangle et l'équation du triangle circonscrit à la conique formé à partir de ces tangentes. Nous résumons les sept équations obtenues dans le tableau ci-dessous.

objet	équation	n°
triangle	$ABC = 0$	(1)
trois côtés	$A = 0, B = 0, C = 0$	(2)
trois angles	$BC = 0, CA = 0, AB = 0$	(3)
trois sommets	$B = 0, C = 0, A = 0$ $C = 0, A = 0, B = 0$	(4)
une conique circonscrite	$aBC + bCA + cAB = 0$	(5)
trois tangentes aux sommets	$bC + cB = 0, cA + aC = 0, aB + bA = 0$	(6)
triangle circonscrit	$(bC + cB)(cA + aC)(aB + bA) = 0$	(7)

- 99 Les intersections des côtés du triangle circonscrit avec les côtés opposés du triangle inscrit sont trois points d'équations (8) :
- 100 $bC + cB = 0 \quad A = 0$
- 101 $cA + bA = 0 \quad B = 0$
- 102 $aB + bA = 0 \quad C = 0$
- 103 Une droite passant par le premier point a pour équation
- 104 $m(bC + cB) + nA = 0$ ou
- 105 $nA + mcB + mbC = 0$
- 106 Or pour $m = a$ et $n = bc$, la droite d'équation (9)
- 107 $bcA + caB + abC = 0$ passe par les trois points : ils sont donc alignés.
- 108 Par ailleurs, les équations (6) prises deux à deux sont celles des sommets du triangle circonscrit. Par élimination de la lettre commune, on obtient l'équation (10) :
- 109 $cB - bC = 0, \quad aC - cA = 0, \quad bA - aB = 0$
- 110 Ces équations sont celles de droites concourantes, ce sont les trois droites joignant les sommets du triangle inscrit aux sommets du triangle circonscrit.
- 111 Bobillier en déduit deux théorèmes qu'il présente en colonnes, à la manière de Gergonne, pour en indiquer la dualité.
- THÉORÈME. Deux triangles étant l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même ligne du second ordre, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points de contact du circonscrit : Les points de concours des côtés de l'inscrit avec leurs opposés respectifs dans le circonscrit appartiennent tous trois à une même droite. Les droites qui joignent les sommets du circonscrit avec leurs opposés respectifs dans l'inscrit concourent tous trois en un même point.
- 112 Il ajoute : « il est presque superflu d'observer que ce point et cette droite sont pôle et polaire l'un de l'autre, par rapport à la courbe²⁷ ».
- 113 Bobillier remarque que si les fonctions A, B, C ne sont pas linéaires mais d'un même degré quelconque, et si on convient d'appeler « triangle » le système de trois courbes alors on obtient des théorèmes sur les systèmes de trois courbes « que l'indigence de la langue, qui n'a pas été créée pour des considérations si générales, se refuse, pour ainsi dire à énoncer²⁸ ». Il fait aussi le même type de calcul avec trois fonctions linéaires en x, y, z pour obtenir un théorème analogue sur les trièdres.

Démonstration nouvelle de quelques propriétés

- 114 Dans ce second article, Bobillier obtient, entre autres, une nouvelle démonstration du théorème de Pascal.
- 115 Le point de départ est A, B, A', B quatre fonctions linéaires en x, y , avec
- 116 $A = 0, B = 0,$
- 117 les équations de deux côtés consécutifs d'un quadrilatère, et
- 118 $A' = 0, B' = 0,$

- 119 les équations des côtés respectivement opposés. Bobillier propose d'abrégé, en notant tout simplement, A, B, A', B' les côtés et $(A,B), (B,A'), (A',B'), (B',A')$ les sommets consécutifs du quadrilatère. Les points sont donc écrits comme couples de droites.
- 120 Pour a et b indéterminées, l'équation commune (1) de toutes les lignes du second ordre circonscrites au quadrilatère est
- 121 $aAA' + bBB' = 0$
- 122 L'équation commune à toutes les coniques, passant par les quatre points :
- 123 $A = 0 \quad A' = 0 \quad A = 0 \quad A' = 0$
- 124 $B = 0 \quad B' = 0 \quad B = 0 \quad B' = 0$
- 125 est l'équation (1). Soient c, c' quelconques, alors deux cordes menées d'un point de la conique aux points (A,B) et (A',B') ont pour équation
- 126 $cA + bB = 0, cB' + aA' = 0$
- 127 et deux cordes menées d'un point de la conique aux points (A,B') et (A',B) ont pour équations
- 128 $c'A + bB' = 0, c'B + aA' = 0$
- 129 Les côtés A, A' et les quatre cordes sont les côtés d'un hexagone, et
- 130 $A = 0 \quad cA + bB = 0 \quad c'A + bB' = 0$
- 131 $A' = 0 \quad cB' + aA' = 0 \quad c'B + aA' = 0$
- 132 sont les équations des trois points d'intersection de deux côtés opposés de l'hexagone. Or l'équation :
- 133 $cc'A - abA' = 0$
- 134 est satisfaite par chacun de ces couples. C'est donc l'équation d'une droite passant par ces trois points. Bobillier présente le théorème et son dual en colonnes :
- THÉORÈME. Dans tout hexagone inscrit à une conique, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite
- THÉORÈME. Dans tout hexagone circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes droites en un même point
- 135 Il remarque que ces théorèmes s'étendent aux cas où les fonctions en x, y ou en x, y, z sont d'un même degré quelconque.

Le mouvement alternatif de l'analyse et de la synthèse

- 136 Les commentaires que Michel Chasles donne de l'Examen de Lamé à trente ans d'intervalles sont assez différents. Dans *l'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* de 1837, il ne le cite qu'une fois pour remarquer la résolution du problème des neuf points : « cet habile géomètre a déterminé les éléments suffisants pour la construction de la surface du second degré qui doit passer par neuf points donnés²⁹ ». En revanche, dans le Rapport sur les progrès de la géométrie de 1867, il consacre plus d'une page à l'Examen : « dans un petit volume intitulé *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*, M. Lamé, alors élève au corps des Mines a présenté des réflexions fort justes sur l'étude des

Mathématiques et fait connaître des résultats nouveaux, qui ont donné lieu à des recherches ultérieures³⁰.

- 137 Chasles rappelle les trois problèmes que Lamé avait lui-même relevé comme importants : l'expression analytique de la communauté d'intersections de lieux géométriques, la détermination complète de courbes et de surfaces du second degré passant par un nombre suffisant de points, et ce que l'on appelle aujourd'hui les courbes et les surfaces de Lamé. Il relève le principe de la notation abrégée :

C'est dans cet ouvrage que se trouve l'équation $A+\lambda B = 0$ d'un système de courbes ou de surfaces ayant une communauté d'intersection deux à deux. Parmi les applications de cette équation, si utile dans toutes les recherches de géométrie, nous citerons les théorèmes suivants, qui alors n'étaient pas sans mérite : Lorsque plusieurs surfaces du second ordre se coupent suivant une même courbe, les plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles de ces surfaces se coupent suivant une même droite. — Lorsque plusieurs surfaces du second ordre passent par huit points donnés, leurs plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles passent tous par un même point³¹.

- 138 Chasles met aussi en avant la recommandation de Lamé en faveur de « la culture simultanée des ressources que peuvent offrir dans chaque question la géométrie pure et l'analyse ». Cette culture s'ancre, comme nous l'avons vu, dans une nouvelle manière de voir et de travailler les équations de l'algèbre.

- 139 L'importance des méthodes analytiques est réaffirmée par Lamé en ces termes dans les *Leçons sur les coordonnées curvilignes* de 1859 :

La Géométrie pure a certainement la puissance de faire des découvertes sur son propre terrain, comme le témoignent, si abondamment les travaux de Dupin, Poncelet [etc.]. Mais si un grand nombre des résultats, ainsi obtenus, ont été utilisés dans les sciences d'application, gardons-nous cependant de croire à une omnipotence de la géométrie seule, qui n'existe pas, et que l'histoire de la science dément. Trop ébloui par la simplicité, la lucidité, l'élégance de certaines démonstrations purement géométriques, ne les substituons pas partout, en mécanique, en physique mathématique, aux méthodes analytiques qui ont véritablement signalé les théorèmes énoncés, et qui bien présentées, sont aussi simples, aussi lucides, aussi élégantes, et ont de plus le mérite de l'invention³².

- 140 Le jeune Lamé avait sans doute déjà compris que si l'analyse et la synthèse sont toutes deux nécessaires dans la résolution d'un problème, il fallait aussi savoir passer de l'une à l'autre ou que chacune pouvait jouer sur l'autre. Dans une lettre du saint-simonien Prosper Enfantin de 1825, il est question du « mouvement alternatif de l'analyse et de la synthèse », et que dans le couple que formaient Clapeyron et Lamé, chacun des deux mathématiciens y tenaient une part :

Je suis charmé d'apprendre par vous que Clapeyron & Lamé n'ont pas cessé de couvrir les étincelles saint-simoniennes dont nous avons essayé de les pénétrer [...] Que Lamé fasse comme d'habitude qu'il vérifie ou redresse par le calcul les prévisions de Clapeyron, et vous soyez entre eux deux pour entretenir le mouvement alternatif de l'analyse et de la synthèse ; avec une pareille trinité vous pourriez aller loin ; l'école sera réellement représentée à St Pétersbourg³³.

NOTES

1. Lamé, Gabriel, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Paris : Mallet-Bachelier, 1859, p. XIII-XIV
2. Lamé, Gabriel, « Sur les intersections des lignes et des surfaces », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 7 (1816-1817), pp. 229-240.
3. Lamé, Gabriel, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, Paris : Bachelier, 1818, p. 2
4. op. cit., pp. 3-4.
5. op. cit., p. 8.
6. op.cit. p. 25.
7. op.cit. p. 27.
8. Loria, Gino «Perfectionnements, Evolution, Métamorphoses du concept de cordonnées : contribution à l'histoire de la géométrie analytique», *Osiris*, vol 8, 1948, p. 230.
9. Lamé, Gabriel, «Sur les intersections des lignes et des surfaces», *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 7 (1816-1817), pp. 229-240
10. Salmon, George, *A treatise on the analytic geometry*, Dublin, Hodges, Smith and Co., 1862, 89-128. Salmon, George, *A treatise on conic sections*, Londres, Longman and Co, 1863, pp. 218-261.
11. Darboux, Gaston, *Etude sur le développement des méthodes géométriques*, Paris, Gauthiers-Villars, Paris, 1904, p. 13
12. Cette attribution courante est peut-être le fait de Richard Baltzer, l'éditeur de Möbius, voir Pedoe, Dan, «Notes on the History of Geometrical ideas, I. Homogeneous Coordinates», *Mathematics Magazine*, vol 48, n° 4, sept. 1975 p. 217
13. Lamé, Gabriel, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, op.cit. p. 28
14. op. cit. p. 31
15. Poncelet, Jean-Victor, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822.
16. Lamé, Gabriel, *Examen*, p. cit., p. 43.
17. Monge, Gaspard, *Application de l'analyse à la géométrie, Seconde partie*, Bernard, Librairie de l'École Impériale Polytechnique, 1807, pp. 15-19.
18. Lamé, *Essai*, op. cit. p. 45
19. Carnot, Lazare, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.
20. Carnot, Lazare, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace ; suivi d'un Essai sur la théorie des transversales*, Paris : Courcier, 1806.
21. Sur l'invention de ces problèmes, voir Staude, Otto, Grévy, Auguste, « Quadriques », *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, éd. Molk, tome III, p. 77-78.
22. Lamé, op. cit., p. 51.
23. Lamé, op. cit., p. 69.
24. Staude, Otto, Grévy, Auguste, op. cit., p. 148.
25. Bobillier, Etienne, « Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 18, 1827-1818, p. 320-321.
26. Bobillier, Etienne, « Démonstration nouvelle de quelques propriétés des lignes du second ordre », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 18, 1827-1818, p. 359.
27. Bobillier, Étienne, « Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue », op. cit. , p. 323.
28. Bobillier, op. cit., p. 325.
29. Chasles, Michel, *Aperçu Historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Paris : Gauthier-Villars, 1837, p. 247.
30. Chasles, Michel, *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Paris : Imprimerie Nationale, 1867, p. 46.

31. Chasles, op. cit., pp. 46-47.

32. Lamé, Gabriel, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Paris : Mallet-Bachelier, 1859, p. XIV

33. Lettre à Picard, Saint-Simon et Enfantin, Œuvres, I, Paris, Dentu, 1865, p. 67.

AUTEUR

ÉVELYNE BARBIN

Centre François Viète - Université de Nantes