Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

44 | 2009

Gabriel Lamé (1795-1870) : Les pérégrinations d'un
ingénieur au XIX^e siècle

Gabriel Lamé et la théorie des nombres : « une passion malheureuse » ?

Catherine Goldstein

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/sabix/690>

DOI : 10.4000/sabix.690

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 1 octobre 2009

Pagination : 131 - 139

ISBN : ISSN N° 2114-2130

ISSN : 0989-30-59

Référence électronique

Catherine Goldstein, « Gabriel Lamé et la théorie des nombres : « une passion malheureuse » ? », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 44 | 2009, mis en ligne le 26 mai 2011, consulté le 08 septembre 2020.
URL : <http://journals.openedition.org/sabix/690> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.690>

GABRIEL LAMÉ ET LA THÉORIE DES NOMBRES : « UNE PASSION MALHEUREUSE » ?

Catherine Goldstein
CNRS & UPMC — Institut de mathématiques de Jussieu

Le 31 décembre 1843, Gabriel Lamé remercie son ami Gustav Lejeune-Dirichlet pour « l'exemplaire que vous m'avez envoyé, de votre mémoire sur les formes quadratiques, je l'étudie avec soin, car j'ai toujours une passion malheureuse et fort peu légitimée pour la théorie des nombres¹ ». Quatre ans et demi plus tôt, il avait pourtant présenté à l'Académie des sciences la preuve d'un nouveau cas du Grand Théorème de Fermat. Quelques mois plus tard, une note aux *Comptes rendus* de cette même Académie offrira une des premières analyses connues de la complexité d'un algorithme arithmétique. Qualifier sa « passion » de « fort peu légitimée » ne serait-il pas de la fausse modestie ?

Plutôt de la lucidité si l'on en croit ses historiens récents. Dans son étude de référence sur la genèse du théorème de Fermat, Harold Edwards commente : « Les arguments [de Lamé sur ce théorème] sont difficiles, non motivés et, pire que tout, ils semblent désespérément liés au cas $n=7$. Aucune description ou résumé de cette preuve ne sera donné ici². » Lamé intervient surtout dans le livre d'Edwards à travers ses tentatives inefficaces pour démontrer le cas général du théorème, au moment même où Ernst Kummer inventait les nombres idéaux et les appliquait au théorème de Fermat avec un bien plus grand succès. Eric Weisstein, sur le site Internet très fréquenté MathWorld, parle même d'erreurs dans la preuve du cas $n=7$, que Victor Amédée Lebesgue aurait ensuite corrigées³. L'autre résultat de Lamé a subi un sort comparable : « La première analyse du temps de calcul de l'algorithme d'Euclide est traditionnellement créditée à Gabriel Lamé. Mais le résultat de Lamé peut néanmoins être critiqué pour plusieurs raisons... En fait, il y eut beaucoup de travail antérieur sur ce problème⁴ », lit-on dans une synthèse récente.

Comme nous le verrons, ces descriptions, quand elles ne sont pas incorrectes, reflètent des priorités contraires à celles de Lamé. Pour mieux le comprendre, nous suivrons ici de près son itinéraire à travers la théorie des nombres, en revenant sur ses deux principaux résultats. Sa correspondance jusqu'alors inconnue avec Dirichlet qui, tant par ses liens personnels et scientifiques que par sa distance même à Paris, a joué souvent un rôle d'arbitre dans la communauté française nous servira de fil rouge : la franchise avec laquelle Lamé lui décrit ses espérances et ses malheurs permet d'ancrer ses théorèmes dans la vie académique du milieu du XIX^e siècle et d'en suivre pour quelques années la chronique.

I. LE THÉORÈME DE FERMAT POUR L'EXPOSANT 7

---

¹ La correspondance de Lamé à Lejeune-Dirichlet citée ici est inédite. Elle s'étend de 1839 à 1847 et est conservée dans le Nachlaß Dirichlet, Staatsbibliothek zu Berlin, Preussischer Kulturbesitz, Handschriftenabteilung.

² « *Lamé's are difficult, unmotivated and, worst of all, seem to be hopelessly tied to the case $n=7$. No description or summary of this proof will be given here* », Edwards, Harold, *Fermat's Last Theorem*, New York, Heidelberg, Berlin : Springer, 1977, p. 74. Edwards ajoute en note : « *In candor I must say that I have not followed the proof through* » (« en toute sincérité, je dois dire que je n'ai pas complètement suivi la preuve »).

³ « *Although some errors were present in this proof, these were subsequently fixed by Lebesgue in 1840* », Weisstein, Eric, « Fermat's Last Theorem », *MathWorld*, <http://mathworld.wolfram.com/FermatsLastTheorem.html>

⁴ « *Credit for the first analysis of the running time of the [Euclidean algorithm] is traditionally assigned to Gabriel Lamé. ...Lamé's result, though, can nevertheless be criticized on several grounds. ... In fact, there was much previous work on this problem* », Shallit, Jeffrey, « Origins of the Analysis of the Euclidean Algorithm », *Historia Mathematica* 21,1994, pp. 401-419.

Ce qui relève de théorie des nombres dans l'œuvre variée de Lamé n'est pas tout à fait évident⁵. Au risque d'un anachronisme, j'ai suivi ici les choix de Leonard Dickson dans son *History of the Theory of Numbers*, publiée entre 1919 et 1923 : outre les deux théorèmes évoqués dans l'introduction, celui-ci repère aussi deux notes tardives sur les sommes de cubes, nous évoquerons donc tour à tour ces différents thèmes⁶. La première contribution, chronologiquement, concerne le théorème de Fermat dans le cas de l'exposant 7.

I. 1. Un aperçu de la preuve

Comme il est bien connu, ce théorème, mis en notation algébrique, énonce que l'équation $x^n + y^n + z^n = 0$ n'a pas de solutions en entiers x, y, z tous non nuls. Au début du XIX^e siècle, il n'avait pas encore atteint sa célébrité actuelle, mais avait déjà fait l'objet d'un prix, proposé par l'Académie des sciences en 1818. Lamé y avait concouru, avec

un mémoire qui ne résolvait pas, il est vrai, la question proposée ; mais qui renfermait toutefois des théorèmes curieux sur l'impossibilité de la résoudre sans que certains nombres, égaux, par exemple à l'unité augmentée du double ou du quadruple de l'exposant, fussent diviseurs de l'une des inconnues. [...Ce] travail n'était pourtant pas sans mérite⁷.

Mais en juillet 1839, il peut écrire avec quelque satisfaction à Dirichlet :

Parmi les recherches auxquelles je me suis livré dans ces derniers temps, il en est une qui concerne un sujet que vous avez traité autrefois et sur lequel vous avez inspiré de nouvelles idées à M. Legendre : il s'agit du dernier théorème de Fermat ; je viens de le démontrer pour l'exposant 7. Voici tout le secret de cette démonstration nouvelle : l'équation générale étant mise sous la forme $x^n + y^n + z^n = 0$, x étant divisible par n , et trois décompositions donnant $y + z = n^{n-1}m$, $z + x = n^n$, $x + y = r^n$, on établit facilement la relation $x + y + z = Amnr$, A étant premier avec nm, n, r ; or pour le cas de $n=7$ seulement, le nombre A est un carré ; cette propriété démontrée, une suite d'éliminations et de décompositions faciles ramène la question à la résolution de l'équation indéterminée $U^3 - 3 \cdot 7^4 \cdot U^4 V^4 + 2 \cdot 7^7 V^8 = W^4$, dont on démontre l'impossibilité en nombres entiers finis. Je me félicite d'avoir pu trouver quelque chose sur un sujet qui me préoccupe depuis 20 ans et surtout d'avoir établi une liaison naturelle entre vos anciens travaux et les miens.

De fait, après la preuve pour les cubes au milieu du XVIII^e siècle et celle pour les puissances 5-ièmes en 1825 (donnée partiellement par Dirichlet et complétée par Adrien-Marie Legendre), c'est encore Dirichlet qui en démontrant en 1832 le cas des puissances 14-ièmes a fait avancer la question⁸. Comme les précédentes preuves mentionnées, celle de Dirichlet pour l'exposant 14 utilise de manière substantielle les propriétés des diviseurs de formes quadratiques (en l'occurrence le fait que si un nombre impair de la forme $a^2 + 7b^2$ est une puissance 14-ième, sa racine 14-ième peut être écrite sous la même forme), ainsi que

⁵ Par exemple, le calcul du nombre de décompositions d'un polygone en triangles donné par Lamé en 1838 est-il de la combinatoire ou de l'arithmétique ? Sur ce résultat, voir la contribution de Jérôme Laurentin dans ce volume.

⁶ L'ensemble correspond à 11 items signés de Lamé, dont une republication à l'identique et 4 annonces concernant le cas général du théorème de Fermat.

⁷ Cauchy, Augustin-Louis, « Rapport sur un Mémoire de M. Lamé relatif au dernier théorème de Fermat », *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences* 9 (1839), pp. 359-363, cit. pp. 361-362 (reproduit dans *Journal de mathématiques pures et appliquées* 5 (1840), pp. 211-215 ; cit. p. 214). Selon les Procès Verbaux de l'Académie, la commission chargée d'attribuer le prix de 1818 (qui incluait Cauchy) fut mise en place le 5 janvier 1818 (PV 6, p. 260) ; elle décida le 6 mars 1820 « que ce prix ne sera[it] point donné et que le sujet ne sera[it] plus mis au concours » (PV 7).

⁸ Sur ces preuves, voir Edwards, Harold, *op. cit.* in n. 2. Une preuve pour un exposant entraîne bien sûr celle pour tous les multiples. Edwards remarque que publier une preuve pour l'exposant 14 est bien un aveu d'échec pour le cas de l'exposant premier espéré, $n=7$. La liaison entre la recherche de Lamé et les « anciens travaux » de Dirichlet est donc directe et « naturelle ».

des nombres complexes, ici de la forme $a + b\sqrt{-7}$, avec a et b entiers. Lamé⁹, au contraire, revendique de présenter sa

démonstration sans recourir à aucune théorie étrangère, et sans [s]'appuyer sur les propriétés secondaires que Legendre a réunies dans la seconde édition de sa Théorie des nombres. Tous les lemmes nécessaires à cette démonstration particulière sont démontrés directement, et uniquement en vue de l'exposant 7.

Ce qui est analysé par les commentateurs récents comme une limitation est donc d'abord pour Lamé une qualité, l'adaptation de la preuve à son objet. Nous reviendrons sur ces priorités, mais il est utile pour mieux les apprécier de retracer les étapes de cette preuve.

I. 2. L'élimination du premier cas

Dans ses articles publiés, Lamé part de l'équation $x^7 + y^7 = z^7$ (ce qui rompt légèrement la symétrie des formules par rapport à la lettre à Dirichlet), et suppose que x, y, z sont non nuls et premiers entre eux (l'un est alors pair, les autres impairs). La première étape de la preuve consiste à factoriser le membre de droite de $x^7 = z^7 - y^7$, par exemple, en un produit de deux facteurs qui seront donc chacun « à peu près » une puissance 7-ième.

Lamé pose ainsi $x^7 = (z-y)X$, $y^7 = (z-x)Y$, $z^7 = (x+y)Z$, où

$$X = (z-y)^6 + 7y(z-y)^5 + 3 \cdot 7y^2(z-y)^4 + 5 \cdot 7y^3(z-y)^3 + 5 \cdot 7y^4(z-y)^2 + 3 \cdot 7y^5(z-y) + 7y^6,$$

et des expressions similaires pour Y et Z .

Comme il est standard, Lamé distingue deux cas, celui où 7 ne divise aucun des nombres x, y, z et celui où 7 divise l'un de ces nombres, par exemple x (le raisonnement est identique pour les autres).

Dans le premier cas, s'il existait un facteur premier commun à $z-y$ et X , il diviserait donc $z-y$ et $7y^6$, donc $z-y$ et, ou bien y , ou bien 7, donc $z-y$ et 7, puisque z et y sont premiers entre eux. Mais par hypothèse, 7 ne divise pas x , or $x^7 = (z-y)X$. Donc $z-y$ et X sont premiers entre eux : puisque leur produit est une puissance 7-ième, chacun d'eux l'est. Il en est de même pour les autres produits. Lamé peut donc poser :

$$x = m\mathbf{m} \quad X = \mathbf{m}^7 \quad z - y = \mathbf{m}^7 = a$$

$$y = n\mathbf{n} \quad Y = \mathbf{n}^7 \quad z - x = \mathbf{n}^7 = b$$

$$z = p\mathbf{r} \quad Z = \mathbf{r}^7 \quad x + y = \mathbf{r}^7 = c$$

où les $m, n, p, \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{r}$, sont premiers entre eux.

Notons ici l'importance d'avoir fait jouer le même rôle, de manière symétrique (au signe près dans la version publiée), aux trois variables x, y, z ce qui conduit à introduire les quantités auxiliaires, comme m, n, p , trois par trois. En combinant sur chaque ligne les termes de la troisième et de la première colonne, Lamé hérite ainsi de trois façons différentes d'évaluer $x+y-z$, l'une divisible par $\mathbf{m}$, une autre par $\mathbf{n}$, une autre par $\mathbf{r}$: $x+y-z$ est donc divisible par leur produit P :

$$x + y - z = \mathbf{m}(m - \mathbf{m}^6) = \mathbf{n}(n - \mathbf{n}^6) = \mathbf{r}(p - \mathbf{r}^6) = A\mathbf{m}\mathbf{n}\mathbf{r} = AP$$

Lamé en déduit ce qu'il appelle la « relation fondamentale » :

$$\mathbf{r}^7 - \mathbf{n}^7 - \mathbf{m}^7 = c - b - a = 2A\mathbf{m}\mathbf{n}\mathbf{r}$$

Comme $(c+b+a)^7 = (c-b+a)^7 + (c+b-a)^7$, on a $(c-b-a)^7 = 7 \cdot 8 \cdot abc [3(a^4+b^4+c^4) + 10(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)]$, ou encore $16A^7 = 7[3(a^4+b^4+c^4) + 10(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)]$, ce qui montre que 7 divise A . De plus, ainsi que Lamé l'expliquait dans sa lettre à Dirichlet, A est un carré.

Pour prouver cette dernière propriété, Lamé considère l'équation ci-dessus comme une équation quadratique en a^2 d'où, par la formule usuelle :

⁹ Vu les délais de publication à l'Académie (voir « Sur la démonstration d'un nouveau cas du dernier théorème de Fermat », *Mémoires des savants étrangers* 8 (1843), pp. 421-437), la preuve est d'abord publiée par Joseph Liouville dans son journal, voir « Mémoire d'analyse indéterminée démontrant que l'équation $x^7+y^7=z^7$ est impossible en nombres entiers », *Journal de mathématiques pures et appliquées* 5 (1840), pp. 195-211.

$3a^2 = -5(b^2 + c^2) + 2\sqrt{4(b^4 + c^4) + 5b^2c^2 + \frac{3}{7}2^2A^7}$. L'expression sous le radical doit être un carré, d'où, en posant $\Psi = b^2 + c^2$ et $\mathbf{j}$ le radical, $\frac{12}{7}A^7 = \mathbf{j}^2 - 4\Psi^2 + 3b^2c^2$.

En utilisant la relation fondamentale, Lamé déduit que $\mathbf{j} = 4\Psi - 3cb - 6APX$, d'où finalement $A(\frac{A^6}{7} - 3AP^2x^2 + PX(4\Psi - 3bc)) = (\Psi - bc)^2$. Lamé utilise une fois de plus le fait que si un produit de deux nombres premiers entre eux est un carré, chacun d'eux l'est. En effet, si un nombre premier divisait à la fois A et l'expression dans la parenthèse, il diviserait aussi A et $PX(4\Psi - 3bc)$, donc aussi $4\Psi - 3bc$, puisque A et P , ainsi que A et X , sont premiers entre eux. Donc il diviserait A , $4\Psi - 3bc$, $(\Psi - bc)^2$, c'est-à-dire finalement A et $bc = (\mathbf{nr})^7$: c'est donc 1. Puisque le produit de A et de l'expression de la parenthèse, première à A , est un carré, donc A est un carré, soit B^2 .

Finalement, Lamé obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned} c - b - a &= 2B^2P \\ a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca + ab &= BD \\ abc &= P^7 \\ 3(a^4 + b^4 + c^4) + 10(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) &= \frac{16}{7}B^{14} \end{aligned}$$

pour un entier D adéquat. En éliminant a, b, c des équations, il obtient

$$7\left(\frac{B^6}{7}\right)^2 - D^2 = P^2(7B^6P^2 - 5B^2D - P^6).$$

Il est facile de vérifier que B (comme A) est divisible par 7, que B et D sont impairs, et que P est pair. Le membre de gauche de la dernière équation ci-dessus est alors de la forme $4k+2$, alors que celui de droite est, comme P , divisible par 4. Ce cas, conclut Lamé, est donc impossible.

I. 3. Le deuxième cas : l'usage de la descente infinie

Le début de la preuve pour le deuxième cas, celui où 7 divise x , est tout à fait analogue. Dans ce cas, 7 divise exactement une fois X et 6 fois $z-y$, tandis que $z-x, Y, x+y$ et Z sont premiers entre eux. Lamé peut donc poser

$$\begin{aligned} x &= 7m\mathbf{m} & X &= m^7 & z - y &= \mathbf{m}^7 = a \\ y &= n\mathbf{n} & Y &= n^7 & z - x &= \mathbf{n}^7 = b \\ z &= p\mathbf{r} & Z &= p^7 & x + y &= \mathbf{r}^7 = c \end{aligned}$$

où les $m, n, p, \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{r}$, sont premiers entre eux. Les trois façons différentes d'évaluer $x+y-z$, la « relation fondamentale », où cette fois A est premier à 7, à x, y, z et est impair, et où P est pair, sont établies *mutatis mutandis*. Lamé montre encore que A est un carré, obtenant finalement, pour un D adéquat, les équations :

$$\begin{aligned} c - b - a &= 2.7B^2P \\ a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca + ab &= BD \\ abc &= 7^6P^7 \\ 3(a^4 + b^4 + c^4) + 10(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) &= 16B^{14} \end{aligned}$$

L'élimination de a, b, c et quelques changements de variables évidents conduisent cette fois à une équation $D_1^2 = (B^6 - 6.7^4P_0^4)^2 + 7(2.7^3P_0^3)^2$. Ici, les considérations de parité qui permettaient de se débarrasser du premier cas ne suffisent plus.

Lamé concède alors que «pour satisfaire à cette équation, on pourrait s'appuyer sur des théorèmes concernant des formes quadratiques et leurs diviseurs ». Mais c'est pour revenir aussitôt aux priorités exprimées dès l'introduction : «sans rien emprunter à des théories étrangères, ajoute-t-il, il suffit ici de résoudre directement l'équation indéterminée $t^2 = u^2 + 7v^2$ dans laquelle les nombres t, u , impairs, et v , pair, doivent être premiers entre eux ». De fait, l'étude de la parité lui permet d'exprimer, à partir de la factorisation de $t^2 - u^2 = (t-u)(t+u) = 7v^2$, t, u, v sous la forme¹⁰ $t = f^2 + 7g^2$, $\pm u = f^2 - 7g^2$, $v = 2fg$, avec f et g premiers entre eux et f premier à 7. En revenant à la définition de t, u, v , on voit de plus que $fg = 7^3 P_1^4$, donc f est une puissance quatrième Q_1^4 et g est de la forme $7^3 P_1^4$. Lamé dérive ainsi une nouvelle équation

$$(Q_1^4 + 3 \cdot 7^4 P_1^4)^2 = B^6 + 7(2^5 \cdot 7^3 P_1^4)^2$$

qui, traitée de la même façon, donne lieu à des f_1, g_1 , puis Q_2, P_2 , tels que

$$Q_1^4 = Q_2^8 - 3 \cdot 7^4 Q_2^4 P_2^4 + 2^4 7^7 P_2^8$$

C'est, au nom près des variables, l'équation indéterminée mentionnée dans la lettre à Dirichlet. En réitérant la construction, Lamé met en évidence des quantités Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 et P_3, P_4, P_5, P_6 , vérifiant diverses équations du même type ; il montre en particulier que Q_5, Q_6 et P_6 sont solutions de la même équation que Q_1, Q_2 et P_2 . Mais c'est une solution plus petite — par exemple $P_2 = 2Q_3Q_4Q_5Q_6P_6$ d'où Lamé déduit que P_6 est au moins 22000 fois plus petit que P_2 . Lamé peut donc appliquer un argument de descente infinie, ce qui prouve l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $Q_1^4 = Q_2^8 - 3 \cdot 7^4 Q_2^4 P_2^4 + 2^4 7^7 P_2^8$, comme annoncé dans le résumé envoyé à Dirichlet en juillet 1839, et par conséquent l'impossibilité de l'équation de Fermat¹¹.

II. L'AVENTURE ACADÉMIQUE ET L'ALGORITHME D'EUCLIDE

Ce succès n'apporte pourtant pas à Lamé tout ce qu'il souhaitait. Moins d'un an après la présentation de son mémoire à l'Académie, le 27 mai 1840, il confie à Dirichlet :

J'ai éprouvé un profond découragement en voyant s'anéantir toutes mes espérances dans les dernières luttes académiques et ce n'est que depuis bien peu de temps que j'ai retrouvé cet amour désintéressé de la science qui doit suffire au savant philosophe.

Quoi qu'il en soit $x^7 + y^7 = z^7$ va paraître dans le journal de Liouville. La publication d'un mémoire sur les coordonnées curvilignes suivra de près. Je rédigerai ensuite un mémoire sur la surface des ondes. Je m'occupe toujours du théorème de Fermat mais de nouveaux progrès paraissent très difficiles.

II. 1. L'élection de 1843

L'analyse que Lamé produit en 1844 sur l'algorithme d'Euclide s'inscrit directement dans ces «lutttes académiques ». Louis Puissant, membre de la section de géométrie, meurt le 10 janvier 1843, offrant un nouvel espoir aux aspirants académiciens. Le 14 janvier, Lamé demande à Dirichlet un « service important » :

J'ai grand espoir de faire cesser l'espèce d'ostracisme qui m'a frappé dans les dernières élections. J'ai pour concurrent sérieux M. Binet ; Cauchy, l'abbé Moigno

¹⁰ Il s'agit d'un raisonnement standard déjà utilisé au XVII^e siècle par Fermat par exemple et analogue à celui qui permet d'établir que, à un multiple commun près, l'hypoténuse d'un triangle pythagoricien est somme de deux carrés, un côté de l'angle droit différence de ces carrés, l'autre double produit de leurs racines.

¹¹ Dans son rapport pour l'Académie sur le mémoire de Lamé, Cauchy suggère quelques simplifications. Celles-ci sont mises en œuvre par Victor-Amédée Lebesgue quelques mois plus tard et paraissent dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* 5 (1840), pp. 276-279. Mais un cas n'est pas traité correctement, comme le signale Lamé (et non le contraire...) ; la correction paraît dans le fascicule suivant, pp. 348-349. Norbert Verdier m'a signalé des échos de cette affaire dans le carnet MS 3616 de Joseph Liouville, Bibliothèque de l'Institut de France.

et Consort lui ont préparé les voies de longue main. Il importe que je sois présenté en première ligne pour la section et la voix de M. Lacroix emportera peut-être la balance. Une lettre de vous à ce doyen de nos géomètres pourrait me le rendre favorable; je vous supplie de l'écrire de suite et même je pousse la hardiesse jusqu'à vous inviter de la faire chaude et pressante ; grossissez hyperboliquement mon faible mérite ; le péché de mensonge sera copieux, mais je le prends sur mon compte.

Berlin m'a fait remarquer¹², il faut qu'il me fasse arriver.

Tout à vous de coeur, votre humble collègue G. Lamé

PS: M. Arago qui sait [...] que je vous écris, et pour quel sujet, veut que j'insiste près de vous pour que la lettre n'ait pas l'air d'avoir été demandée !! Quel mensonge, mais je me charge encore de celui-là.

Jacques Philippe Marie Binet, le « concurrent sérieux » de Lamé, n'en est pas non plus à sa première tentative. Soutenu par la droite catholique monarchique alors au pouvoir¹³, il avait néanmoins échoué face à Claude Louis Henri Navier lors de l'élection de 1824 à la section de mécanique¹⁴. Il n'a pas plus de succès cette fois-ci. Dirichlet recommande en effet la candidature de Lamé¹⁵; celui-ci, classé le 27 février en première ligne ex-aequo avec Binet par la section de géométrie, est élu, avec quelques voix d'avance seulement, le 6 mars 1843 (Binet le sera le 10 juillet de la même année, remplaçant cette fois Lacroix, mort le 24 mai). Le soulagement¹⁶ de Lamé ne semble pourtant pas sans mélange, comme en témoignent ces remerciements à Dirichlet, plusieurs mois plus tard, le 31 décembre 1843 :

C'est encore [votre amitié] qui me fait éprouver aujourd'hui un vif chagrin de ne vous avoir pas remercié plutôt de l'empressement que vous avez mis à servir chaudement mes intérêts. Mais vous ne sauriez vous figurer l'étourdissement qui a suivi le triomphe tant désiré : d'un état d'isolement et de découragement prolongé pendant plusieurs années, je suis passé presque subitement à la position qui avait été mon point de mire depuis vingt-cinq ans et que je croyais perdue pour moi à tout jamais. Il m'a fallu un long temps afin de m'habituer à ce succès inespéré et pour ressusciter en moi des facultés qu'il est maintenant de mon devoir de cultiver. J'ai beaucoup à travailler si je veux remplir sans trop d'infériorité ma nouvelle fonction de juge es sciences mathématiques et [...] à présenter un nouveau travail pour essayer de justifier le choix de mes collègues — voilà beaucoup d'excuses cependant je me reconnais coupable de négligence à votre égard et je vous en demande humblement pardon.

En feuilletant les *Comptes rendus de l'Académie* dans l'année suivant son élection, on constate qu'il est effectivement chargé de plusieurs rapports, mais son travail personnel se limite à un mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes, lu le 21 août 1843. L'analyse de l'algorithme d'Euclide pour calculer le p.g.c.d. de deux entiers, présentée à l'Académie le 28 octobre 1844, vient donc à point nommé. Lamé n'évoque pour motiver son résultat que les informations imprécises qui figurent dans les traités d'arithmétique élémentaires. Or, Binet lui-même a publié en 1841 une estimation du nombre d'étapes nécessaires dans une variante de ce calcul (utilisant les moindres restes dans les divisions successives)¹⁷, et en

---

¹² Début 1839, Lamé avait été élu à l'Académie des sciences de Berlin, avec l'appui de Dirichlet.

¹³ La liste de ses appuis en 1843 est à cet égard significative. Sur Augustin Cauchy et François Moigno, voir Belhoste, Bruno, *Cauchy. Un mathématicien légitimiste au XIX^e siècle*, Paris : Belin, 1985.

¹⁴ Sur cette élection, voir Baker, Keith M. et Stigler, Stephen, «Legendre vs the Ministry of the Interior », *Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics* 1(2) (2005).

¹⁵ Cette lettre de recommandation, non datée, a été retrouvée dans les papiers de Sylvestre Lacroix et publiée dans Taton, René, «Une lettre inédite de Dirichlet », *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* 7 (1954), pp. 172-175. «Aucune intervention ne pouvait être plus désintéressée et plus justifiée que celle de Dirichlet », écrit Taton. La sollicitation de Lamé rapportée plus haut et jusqu'alors inédite permet d'en préciser le contexte et la date.

¹⁶ Sous la signature de cette lettre, Lamé a écrit en beaucoup plus gros caractères «membre de l'Institut » suivi de plusieurs points d'exclamation.

¹⁷ Le thème apparaît en fait hors de l'Académie à la fin des années 30. Sur ces résultats antérieurs,

1843, il a fourni une formule explicite du terme général de la suite récurrente, maintenant connue sous le nom de suite de Fibonacci, qui est centrale dans la preuve de Lamé. Celui-ci intervient donc ici sur les terrains de son concurrent (qui réplique dès novembre 1844 par un commentaire explicitant les liens de ses travaux au résultat obtenu par Lamé).

II. 2. Calculer le p.g.c.d.

Soient deux entiers a et b , avec $0 < b < a$. Un procédé classique pour obtenir le plus grand diviseur commun à a et b est donné par une suite de divisions euclidiennes : on considère d'abord la division de a par b , $a = q b + R_0$, avec $R_0 < b$. Si $R_0 = 0$, b divise a et on a terminé. Si $R_0 \neq 0$, on itère, $b = q' R_0 + R_1$, avec $R_1 < R_0$ et ainsi de suite. Le p. g. c. d. est le dernier reste non nul obtenu.

La question discutée par Lamé est l'estimation du nombre d'étapes nécessaires pour obtenir ce p.g.c.d. en fonction de la taille des entiers a et b . L'analyse de Lamé commence par le cas où les deux entiers sont deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci. Celle-ci est, rappelons-le, définie par une relation de récurrence : $u_0=1$, $u_1=1$, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$. Donc, $u_2=2$, $u_3=3$, $u_4=5$, $u_5=8$, etc. La relation de récurrence définissant cette suite peut aussi être interprétée comme la division euclidienne de u_{n+1} par u_n , avec comme reste u_{n-1} . Le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre le p. g. c. d. de u_{n+1} et u_n (en l'occurrence le reste $u_{n-1}=1$) par ce procédé euclidien est donc $n-1$. Il s'agit donc pour Lamé d'estimer le nombre $n-1$ de termes précédant un terme donné u_n de la suite, en fonction du nombre de chiffres de u_n . Pour cela, Lamé procède à l'envers, il compte le nombre de termes de la suite ayant $k+1$ chiffres.

Soit $t' = u_r$ le plus petit terme avec $k+1$ chiffres. On a : $10^k = t' < 10^{k+1}$, et $u_{n-1} < 10^k$, $u_{n-2} < 10^k$. Donc $10^k = t' < 2 \cdot 10^k$. Quant au terme suivant, t'' , qui vaut $t' + u_n$, il vérifie donc : $(3/2) \cdot 10^k = t'' < 3 \cdot 10^k$. De même pour les termes successifs : $(5/2) \cdot 10^k = t''' < 5 \cdot 10^k$, $4 \cdot 10^k = t'''' < 8 \cdot 10^k$, $(13/2) \cdot 10^k = t''''' < 13 \cdot 10^k$. Le terme suivant est supérieur à $(21/2) \cdot 10^k$, il a donc plus de $k+2$ chiffres. Donc, pour tout k , le nombre de termes de la suite ayant un nombre de chiffres fixés $k+1$ est 4 ou 5, selon la localisation de t''''' entre $(13/2) \cdot 10^k$ et $13 \cdot 10^k$. Lamé conclut donc que le nombre d'étapes nécessaires au calcul du p.g.c.d. de deux termes de cette suite est en tout cas inférieur à 5 fois le nombre de chiffres du plus petit des deux. Il utilise ensuite cette suite pour localiser (et donc compter) les restes successifs R_i dans le cas général du p.g.c.d. de deux entiers a et b . Supposons d'abord que deux termes (qui sont alors forcément consécutifs) R_i et R_{i-1} se trouvent coincés entre deux termes de la suite de Fibonacci, autrement dit $u_{k-1} < R_{i-1} < R_i < u_k$. Puisque u_k ne contient u_{k-1} qu'une seule fois, au sens de la division euclidienne, c'est aussi le cas pour les R_j , donc $R_i = R_{i-1} + R_{i-2}$. Mais alors, on voit que $R_{i-2} < u_{k-2}$, donc il n'y a pas d'autre reste R_j entre u_{k-2} et u_{k-1} . Si maintenant $R_i = m R_{i-1} + R_{i-2}$, avec un entier $m > 1$, Lamé montre aussi facilement que R_{i-1} est le seul reste de la suite des R_j entre deux nombres de Fibonacci et qu'au moins un autre intervalle entre deux termes de la suite de Fibonacci ne contient pas de reste de la suite des R_j . Le décompte du nombre de restes s'en déduit. Lamé a finalement montré que le nombre d'étapes nécessaires au calcul du p.g.c.d. de a et b est inférieur à 5 fois le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de b .

---

dont ceux de Binet, et la connaissance que pouvait en avoir Lamé, voir Shallit, *op. cit.* in n. 4, complété par Schreiber, Peter, «A supplement to J. Shallit's paper 'Origins of the Analysis of the Euclidean Algorithm' », *Historia mathematica* 22 (1995), pp. 422-424. De nombreuses informations historiques supplémentaires figurent dans l'article à vocation pédagogique de Verdier, Nobert ; Bordellès, Olivier ; Schott, Bernard et Seitz, Jean-Jacques, «Variations euclidiennes », *Repères* 73 (2008), pp. 73-88.

III. « UNE PASSION MALHEUREUSE... »

En décembre 1843, après avoir remercié Dirichlet pour sa recommandation à l'Académie, Lamé, nous l'avons vu au début de cet article, accuse aussi réception de son mémoire sur les formes quadratiques : « j'ai toujours une passion malheureuse et fort peu légitimée pour la théorie des nombres. L'idée de nombres complexes me paraît féconde, et je ne serais pas étonné que vos belles recherches sur ce sujet ne missent enfin sur la voie d'une démonstration complète du dernier théorème de Fermat. » Au cours des années suivantes, Lamé retourne en effet au théorème de Fermat, mais avec moins de succès qu'auparavant. Comme il l'explique à l'Académie le 1^{er} mars 1847, le lieu d'achoppement dans la généralisation de sa démarche pour l'exposant 7 venait de la « trop grande inégalité des deux facteurs dans la factorisation en deux facteurs du premier membre de l'équation » de Fermat (l'analogue de $x^7 + y^7 = z^7$ et X ci-dessus). S'appuyant sur l'arithmétique des nombres complexes (qu'il semble surtout connaître par les articles de Dirichlet, mais qui s'est développée au cours des années 1830 dans les travaux de Gauss, Jacobi, Dirichlet, Eisenstein, Kummer), Lamé tente une approche fondée sur la factorisation en p facteurs de $x^n + y^p = z^p = (x + y)(x + yz)(x + yz^2) \dots (x + yz^{p-1})$

pour un exposant p premier et où z est une racine primitive complexe de l'unité. Dès 1844, Kummer avait produit les premiers exemples numériques (pour $p=23$) montrant que les règles usuelles de l'arithmétique ne s'appliquent plus nécessairement à ces facteurs complexes (en particulier la décomposition en facteurs premiers n'est plus nécessairement unique, et par conséquent, il n'est plus possible de déduire d'un produit qui est une puissance p -ième le fait que chaque facteur est lui-même à peu près une telle puissance). Ignorant ce travail de Kummer, Lamé utilise sans précaution les règles ordinaires en 1847, et est désavoué par Liouville en pleine séance de l'Académie. Les exemples de Kummer sont republiés dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, et bientôt suivis de ses articles sur les nombres idéaux ; ceux-ci permettront au mathématicien allemand de prouver dans la décennie suivante de nombreux nouveaux cas du théorème de Fermat et d'obtenir le Grand Prix de l'Académie des sciences quelques années plus tard¹⁸. À Dirichlet, Lamé avoue dès juin :

Je vous demande humblement pardon de m'être étourdiment jeté sur un domaine scientifique que vous aviez déjà si admirablement exploité. [...] Les sages avis de Liouville m'ont désillusionné ; j'ai rougi de ma folle équipée. J'ai néanmoins conservé l'espoir de la racheter à force de travail. [...] Ah si vous aviez été à Paris ou que j'eusse été à Berlin, tout cela ne serait pas arrivé. Que de chagrins épargnés.

Lamé revient encore sur le cas de l'exposant 5 dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, où il étudie cette fois avec soin les conditions de factorisation des nombres formés à partir des racines 5-ièmes de l'unité, mais ces essais sur le cas général, toujours en 1847, semblent vite stoppés. Près de vingt ans plus tard, en 1865, juste avant sa mort, il revient sur le cas de l'exposant 3 dans deux articles portant sur la pratique des binômes cubiques, et incluant des tables de sommes et de différences de cubes d'entiers. Il y examine des solutions d'équations du type $x^3 + y^3 = Az^3$ comme $37^3 + 17^3 = 6 \cdot 21^3$ ou $109^3 - 90^3 = 19 \cdot 31^3$. Son but avoué est « d'indiquer le mot de la dernière énigme de Fermat, laquelle consiste à deviner comment il a pu découvrir ses théorèmes. »

---

¹⁸ Les interventions de Lamé à l'Académie et les travaux de Kummer sont étudiés en détail dans le livre d'Edwards, *op. cit.* in n. 2. Pour une vision d'ensemble de l'histoire de l'arithmétique des nombres complexes au XIX^e siècle, voir aussi Goldstein, Catherine ; Schappacher, Norbert et Schwermer, Joachim, *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin, Heidelberg : Springer, 2007.

IV. LA THÉORIE DES NOMBRES SELON GABRIEL LAMÉ

Entre 1830 et 1860 s'est mis en place un champ de recherches international centré sur la théorie des nombres, mais intégrant des techniques et des points de vue d'autres branches des mathématiques et contribuant à leur développement propre¹⁹. Liant théorie des équations, formes, congruences et lois de réciprocité, fonctions complexes (en particulier elliptiques), séries, ce champ rassemble des mathématiciens comme Dirichlet, Gotthold Eisenstein, Kummer ou, en France, Charles Hermite ou Cauchy. C'est à partir de leurs échanges de problèmes, d'articles, que s'établiront à la fin du siècle des disciplines arithmétiques aussi différentes que la théorie analytique des nombres ou la théorie des corps de nombres algébriques. Malgré ses liens personnels avec plusieurs de ses contributeurs, et en tout premier lieu Dirichlet, Lamé n'appartient pas à ce champ. On ne voit pas intervenir dans son travail arithmétique les outils analytiques caractéristiques de ce champ — Hermite ira jusqu'à écrire que la théorie des nombres n'est qu'une anticipation des fonctions elliptiques — et son utilisation tardive des nombres complexes reste minimale. Il est significatif à cet égard que Lamé semble ignorer un article de Carl Jacobi, pourtant traduit dans le *Journal* de Liouville en 1843 et sur lequel Liouville s'appuie en 1847 pour critiquer ses nouveaux essais sur le théorème de Fermat : cet article, qui pose le problème de la décomposition en facteurs complexes et le lie à la représentation des nombres par des formes quadratiques, inaugure en effet de nombreuses recherches dans le champ. C'est en ce sens, peut-être, que la passion de Lamé pour la théorie des nombres est malheureuse, car il apparaît à la marge de l'expansion originale qu'elle connaît dans les années 1840.

Pourtant, comme nous l'avons vu, les résultats de Lamé ne sont pas négligeables et ils trouvent des échos durables auprès de ceux qui, hors de ce champ, préconisent de rester au plus près du langage des énoncés pour les prouver et plus généralement s'intéressent à l'arithmétique du point de vue élémentaire. Beaucoup des auteurs concernés sont liés aux nouveaux « journaux intermédiaires », destinés aux enseignants, qui apparaissent à cette époque, comme les *Nouvelles Annales*, où les travaux de Lamé, qui en constituent la trace académique, continuent d'être discutés et développés²⁰.

Le mode de travail de Lamé se prête particulièrement bien à ces interactions. On retrouve en effet, dans ses articles de théorie des nombres les pratiques qu'il a mis en œuvre dans d'autres branches des mathématiques. Tout d'abord, l'observation d'un exemple, pris comme paradigme, joue un rôle important dans son approche : nous l'avons vu tant pour l'étude du cas de l'exposant 7 que pour son retour ultérieur au cas de 5 lorsqu'il explore une nouvelle technique, nous l'avons vu encore dans le rôle que joue la suite de Fibonacci pour son étude de l'algorithme d'Euclide. Une démarche similaire est revendiquée par exemple dans son travail sur les surfaces isothermes de 1843 : « Je n'ai pu attendre le but que je me proposais, écrit alors Lamé, qu'en ayant recours à des procédés particuliers qui paraissent intimement liés à cette sorte d'équations différentielles et qui doivent mettre sur la voie pour parvenir à les intégrer dans des cas plus généraux²¹. » D'autre part, l'organisation du matériel algébrique est fondamentale : le travail sur les équations doit être méthodiquement

---

¹⁹ Ce champ que nous avons baptisé « analyse arithmétique algébrique » est étudié dans Goldstein, Catherine et Schpaccher, Norbert, « A Book in Search of a Discipline », in *The Shaping...*, *op. cit.* in n. 18, pp. 3-65, particulièrement 24-58. Nous y détaillons aussi le rôle de l'article de Jacobi évoqué plus loin.

²⁰ Voir là-dessus, Verdier, Norbert et al., *op. cit.* in n. 17 et les réseaux évoqués à propos de combinatoire dans la contribution de Jérôme Laurentin.

²¹ Lamé, Gabriel, « Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes », *Journal de mathématiques pures et appliquées* 8 (1843), pp. 397-434, cit. p. 399.

conduit, en jouant sur la symétrie et la régularité des procédures, afin de diriger la marche vers la solution. «Les calculs les plus longs deviennent une somme de transformations semblables, et il ne faut pour achever le tout, que la patience de répéter la partie principale²² ». La discussion du théorème de Fermat pour l'exposant 7 a montré comment la symétrisation des factorisations est ainsi utilisée pour mettre à jour les propriétés arithmétiques de quantités constitutives algébriquement du problème. L'algèbre, au sens de la théorie des équations, reste pour Lamé l'outil heuristique par excellence dans le domaine arithmétique. Cette perspective demeurera fructueuse tout au long du siècle²³, comme en témoigne par exemple l'œuvre d'Édouard Lucas.

---

²² Lamé, Gabriel, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, Paris : Bachelier, 1818, cité par Evelyne Barbin, «L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé », ce numéro.

²³ Sur ce courant, voir Goldstein, Catherine, « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) », *Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum* New ser. 3, pp. 187-214. Sur les recherches de Lucas, voir Décaillot, Anne-Marie, «L'arithméticien Édouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation », *Revue d'histoire des mathématiques* 4, pp. 191-236.