Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

44 | 2009

Gabriel Lamé (1795-1870) : Les pérégrinations d'un
ingénieur au XIX^e siècle

Gabriel Lamé et le polygone funiculaire

Dominique Bénard

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/sabix/645>

DOI : 10.4000/sabix.645

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 1 octobre 2009

Pagination : 113 - 118

ISBN : ISSN N° 2114-2130

ISSN : 0989-30-59

Référence électronique

Dominique Bénard, « Gabriel Lamé et le polygone funiculaire », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 44 | 2009, mis en ligne le 21 mai 2011, consulté le 08 septembre 2020. URL : <http://journals.openedition.org/sabix/645> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.645>

Ce document a été généré automatiquement le 8 septembre 2020.

© SABIX

Gabriel Lamé et le polygone funiculaire

Dominique Bénard

- ¹ Mon intervention est centrée sur un mémoire de Gabriel Lamé et Émile Clapeyron publié en deux articles au *Journal des Voies de Communication* de Saint-Petersbourg fin 1826 et début 1827, et portant sur la construction des polygones funiculaires. Je me propose ici d'en analyser le contenu qui semble caractéristique des travaux d'une époque - le début du dix-neuvième siècle - de trois manières distinctes quoique fortement corrélées : le souci d'une part de mettre au point des méthodes mathématiques plus adaptées que ne le sont les méthodes analytiques aux réalités de terrain des chantiers de construction ; plus généralement d'autre part une critique du « tout analytique » dont les représentants les plus éminents d'alors se nomment Lagrange et Laplace ; une certaine distinction sociologique, enfin, qui s'opère dans la diffusion des méthodes mathématiques et dans leur enseignement, avec d'un côté les grandes théories analytiques réservées aux élèves des grandes écoles, et de l'autre les méthodes géométriques, plus visuelles et destinées aux ouvriers et aux artisans. Ce mémoire appartient à la période où Lamé, sorti de l'école de Mines, et désigné avec Clapeyron pour former le personnel de la nouvelle école des Voies de communication fondée par le gouvernement russe, réside et travaille à Saint-Petersbourg en qualité de professeur et d'ingénieur du corps des Voies de Communication. Il est le résultat du travail de l'ingénieur Lamé, aussi bien que du physicien, du mathématicien ou du professeur. Il est peut-être plus encore le fruit de ce Janus bifrons¹ nommé « Lamé-Clapeyron » par les salons pétersbourgeois, tant leur collaboration, renforcée d'une amitié durable, rend difficilement discernable l'apport spécifique de l'un ou l'autre dans ce mémoire.

La théorie analytique « des polygones funiculaires n'est ni complète, ni facilement applicable »

- 2 Le premier article du mémoire² porte sur la « construction des polygones funiculaires dans le cas des forces parallèles », comprenant donc le cas où ces forces sont les poids que doivent supporter les chaînes d'un pont suspendu. Cette application pratique inspire d'ailleurs l'ensemble de l'écrit, dont les auteurs nous disent qu'ils ont été amenés aux constructions qu'ils y exposent « en cherchant à déterminer les éléments nécessaires à la rédaction d'un projet de pont suspendu d'une forme particulière³ ». C'est dans cette perspective que l'article commence par une critique des méthodes analytiques. Car, si ces dernières permettent effectivement de déterminer par le calcul les caractéristiques d'un tel projet, elles souffrent de deux défauts qui peuvent se transformer en obstacles rédhibitoires. Tout d'abord les calculs qu'exige cette méthode sont « longs et pénibles » et peuvent même se révéler « impraticables » dans le cas où le polygone funiculaire se compose d'un grand nombre de côtés ; mieux vaut alors « traiter directement chaque cas particulier » et « chercher à déduire, des circonstances individuelles qu'il présente, un moyen plus simple de construire le polygone qui en est l'objet⁴ ». Ensuite, et peut-être surtout, la « marche analytique » travaille avec des données qui ne sont pas celles dont on dispose « dans la pratique où on a souvent besoin de construire des polygones funiculaires⁵ » : ainsi, par exemple, les calculs analytiques sont menés en supposant données les longueurs des différents côtés du polygone funiculaire, alors qu'en pratique on se donne le plus souvent les longueurs des projections de ces côtés sur une « ligne connue de position », une horizontale dans le cas d'un projet de pont suspendu. Nos auteurs peuvent bien alors juger que cette méthode n'est « ni complète, ni facilement applicable⁶ », et proposer de remédier à ces défauts par une méthode permettant une construction graphique des polygones funiculaires, aisément adaptable aux différentes circonstances que la nature des divers projets leur impose. Généralisant une méthode exposée dans un mémoire précédent⁷, ce premier article expose le cas où les « projections horizontales des côtés du polygone seraient données mais inégales, et où les forces appliquées aux sommets seraient encore parallèles mais différeraient les unes des autres⁸ ». Je détaillerai ici cette construction dans le premier cas exposé, où le côté le plus bas du polygone est horizontal et les données sont symétriques par rapport à ce côté.
- 3 Supposons donc données (Figure 1) : le côté le plus bas et horizontal, C_1C_n , du polygone ; la flèche $F = A_1E$ du côté gauche du polygone ; les projections X_i sur l'horizontale A_1C_n des sommets C_i du polygone et $x_i = A_1X_i$; les poids P_i appliqués aux sommets C_i du polygone. Il s'agit de déterminer la ligne funiculaire elle-même ou, équivalentement, les sommets A_i , intersections des côtes $C_{i-1}C_i$ avec la flèche A_1E ou encore les longueurs $a_i = A_1A_{i+1}$, et $a_n = A_nE$.

Figure 1

4

X

- 5 Appelons alors T la traction horizontale exercée au point C par la partie droite du polygone, et T les différentes tractions respectivement exercées aux points C par le reste de la partie gauche du polygone - figure ci-dessous.

Figure 2

- 6 La méthode consiste alors à écrire successivement : l'équilibre du sommet C_1 autour du point A_2 ; l'équilibre de la portion de polygone C_1C_2 autour de A_3 ; l'équilibre de la portion $C_1C_2C_3$ autour de A_4 ; et ainsi de suite. Ce qui nous donne successivement les équations : $P_1 \cdot X_1 = T \cdot a_1$, $P_2 \cdot X_2 = T \cdot a_2$, ..., $P_n \cdot X_n = T \cdot a_n$, et finalement par sommation $\sum P_i \cdot X_i = T \cdot F$. Cette dernière équation nous fournit T , les autres équations nous donnant alors successivement les longueurs a_i et donc les positions des points A sur la flèche A_1E . Ces positions étant alors marquées, « la construction graphique du polygone funiculaire proposé se déduit aisément des équations »⁹ - voir figure 1 : le point $C_1 = X_1$ étant ici donné, le point C_2 est l'intersection de A_2C_1 avec la perpendiculaire issue de X_2 ; le point C_3 est l'intersection de A_3C_2 avec la perpendiculaire issue de X_3 ; et ainsi de suite. Et il est alors possible, étant donnés des segments dont les longueurs sont proportionnelles aux poids appliqués aux différents sommets du polygone, de construire un segment horizontal proportionnel à la traction T , puis successivement des « lignes » proportionnelles aux différentes tractions ou compressions T éprouvées par les côtés du polygone, les projections horizontales de ces tractions devant toutes être égales à la traction T - voir figure ci-dessous.

Figure 4

- 10 Aux quatre sommets A, B, C, D du polygone funiculaire plan sont appliquées quatre forces, agissant dans le même plan et représentées en grandeur et direction par les lignes F. On construit donc - figure 5 - les lignes ab, bc, cd, de, « consécutives [et] représentant en grandeur et en direction » les quatre forces F_1 , F_2 , F_3 , F_4 . On mène à partir de a et d deux lignes respectivement parallèles aux extrémités MA et DN du polygone. Ces deux droites se rencontrent au point O, d'où l'on mène les diagonales Ob, Oc, Od.

Figure 5

- 11 Dans cette configuration, abcde est appelé *polygone secondaire* du polygone funiculaire, le point O en étant nommé le *pôle*. Elle a ceci de remarquable : les segments ab, bc, cd, de, représentant en grandeur et direction les quatre forces appliquées au sommet du polygone funiculaire, le segment ae représente en grandeur et direction la résultante de ces quatre forces, ou, dit sur un mode plus conforme à l'époque, le segment ea représente en grandeur et direction la force qui équilibrerait ces quatre forces si elles étaient « réunies au même point » ; les segments Oa, Ob, Oc, Od, Oe représentent alors en grandeur et direction les tractions respectivement « éprouvées par les différents côtés du polygone funiculaire proposé¹² ». Cette construction remarquable de simplicité, « dont l'énoncé contient presque toute la démonstration¹³ », se distingue aussi par son efficacité dans les nombreuses applications et les divers problèmes auxquels elle peut s'appliquer. On peut par exemple retrouver par elle les constructions

décrites dans le premier article, en ramenant le rôle des équations d'équilibre à la seule détermination de la traction horizontale T . On en déduit aussi très facilement une condition pour que toutes les tractions exercées sur les côtés du polygone funiculaire soient égales : que les sommets du polygone secondaire soient inscriptibles dans un cercle dont le centre coïncidera alors nécessairement avec son pôle. Elle offre aussi une solution simple à un problème d'une grande utilité pratique, par exemple pour la construction d'un polygone en fer ou d'une charpente devant adopter une forme déterminée « soit par des circonstances locales, soit même par des motifs d'élégance¹⁴ » : celui de déterminer les forces verticales appliquées aux sommets d'un polygone funiculaire et susceptibles de lui faire prendre une forme donnée.

- 12 Supposons en effet que l'on veuille obtenir le polygone funiculaire de la figure 6 en suspendant des poids, dont il faut alors déterminer la grandeur, aux sommets G, H, K, L .

Figure 6

- 13 On construit alors le polygone secondaire ci-dessous - figure 7. Traçant une droite verticale, on mène sur cette droite et à partir d'un point A quelconque en dehors d'elle, les segments Ae, Ag, Ah, Ak, Al , respectivement parallèles aux côtés EG, GH, HK, KL et LM du polygone funiculaire. Les segments verticaux eg, gh, hk, kl , seront respectivement proportionnels aux poids recherchés, les segments issus de A étant alors proportionnels aux tractions exercées sur les côtés du polygone funiculaire.

Figure 7

- 14 À la suite d'une solution détaillée d'un problème très général et « faiblement » déterminé¹⁵, et après quelques rapides considérations sur les traitements graphiques possibles de polygones funiculaires gauches, le mémoire se termine sur cette considération¹⁶ :

Le théorème sur les polygones secondaires et leurs pôles, que nous avons énoncé dans le paragraphe 17, et dont nous avons donné

plusieurs corollaires, nous paraît jeter un jour nouveau sur la théorie des polygones funiculaires ; c'est un de ces résultats simples, dont l'énoncé contient presque toute la démonstration, et qui sont infiniment plus fertiles en applications que beaucoup d'autres théorèmes plus difficiles à démontrer.

- 15 Cette assertion, qui contient, nous semble-t-il, une nouvelle critique des méthodes analytiques, pose toutefois un certain nombre de questions quant à l'histoire de l'invention et de la diffusion de certaines méthodes ou de certains résultats.

« Un nouveau jour sur la théorie des polygones funiculaires » ?

- 16 Cette remarque en effet, venant conclure un mémoire portant sur la construction graphique des polygones funiculaires, doit sans doute être versée au dossier de ce que K. Chatzis¹⁷ considère comme un oubli de méthodes plus anciennes, et notamment françaises, concernant le traitement graphique des conditions d'équilibre d'un polygone funiculaire matériel.
- 17 On peut d'abord penser à la *Spartostatique* de Simon Stevin, dont la traduction française par Albert Girard paraît en 1634 - figure 8 - et dans laquelle est développée une lecture géométrique des conditions d'équilibre d'un polygone funiculaire, sans intervention toutefois d'un quelconque polygone secondaire. On trouve en revanche dans la *Nouvelle mécanique* de Pierre Varignon, parue à titre posthume en 1725, des méthodes analogues, pour ne pas dire identiques¹⁸, à celles décrites par Lamé-Clapeyron - figure 9. Elles sont reprises et prolongées par son élève Charles-Étienne-Louis Camus dans son *Cours de mathématiques* de 1752 - figure 10.

Figures 8, 9 et 10

- 18 On les retrouve par deux fois sous la plume de Poncelet : d'abord en 1828-1829, dans un cours du soir destiné à des ouvriers et artisans de la ville de Metz, et à propos de polygones funiculaires tirés par des poids ; ensuite, au début des années 1840, dans un cours inédit de mécanique professé à la Sorbonne et concernant alors des polygones funiculaires tirés par des forces ayant des directions quelconques¹⁹. Poncelet ne cite jamais Varignon ou Camus, pas davantage Lamé et Clapeyron dont le premier article seulement du mémoire que nous venons d'analyser, avait été publié en 1828 au *Journal du génie civil*. Ces derniers ne mentionnent pas non plus Varignon dans leur mémoire, ni Camus, ni qui que ce soit d'autres, et rien ne permet de douter de leur sincérité quand ils évoquent ce « nouveau jour » dont leur polygone secondaire éclairerait le polygone funiculaire. Et il est sans doute significatif que ce soit dans le cadre de leur travail

d'ingénieurs de terrain et devant former de futurs ingénieurs de terrain, qu'ils proposent ce type de méthodes ; et qu'une fois terminé leur séjour à Saint-Petersbourg et abandonnées leurs fonctions au corps des ingénieurs des voies de communication, ni l'un ni l'autre ne soit revenu sur ces sujets, ni comme scientifique, ni comme professeur. Ainsi, les méthodes graphiques ici exposées sont totalement absentes de la partie mécanique du cours de physique donné par Lamé à l'École polytechnique. De même, le second article de leur mémoire, portant donc sur une étude purement graphique des polygones funiculaires, ne sera jamais publié en France.

- 19 Au-delà des biographies particulières, une explication possible tiendrait au fait de l'éviction des méthodes géométriques au profit des théories et des calculs analytiques dans les programmes d'enseignement des grandes écoles d'ingénieurs françaises, éviction qui se construit dans les publications scientifiques elles-mêmes tout au long du siècle des Lumières et dont la *Mécanique analytique* de Lagrange, parue en 1788, constitue une sorte de point d'orgue. Aucune figure dans cet ouvrage majeur, ce qui est le signe, selon son auteur lui-même, de l'entrée de la mécanique dans la véritable Analyse, puisque ainsi « les méthodes [...] ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière & uniforme²⁰ ». Même si, au début du XIX^e siècle, le renouveau de la géométrie supérieure, illustrée notamment par les méthodes des géométries projective et descriptive²¹, fonde et se fonde sur une certaine critique du « tout analytique » ; même si, sur le terrain de la mécanique elle-même, on voit à la même époque un Louis Poincaré, restaurant une certaine primauté de l'*analyse géométrique* sur la *synthèse algébrique*, damer le pion à Lagrange et Laplace sur certaines questions mécaniques délicates²² ; c'est bien une tendance analytique lourde qui s'impose pourtant dans la formation des ingénieurs et scientifiques français.
- 20 De sorte que la partie la plus visible de la transmission des méthodes de résolution de problèmes liés à divers types de constructions relevant du génie civil ou militaire est marquée du sceau de l'analytique - calculs, transformations et résolutions d'équations fournissant d'ailleurs la possibilité d'établir des tables numériques utilisables sur le terrain et, semble-t-il, privilégiées par les ingénieurs français de la première moitié du dix-neuvième siècle²³. Mais cette partie - bien visible parce que consignée dans les grands traités s'adressant aux cadres ou futurs cadres de la nation, aux animateurs et concepteurs des grands projets - ne doit pas faire oublier l'autre, moins visible, en partie peut-être parce qu'elle concerne les acteurs du terrain, ouvriers et artisans non initiés à ces mathématiques supérieures qui d'ailleurs n'étaient sans doute pas d'une grande utilité sur les chantiers, comme nous le suggéraient Lamé et Clapeyron au début de leur mémoire. Au moins à titre de question, il nous faut bien envisager, au-delà même des cours du soir dont il a été fait mention plus haut, d'autres modes de transmission et de diffusion de ces méthodes graphiques plus visuelles et souvent plus simples. Mais il est sans doute plus difficile d'en faire une histoire, car ils peuvent procéder, par exemple, de la transmission orale appuyée d'un schéma griffonné au coin d'un brouillon - voire sur le sol d'un chantier - et jeté une fois qu'il a produit son utilité immédiate ; ou bien d'évocations plus ou moins détaillées dans des échanges épistolaires. Les exemples d'ailleurs ne manquent pas, dans l'histoire des mathématiques supérieures elles-mêmes, de ces propriétés manifestement connues de tous les savants d'une époque, parce qu'utilisées par tous, sans qu'on puisse véritablement savoir d'où elles ont surgi la première fois et comment elles se sont diffusées. Ne nous restent que des traces de leurs utilisations ou de leurs réinventions

successives²⁴. L'invention ne serait-elle parfois que réminiscence ? ... petit mystère générateur de multiples questionnements et par là-même de grands bonheurs pour l'historien des sciences et des techniques.

NOTES

1. Selon une expression utilisée par Irina et Dmitri Gouzevitch
2. « Mémoire sur la construction des polygones funiculaires par MMrs les Lieutenant-Colonels Lamé et Clapeyron », *Journal des Voies de Communication*, n° 6, décembre 1826, pp. 35-47
3. op. cit., p. 37
4. ibid., p. 35
5. ibid., p. 36
6. ibid., p. 36
7. « Mémoire sur les ponts suspendus, par Mr le lieutenant-colonel Lamé », *Journal des Voies de Communication*, n° 3, septembre 1826, pp. 49-71
8. « Mémoire sur les polygones funiculaires », op. cit., pp. 36-37
9. ibid., p. 39
10. ibid., p. 44
11. « Mémoire sur les polygones funiculaires par MMrs les Lieutenant-Colonels Lamé et Clapeyron », *Journal des Voies de Communication*, n° 7 - 1827, pp. 43-55
12. op. cit., p. 44
13. ibid., p. 55
14. op. cit., p. 47
15. « construire un polygone funiculaire plan, lorsqu'on connaît ses extrémités, un point par lequel doit passer un de ses côtés, les grandeurs des forces qui doivent être appliquées à ses sommets, et la position des lignes suivant lesquelles ces forces doivent agir », op. cit., p. 49
16. op. cit., p. 55
17. Chatzis, Konstantinos, « La réception de la statique graphique en France durant le dernier tiers du XIX^e siècle », *Revue d'histoire des mathématiques*, 10 (2004), pp. 7-43
18. du moins en ce qu'elles contiennent la construction d'un polygone secondaire et l'interprétation de ses diagonales en termes de tensions
19. Pour plus de détails, se reporter à : Chatzis (2004), op. cit., pp. 10-17.
20. Avertissement introduisant la Mécanique Analytique.
21. Voir notamment le Discours d'inauguration du cours de Géométrie Supérieure de la Faculté des Sciences de Paris, prononcé par M. Chasles en 1846 et reproduit dans son *Traité de Géométrie Supérieure*.
22. Voir notamment de Louis Poincaré sa *Théorie et détermination de l'équateur du système solaire, parue en annexe de la sixième édition de ses Éléments de Statique* (Paris, Bachelier, 1834) ; également sa *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, présentée à l'Académie en 1834 et publiée au *Journal des Mathématiques pures et appliquées* en 1851.
23. Cf. Chatzis, Konstantinos, op. cit., p. 16, note 10
24. Je pense ici, par exemple, à la caractérisation de la courbe « logarithmique » par la constance de sa sous-tangente au dix-septième siècle.

AUTEUR

DOMINIQUE BÉNARD

Université du Maine (Le Mans) - Centre François Viète (Nantes)