Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

44 | 2009

Gabriel Lamé (1795-1870) : Les pérégrinations d'un
ingénieur au XIX^e siècle

Réflexions sur la triangulation des polygones convexes

Jérôme Laurentin

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/sabix/693>

DOI : 10.4000/sabix.693

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 1 octobre 2009

Pagination : 141 - 150

ISBN : ISSN N° 2114-2130

ISSN : 0989-30-59

Référence électronique

Jérôme Laurentin, « Réflexions sur la triangulation des polygones convexes », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 44 | 2009, mis en ligne le 26 mai 2011, consulté le 08 septembre 2020. URL : <http://journals.openedition.org/sabix/693> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.693>

Ce document a été généré automatiquement le 8 septembre 2020.

© SABIX

Réflexions sur la triangulation des polygones convexes

Jérôme Laurentin

- 1 Le travail de Gabriel Lamé consacré à la triangulation des polygones convexes semble à première vue anecdotique au regard de l'ensemble de son oeuvre. Il se réduit pour tout dire à trois pages, extraites d'une lettre adressée à Joseph Liouville datée du 25 août 1838. Sous la plume même de l'auteur, cette publication négligée ne sera jamais évoquée, pas même dans l'analyse de ses travaux, rédigée pour soutenir sa candidature au poste d'Académicien, en 1842...
- 2 Le contexte de cette lettre est le suivant : Conformément à sa pratique éditoriale, Joseph Liouville publie dans le tome 3 de son *Journal de mathématiques pures et appliquées*, la réponse à une question qu'il a soumise peu de temps auparavant à une communauté mathématique dont il ne dit rien mais dont on peut supposer qu'elle fait vivre sa jeune revue qui n'a alors que deux ans. Cette question, il la doit à l'érudition d'Orly Salomon Terquem, comme lui ancien polytechnicien mais de vingt sept ans son aîné (promotion 1801). C'est un soutien actif dans l'élaboration de sa revue, alors bibliothécaire au dépôt d'artillerie de Paris après avoir été professeur de mathématiques transcendantes au lycée de Mayence. Son insatiable curiosité pour les textes anciens, en particulier étrangers, le confronte très certainement au problème du nombre de triangulations possibles des polygones convexes abordé quatre-vingt ans plus tôt par Euler et Segner. Ces deux auteurs résolvaient chacun à leur manière cette question et obtenaient, à sept ans d'intervalle, deux formules distinctes dont l'équivalence, jusque là, n'était pas prouvée. Liouville précise : « L'identité des équations n'est pas facile à établir. M. Terquem y étant parvenu à l'aide de quelques propriétés des factorielles, m'a proposé ce problème. Je l'ai communiqué ensuite à divers géomètres : aucun d'eux ne l'a résolu ; M. Lamé a été plus heureux : j'ignore si d'autres avaient obtenu avant lui une solution aussi élégante ».
- 3 L'autre raison d'extraire ce problème de l'oubli est qu'il permet d'inscrire une question de dénombrements, dans l'air du temps, dans le champ de la géométrie. Cette dernière est critiquée, entachée par sa connivence avec une méthode synthétique jugée obsolète.

L'année même qui précède l'article qui nous intéresse, elle est d'ailleurs défendue avec talent par Chasles dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* qui offre par ailleurs une large place aux travaux de Gabriel Lamé. Les mathématiciens qui vont répondre au défi suscité par l'éloge de l'efficacité laméenne, seul entre tous à résoudre le problème posé, nous intéressent car, hormis la mise en lumière d'un travail oublié de Lamé, ils mettent en scène une frange atypique de la communauté mathématique de leur temps tout en éclairant le fonctionnement des premières années du Journal de Liouville.

Confrontation des solutions

L'état de la question en 1751

- 4 Leonhard Euler et Jan Andrej Segner dénombrent à leur manière les façons de diviser un polygone convexe de n côtés en triangles à l'aide de diagonales non sécantes. Ils s'accordent, à l'issue d'une récurrence immédiate, sur les $n-2$ triangles en jeu ainsi que sur les $n-3$ diagonales activées lors de chaque triangulation puisque, parmi les $3n-6$ côtés activés, n sont sur les côtés du polygone et les $2n-6$ diagonales restantes sont chacune comptées deux fois.
- 5 Dans une lettre en date du 4 septembre 1751 adressée à Christian Goldbach (1690-1764), diplomate, secrétaire de l'Académie de Saint-Petersbourg et mathématicien, Léonhard Euler (1707-1783) dénombre, en passant, les façons de décomposer un polygone convexe de n côtés grâce à ses diagonales¹. Il propose une formule qui fournit le nombre noté x de triangulations possibles² mais ne fournit ni démonstration ni indication de sa démarche. Après avoir donné le nombre de triangulations possibles pour n variant de 1 à 10 il poursuit en assurant qu'une induction permet d'obtenir :

$$P_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \cdots (4n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (n-1)}$$

- 6 En 1759, Jan Andrej Segner³ publie dans les *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitane* une autre solution au problème résolu huit ans plus tôt par Euler. La démonstration, géométrique, est la même que celle développée par Lamé et repose sur la mise en évidence d'une partition de l'ensemble des triangulations possibles, nous y reviendrons. Elle conduit à une relation distincte de celle d'Euler, à savoir :

$$P_{n+1} = \sum_{i=2}^n P_{n+2-i} P_i \quad \text{ou} \quad P_2 = 1$$

- 7 et permet de fournir les premières valeurs de P_n . Une erreur de calcul conduit à des valeurs erronées de P_{15} à P_{20} qui sont aussitôt corrigées par Euler qui précise le nombre de triangulations pour n variant de 3 à 25. Il ne décrit pas davantage sa méthode, se contentant de fournir la relation de récurrence utilisée, à savoir :

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n, \quad P_3 = 1$$

- 8 Depuis cette date, aucun lien n'est fait entre les deux formules et surtout aucune preuve ne vient appuyer la relation obtenue par Euler. Autrement dit, entre 1760 et 1838, deux relations analytiques se côtoient et s'ignorent en réponse à même problème.

L'approche de Gabriel Lamé

- 9 La solution de Terquem, évoquée par Liouville, et qui fait jouer les « propriétés des factorielles » n'est pas donnée et le lecteur conçoit d'emblée qu'une preuve analytique intéresse peu les rédacteurs du journal qui privilégient la seule démonstration géométrique de Lamé.
- 10 La réponse qu'il présente se décompose ainsi⁴ : Il obtient d'abord la formule de Segner par une méthode dont nous avons dit qu'elle était similaire à celle mise en oeuvre par ce dernier. Elle consiste à fixer la base d'un des triangles activés lors de la triangulation et à modifier circulairement le troisième sommet parmi les $n - 2$ sommets possibles. On obtient ainsi une partition de l'ensemble des triangulations possibles, le cardinal de chacune des parties étant aisé à déterminer. En effet, en notant $A_0A_1...A_n$ le polygone convexe donné de $n+1$ côtés⁵, P_{n+1} le nombre de triangulations possibles et A_0A_1 la base fixée, alors le nombre de triangulations incluant le triangle $A_0A_1A_2$ vaut P_n , le nombre de celles incluant le triangle $A_0A_1A_3$ vaut $P_{n-1} \cdot P_3$ et plus généralement, le nombre de triangulations activant le triangle $A_0A_1A_k$ vaut $P_{n-k+1} \cdot P_k$ puisque le polygone $A_1A_2...A_k$ de k côtés peut être triangularisé de P_k façons et pour chacune d'entre elle, le polygone $A_0A_k...A_n$ qui possède $n-k+1$ côtés peut être triangularisé de P_{n-k+1} façons. La relation de récurrence obtenue par Segner en découle immédiatement.
- 11 Dans une deuxième partie, Lamé revient à un polygone de n côtés. Il dénombre alors toutes les triangulations qui activent le sommet A qu'il regroupe en fonction de la diagonale activée, issue de ce sommet. Puisqu'il y a $n - 3$ diagonales, il y a donc $n - 3$ groupes de décomposition possibles. Sur le même principe que précédemment, il obtient :

$$P_3 \cdot P_{n-1} + P_4 \cdot P_{n-2} + \dots + P_{n-1} \cdot P_3$$

triangulations qui activent le sommet A (on se rapportera au cas de l'hexagone ci-dessous, les groupes activant successivement les diagonales $[AC]$, $[AD]$ et $[AE]$ colorées en rouge étant présentés en ligne). Pourtant il ne s'agit plus d'une partition des triangulations possibles puisque toutes les triangulations qui n'activent pas le sommet A sont absentes. Par ailleurs, certaines d'entre elles se répètent...

- 12 L'idée de Lamé est alors d'effectuer le même dénombrement pour chacun des sommets. La symétrie des notations permet d'affirmer qu'on a ainsi

$$n \cdot (P_3 \cdot P_{n-1} + P_4 \cdot P_{n-2} + \dots + P_{n-1} \cdot P_3)$$

triangulations. Il lui suffit alors d'en déterminer le nombre de répétitions en notant que les $n-3$ diagonales qui signent une triangulation mettent en jeu $2n - 6$ sommets non tous distincts et donc, dans le cadre du protocole précédent, chaque décomposition est répétée $2n - 6$ fois.

- 13 En conséquence,

$$P_n = \frac{n \cdot (P_3 \cdot P_{n-1} + P_4 \cdot P_{n-2} + \dots + P_{n-1} \cdot P_3)}{2n-6}$$

- 14 Ce qui permet de conclure en identifiant les relations obtenues dans chacune des deux parties, à savoir :

$$\frac{2n-6}{n} \cdot P_n = P_3 \cdot P_{n-1} + P_4 \cdot P_{n-2} + \dots + P_{n-1} \cdot P_3 = P_{n+1} - 2P_n$$

- 15 ou encore

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n$$

- 16 Lamé prouve donc que la formule d'Euler découle de celle de Segner, certes avec élégance, mais échoue à prouver la réciproque et donc l'équivalence des deux relations de récurrence.

Les réactions suscitées

- 17 Eugène Catalan (X1833) alors répétiteur adjoint de géométrie descriptive et examinateur suppléant à Polytechnique, est le premier à réagir, dès octobre 1838⁶. Il ne propose pas de solution nouvelle au problème posée par Terquem mais prolonge la réflexion de Lamé.
- 18 Il se dégage d'emblée du problème géométrique et établit le lien avec le nombre de combinaisons de n lettres prises parmi $2n$, noté dans son article $C_{2n,n}$ fait une incursion en analyse en montrant que l'équivalence des deux relations, jointe aux fonctions eulériennes, permet de résoudre l'équation

$$\sum_{i=0}^n A_i A_{n-i} = 0$$

- 19 Enfin il établit le lien avec le nombre X_{n+1} de parenthésages possibles en deux groupes de n facteurs distincts, supposés disposés « en ordre alphabétique » puisque $X_{n+1} = P_{n+1}$.
- 20 Deux mois plus tard, en novembre, trois nouvelles contributions permettent d'enrichir le tome 4 du journal, publié en 1839. Celle de Jacques Binet, d'Eugène Catalan à nouveau et d'Olinde Rodrigues (1795-1851). L'ordre dans lequel elles nous sont présentées dans le journal n'est pas celui dans lequel elles sont parvenues à Liouville. Binet, dont la solution est livrée en premier, dit avoir été informé des preuves de Rodrigues et de Catalan mais sa rédaction offre l'avantage de présenter un aperçu historique de la question. Suit la démonstration de Catalan mais Liouville, en note, indique qu'il n'avait pas songé, dans un premier temps, à publier cette preuve, disposant alors d'une démonstration plus simple. Seule celle d'Olinde Rodrigues répond à ce critère. Nous choisissons pour notre part de restituer leur ordre de réception par Liouville.
- 21 Olinde Rodrigues élabore sa solution en deux temps. A cette époque il a 43 ans et reprend goût aux mathématiques après s'être profondément investi dans le mouvement saint-simonien. Dans une première note publiée par Liouville dès le tome 3, il revient sur le nombre de produits possibles de n facteurs et montre qu'il n'est nul

besoin pour l'obtenir de la géométrie et de la preuve de Lamé sur les triangulations⁷. Pour autant il n'est pas insensible aux charmes de la géométrie et donne en premier une preuve de la formule d'Euler indépendamment de celle de Segner en appliquant le principe de continuité de Poncelet, loué par Chasles un an plus tôt dans son Rapport de 1837, par ailleurs son condisciple au lycée Charlemagne.

- 22 Sa démonstration s'inspire de l'idée qui fonde la démonstration de Lamé. Il considère d'emblée un polygone de $n+1$ côtés et met en évidence la même partition des triangulations possibles : « Rapportons successivement toutes les décompositions possibles de ce polygone à chacun des $n-1$ triangles qui ont pour base nn' et pour sommet l'un des $n-1$ sommets autres que n et n' ». Pour calculer le cardinal de chaque groupe, par exemple celui pour lequel le triangle $nn'k$ est fixe, Rodrigues note qu'il y a autant de décompositions possibles que dans le polygone obtenu en amenant n' en n et constituée « par rapport » à la diagonale ou au côté nk . Aussi la démonstration s'achève-t-elle par le dénombrement des triangulations qui s'appuient sur un côté ou une diagonale donnée et c'est justement l'objet de sa première partie... Il y rappelle en effet que le nombre de diagonales $(n-3)$ ajouté au nombre de côtés du polygones n vaut $2n-3$ et qu'il y a donc $(2n-3).P_n$ droites activées sur les P_n triangulations possibles du polygone obtenu après avoir amené n' en n . Il y a donc $(4n-6).P_n$ sommets activés, soit

$$\left(\frac{4n-6}{n} \right) P_n$$

- 23 droites qui activent un sommet donné parmi les n possibles.
- 24 Eugène Catalan, de son côté, renchérit en ajoutant une troisième formule de récurrence portant sur le nombre de triangulations possibles d'un polygone convexe, distincte à la fois de celle d'Euler et de celle de Segner⁸. Le raisonnement repose entièrement sur les dénombrements et Liouville, dans un premier temps, n'avait pas jugé le raisonnement suffisamment simple pour figurer dans son Journal. Le fait seul que Binet, « par une coïncidence assez remarquable », aboutisse de façon analytique à cette même relation le pousse à lever ses réticences. La méthode effectivement n'est pas simple mais la passer sous silence conduirait Liouville à prendre implicitement partie pour l'analyse, laissant à cette dernière la gloire de faire apparaître des résultats nouveaux. Nous renvoyons à la lecture de cet article de Catalan que nous ne pouvons pas commenter en détail ici. Écrivons toutefois la formule obtenue car elle est nouvelle et utilisons la notation aujourd'hui retenue pour désigner les nombres de Catalan, égaux au nombre de triangulations possibles d'un polygone de $n+2$ côtés à l'aide de n triangles :

$$C_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-k}{k+1} (-1)^k C_{n-k-1}, n \geq 1 \text{ avec } C_0 = 1$$

- 25 Jacques Binet (1786-1856) est professeur d'astronomie mathématique au Collège de France depuis 1823, bientôt successeur de Lacroix en 1843 à l'Académie des Sciences. Son article, le plus complet de ceux envoyé à Liouville, commence par une présentation historique qui détaille en particulier la preuve de Segner⁹. C'est l'occasion de relever la similitude frappante avec la première partie de la lettre de Lamé. Sans suggérer explicitement, en aucune manière, la connaissance de cette preuve par Lamé, à tous le moins cette première partie lui retire une part de l'admiration que son article avait suscitée. Au demeurant, sa preuve géométrique de la relation d'Euler, déduite de celle de Segner ainsi que la démonstration par Rodrigues de la formule d'Euler, « par une

considération synthétique du même genre » sont rappelées par Binet. Mais c'est là un effet rhétorique qui sert la mise en valeur de sa résolution analytique de l'équivalence. Il annonce d'ailleurs, non sans provocation et une certaine autosatisfaction : « On a eu quelquefois à remarquer que les choses les plus épineuses ne prenaient cette apparence que du point de vue d'où elles étaient considérées : la question dont il s'agit en présentera un nouvel exemple »¹⁰. La polémique entre l'efficacité respective de l'analyse et de la synthèse affleure et Binet a pris partie.

- 26 Nous devons toutefois reconnaître la simplicité et l'efficacité de la preuve analytique qui repose sur les propriétés des fonctions génératrices. Au passage, il ne manque pas de rappeler combien l'outil qu'il utilise dans ce cas à de nombreuses et récentes applications grâce à la théorie des probabilités de Laplace. Cette démonstration est aujourd'hui un classique des exercices d'oraux proposés aux concours des grandes écoles et se retrouve aisément. Pour Binet, il était fondamental que la preuve d'un passage possible de l'une à l'autre de ces deux formules par voie algébrique soit présentée... Liouville, beau joueur, lui offre la première place dans l'organisation des réponses qu'il hiérarchise.

L'éclairage d'une communauté à l'œuvre

Le contexte institutionnel

- 27 Lorsqu'il édite la solution de Gabriel Lamé, en 1838, Joseph Liouville vient d'être nommé professeur d'analyse et de mécanique à l'Ecole polytechnique et s'apprête à devenir en 1841 le quatrième professeur d'arithmétique sociale de l'Ecole, en alternance avec Charles Sturm. Entré à Polytechnique en 1825, à l'âge de seize ans et demi, il y a établi des liens solides avec François Arago, « le maître vénéré qui a guidé mes premiers pas dans la carrière mathématique »¹¹ écrit-il lors des funérailles de Charles Sturm qui était également proche d'Arago.
- 28 A cette date, le cours d'arithmétique sociale à l'Ecole polytechnique n'a que vingt ans et d'après Pierre Crépel : « Les divers documents disponibles aux Archives de l'Ecole Polytechnique ne semblent pas laisser de traces de cours touchant aux probabilités, ni à la statistique descriptive, ni à l'économie politique jusqu'à la réorganisation de l'Ecole en 1816. »¹² Il est alors frappant d'observer qu'aucun des enseignants qui se succèdent à ce poste n'a reçu la moindre formation. Pour autant, des progrès récents et importants ont été fait, notamment grâce aux développements de la mécanique céleste, la littérature s'étoffe et Arago, qui inaugure le cours, est profondément influencé à la fois par Laplace mais aussi l'ouvrage de vulgarisation de Lacroix¹³.
- 29 Rappelons que depuis 1810 il remplace Monge, à la demande de ce dernier, comme professeur d'analyse appliquée à la géométrie. C'est pourtant Jacques Binet, répétiteur de géométrie descriptive depuis 1807, qui devait logiquement lui succéder sur ce poste mais, parce qu'il est membre de la « congrégation », proche de la Compagnie de Jésus alors interdite, Monge lui préfère Arago qui n'a jamais étudié cette science. Devant ses réticences, arguant de son incompetence, Monge aurait rétorqué :
- « essayez, et vous verrez que cette théorie est plus claire qu'on ne le croie généralement ».
- 30 Arago, en 1819, occupe donc deux postes. En arithmétique sociale, il s'entoure de Claude Louis Mathieu, son condisciple (X 1803) et répétiteur en analyse appliquée à la

géométrie depuis 1816, qui doit bientôt devenir son beau-frère. Nommé en 1828 professeur d'analyse pour succéder à Ampère, Mathieu laisse la place à Félix Savary (X 1815, licencié en 1816) bien connu d'Arago et de Mathieu puisqu'en 1824 ils l'ont encouragé à démissionner de son poste d'ingénieur géographe pour travailler sous leur direction commune, à l'Observatoire, où ils le charge de travaux astronomiques.¹⁴

- 31 En 1830, Arago quitte l'Ecole polytechnique et entame une carrière politique. Savary lui succède naturellement, non seulement à l'Ecole mais aussi dans son fauteuil à l'Académie, dans la section d'Astronomie, en 1832. Il choisit à son tour un condisciple, Jean Marie Constant Duhamel (X 1813-1814, licencié 1816) alors directeur des études à l'Ecole polytechnique, comme répétiteur. Il poursuit durant huit années le cours d'Arago sans apporter de véritables changements avant que Duhamel ne lui succède pendant deux ans. Liouville et Sturm prendront sa place en 1841.
- 32 Entre temps, un cours de probabilité s'est ouvert à la Sorbonne à l'issue de débats houleux de février et mai 1834, après que Siméon Denis Poisson soit revenu sur sa décision et soutienne l'enseignement des probabilités en remplacement de celui de géométrie descriptive laissé vacant par le décès d'Hachette et contre l'introduction de la physique mathématique. Libri, ami de Guizot et dit-on sous l'impulsion d'Arago, est le premier à être nommé, devant Cournot. Il a fui l'Italie en 1830 et est accueilli en France par des amis scientifiques dont Arago fait partie. Ce dernier, alors secrétaire perpétuel à l'Académie des Sciences lui obtient en 1833 un enseignement au Collège de France où lui-même enseigne. Il n'est pas douteux que son parrainage l'ait aidé à obtenir ce poste à la Sorbonne. Pour autant, le peu de cas dont fait part Libri envers ce cours, son ignorance de cette science, son remplacement régulier par Siméon Denis Poisson entre 1836 et 1837 puis par Théodore Despyrour et enfin Bienaymé, après son départ pour Londres en 1848 à la suite de son procès, participent à faire des deux hommes des adversaires, Arago entraînant Liouville dans sa colère.
- 33 Quant à Irénée Jules Bienaymé (X 1815, licencié 1816) il enseigne peu. A la sortie de l'Ecole, il était entré à l'administration des finances dont il est devenu inspecteur général en 1834, avant de devoir quitter son service en 1848 pour « manque d'esprit républicain ». Cet enseignement tombe donc à point nommé mais ne dure pas car le gouvernement de Napoléon III requiert son expertise pour fixer la base des calculs des caisses de retraites. Lamé (X 1814, licencié 1816) lui succède, sur sa recommandation ? Si il savait peu du calcul des probabilités, au moins a-t-il travaillé à la préparation de son cours et dans son discours d'introduction de 1850, il avoue tout devoir à son condisciple, d'un an son cadet :

Depuis, je crois être parvenu à simplifier l'étude des probabilités, de manière à la rendre facilement abordable, sur tous les points, dans toutes les questions relatives à d'importantes applications. En outre, j'ai le bonheur de compter parmi mes amis, un savant (M. Bienaymé) qui aujourd'hui représente presque seul, en France, parmi les géomètres, la théorie des probabilités, qu'il a cultivée, avec une sorte de passion, dont il a successivement attaqué et détruit les erreurs ; je dois à ses conseils d'avoir bien compris la véritable portée de la science que j'enseigne, et quelles limites elle ne peut franchir sans s'égarer.
- 34 Les liens forgés plus de trente ans auparavant sur les bancs de l'Ecole polytechnique sont intacts et viennent confirmer l'impression laissée par notre rapide parcours historique. Une génération de polytechnicien, celle des élèves licenciés au retour de la Monarchie, en 1816, s'occupe à elle seule de l'enseignement des probabilités à l'université comme à l'X, sous la protection tutélaire et amicale d'Arago. Par ailleurs

cette proximité n'est pas seulement intellectuelle où conséquence d'un indéniable esprit d'Ecole, elle est aussi politique.

Des affinités politiques

- 35 Arago l'écrit dans ses mémoires, « j'ai trempé dans les excès de notre première révolution »¹⁵. Son père, petit propriétaire terrien, après avoir été élu à la tête de la commune d'Estagel devient caissier à la Monnaie de Perpignan en 1796. Reçu brillamment à l'Ecole polytechnique en 1804, il loge chez Hachette, son père « sensible » où il fait la connaissance de Poisson qui déjà occupe les fonctions d'adjoint au répétiteur d'analyse. C'est aussi à cette époque qu'il fait la connaissance de Claude Louis Mathieu, qui loge pour sa part à l'Observatoire où Delambre lui laisse une chambre. Ils partagent les mêmes convictions auxquelles ils donneront corps dans un même activisme politique. Lorsque vint pour Arago le « temps des barricades »¹⁶, à partir de 1830, son beau-frère le rejoint sur le scène politique et devient député d'extrême gauche à Mâcon de 1834 à 1863. Il signe en 1848 la mise en accusation du ministère Guizot avant qu'en février, l'Assemblée ne proclame à nouveau la République et reconduise les hommes du gouvernement provisoire sous la forme d'une Commission exécutive de cinq membres : Arago, Garnier-Pagès, Marie, Lamartine et Ledru-Rollin. Il est élu à l'Assemblée constituante mais tout comme pour Arago, les journées de juin achèvent cette période d'engagement.
- 36 Il est dès lors assez curieux d'observer le réseau qu'ils se sont forgés car il révèle leur engagement quotidien. En premier lieu, tous deux enseignants à l'Ecole polytechnique en 1816, sont solidaires de l'acte d'insubordination des élèves qui s'opposèrent en masse à la sanction de quelques-uns. A ce titre, nul doute que le préambule de l'ordonnance royale qui fait suite au licenciement des élèves ne les concerne et les heurte : « Mais la désobéissance récente et générale des élèves de cette Ecole aux ordres de leurs chefs, en même temps qu'elle nécessite une prompte répression, et un exemple pour l'avenir, vient de nous prouver que ces élèves, s'ils étaient introduits dans les services publics, y porteraient l'esprit d'indiscipline dont ils sont animés. »¹⁷ Le retour en Bretagne de Jean Duhamel semble donner raison à cette sentence puisqu'il est promptement exclu, pour avoir exprimé des sentiments trop libéraux, de la faculté de Rennes où il entame des études de droit. De la part d'Arago, soutenir explicitement la carrière d'Irénée Bienaymé, Jean Duhamel, Gabriel Lamé et Félix Savary, tous les quatre licenciés cette année là, est peut-être aussi un acte politique permettant d'invalider le jugement de l'ordonnance royale...
- 37 Par ailleurs, le mouvement saint-simonien est une autre clef de compréhension de ce réseau. Alors qu'il est étudiant à Polytechnique, Arago crée des liens d'amitié avec le Comte de Saint-Simon¹⁸ dont on peut penser qu'il partage l'espoir d'une mise en ordre de la société grâce aux sciences. Proche plus tard du courant doctrinaire, Jean Dhombres rappelle qu'« il inaugure le culte du savant et donne aux éloges traditionnels une portée médiatique : il ouvrait l'Académie au public et faisait défiler tout à tour les Fourier, Carnot, Watt, etc. »¹⁹. Durant les années 1798-1801, Saint-Simon s'est établi en face de l'Ecole polytechnique à la fois pour se former et créer des liens avec les élèves les plus doués. Il finance par exemple la scolarité de Poisson, colocataire d'Arago chez Hachette.

- 38 Terquem qui intègre l'Ecole en 1801 est également marqué par ses arguments. Il suffit pour en juger de rappeler son discours, prononcé lors d'une distribution de prix, devant le roi de Hollande, alors qu'il est professeur à Mayence, dans le but « d'esquisser aujourd'hui le tableau des avantages que la société retire des sciences exactes », développant l'argument selon lequel les sciences permettent de « travailler sans relâche au bonheur de nos semblables »²⁰. Il a déjà été dit combien Lamé partageait cette conviction et la proximité établie en Russie avec Prosper Enfantin, celui-là même dont Olinde Rodrigues était le tuteur à l'X avant de fonder avec lui, à son retour en France, la revue le « Producteur ». Ils y font la critique de la compétition que Rodrigues, étudiant, avait déjà refusé puisque, admis premier, devant Chasles, au concours d'entrée à l'école polytechnique comme à celui de l'école Normal en 1812, il avait préféré à ces deux écoles une inscription à l'université. Plus tard séparé d'Enfantin, il poursuivait son engagement comme par exemple en 1848 en soutenant vivement la République et en recommandant la participation des ouvriers aux bénéfices. Il rédigeait par ailleurs un projet de « Constitution Populaire » (*« tout pour le peuple et par le peuple »*).
- 39 Chacun à sa manière, à l'exception sans doute de Bienaymé, les protagonistes de cette histoire des probabilités, ont partagé les convictions politiques d'Arago. Hormis ceux que nous avons déjà cité parmi les sympathisant saint-simoniens, rappelons que Sturm a profondément souffert de la Restauration et qu'il accueille chaleureusement la révolution de juillet 1830 qui lui permet de mettre un terme à son exclusion des postes d'enseignement pour cause de protestantisme. C'est Arago, alors, qui le fait nommer professeur de mathématiques spéciales au collège de Rollin. Catalan, de son côté, s'engage politiquement en 1830, trois ans avant son entrée à l'Ecole polytechnique dont il sera expulsé l'année suivante pour cause d'un activisme politique qui ne cessera jamais. Docteur en mathématiques en 1841, sa carrière d'enseignant progresse peu. En 1846, il occupe le poste de mathématiques supérieures au lycée Charlemagne où il prend la suite de Francoeur et prend part à la révolution de 1848. Il est nommé au lycée Saint Louis en 1849. Le 2 décembre 1851, il réprouve le coup d'état qui conduit à la dissolution de l'assemblée nationale et refuse de prononcer le serment bonapartiste. Il perd ainsi son poste et passera les années suivantes à enseigner les mathématiques mais sans plus de postes fixes. En 1857, il aide des candidats à préparer le concours d'entrée à polytechnique dans plusieurs institutions privées (Jaufret, Barbet et Lesage) et ce n'est qu'en 1865 qu'il obtient la chaire de mathématique à l'Université de Liège, poste qu'il occupera jusqu'à sa retraite en 1884.

Une volonté pédagogique commune

- 40 Il est évidemment un autre point qui rassemble tous ces hommes et c'est la part jouée par l'enseignement dans leur vie.
- 41 A son retour de Bretagne, Duhamel devient répétiteur à l'Institution Massin et passe avec succès en 1826 l'agrégation qui lui permettra d'occuper son premier poste à Louis le grand. Entre temps, il est professeur libre puis directeur des études au collège Sainte-Barbe qui est un autre lieu de rencontre des membres du réseau qui nous intéresse. On y retrouve Joseph Liouville, Charles Sturm, Camille Geronno et en 1838, alors qu'il retourne à Paris après avoir enseigné trois ans au collège de Châlon sur Marne, Eugène

Catalan. Des liens se tissent et avec l'aide de Liouville, il obtient rapidement un poste de répétiteur en géométrie descriptive à l'Ecole polytechnique.

- 42 Duhamel, de son côté, enseigne en 1831 l'analyse à l'Ecole polytechnique où il est réputé être bon professeur. En 1832, il occupe la chaire d'algèbre supérieure à la Sorbonne tandis qu'il devient directeur des études à l'X. En 1836, il est nommé professeur d'analyse et de mécanique en deuxième année et c'est à ce titre qu'il reprend les leçons d'arithmétique sociales. Il publie également des manuels et des méthodes, comme son volumineux ouvrage en trois tomes, cinq parties, intitulé « Des méthodes dans les sciences de raisonnement »²¹.
- 43 Quant à son successeur en charge du cours d'arithmétique sociales, Liouville, son travail éditorial au cœur des *Annales* est évidemment une preuve de son intérêt pour l'enseignement et, de bien des manières, une forme d'engagement. Terquem, pour sa part, après avoir activement secondé Liouville, fonde en 1841 avec Camille Gergonne les *Nouvelles annales de mathématiques* qui succèdent aux *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne. Il partage en particulier avec Lamé cette même foi dans les développements de la physique mathématique et en 1851, dans son manuel de mécanique, il assénait : « Toute science doit aspirer à devenir mathématique. L'idéal de toute science, c'est la certitude. Or mathématiques et certitude sont synonymes. Le dernier degré de perfection surtout pour les sciences physiques est de devenir accessibles aux deux agents mathématiques, la ligne et le nombre, à la géométrie et à l'algèbre. »²²
- 44 Un an plus tôt, dans son discours inaugural de probabilités à la Sorbonne, Lamé faisait de son côté la critique du système éducatif français et fixait les grandes orientations qui selon lui allaient permettre de renouveler la recherche en France. Il s'oppose en particulier à une vision académique qu'il juge obsolète et stérile, à laquelle il se confronte violemment :
- Les autres cours de mathématiques, par leur régularité, leur permanence, par les méthodes générales qui les constituent, montrent en quoi consistent les anciennes applications de l'analyse, et comment les géomètres sont parvenus à vaincre les difficultés qu'elles présentaient. Mais, à moins de se transformer, et de se lancer dans la physique mathématique, ces cours classiques, réunis sous la singulière dénomination de mathématiques pures, ne donnent tout au plus que des indications vagues, sur la marche qu'il faudrait suivre pour aborder de nouvelles applications. Ils constatent, énumèrent, perfectionnent les travaux passés ; ils ne s'occupent pas des travaux à venir.²³
- 45 Pour autant, il ne s'agit pas d'abandonner ces préoccupations mais de les resituer dans la marche du progrès scientifique. Loin de recommander de développer dans les universités des cours de mathématiques appliquées, ces derniers subissent sa critique la plus virulente :
- Mais supposons que l'on supprime, dans l'enseignement des Facultés, tout cours de mathématique qui n'est pas classique, qui s'occupe d'une science inachevée ; qu'on le remplace par un cours appelé *pratique*, sur un genre d'application dont les limites restreintes sont atteintes depuis longtemps, tel que serait, par exemple, un cours de géométrie descriptive ; qu'on se borne à enseigner comment l'analyse et la géométrie se sont tirées d'affaire dans tous les problèmes depuis longtemps résolus, pour toutes les applications usuelles ; on satisfera sans doute à l'un des besoins de la pratique, mais d'une manière permanente, stationnaire, rétrograde peut-être.
- 46 Lamé concluait avec cette image qui n'est pas sans évoquer son propre parcours : « Et, si la difficulté est vaincue, ce sera par quelque voyageur étranger qui, ayant quitté les

routes battues pour séjourner quelques temps sur le terrain des sciences d'exploration, y aura appris comment les obstacles se surmontent. » Il esquisse ainsi une voie possible qu'il s'agit de poursuivre pour engendrer une recherche fructueuse, inspirée de sa propre démarche : Travailler dans un premier temps la physique mathématique pour, en retour, faire bénéficier la science « pure » de nouvelles sources d'inspirations qui désormais l'aiguillonnent.

Le cours de probabilités de Gabriel Lamé

- 47 En 1849, Gabriel Lamé succède à Irénée Jules Bienaymé. Il retrouve les dénombrements qui, au bout de compte, ne sont pas si anecdotiques dans sa carrière. Rappelons qu'avant même sa nomination comme professeur de probabilités à la Sorbonne, alors qu'il est jeune académicien, il publie en 1844, à l'Académie des Sciences, le théorème qui porte aujourd'hui son nom et qui assure que « Le nombre de divisions à effectuer, pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux entiers A , et $B < A$, est toujours moindre que cinq fois le nombre des chiffres de B »²⁴.
- 48 Il lui faut néanmoins bâtir un cours et comme nous l'avons vu, il s'investit avec ardeur dans cette tâche, avec l'appui de Bienaymé. Pour autant il serait faux d'imaginer qu'il se contente de reprendre le travail de son prédécesseur car son plan de cours révèle des préoccupations anciennes et personnelles, comme la triangulation des polygones convexes, ainsi que des inspirations puisées au sein des articles de Journal de Liouville, comme l'article de Catalan de 1837 consacré au problème dit aujourd'hui des « dérangements », relatif au Jeu de rencontre²⁵ et objet de sa première leçon.
- 49 Il est dès lors intéressant de comparer son cours à celui des ses prédécesseurs et en particulier à celui d'Arago. Le travail de Pierre Crépel²⁶ a permis de retrouver les notes manuscrites du cours de 1824-25 pris par Claude Hélène Hippolyte Renaud, né le 26 mai 1803 à Besançon : Au cours de cinq leçons, ce dernier abordait successivement les principes généraux du calcul des probabilités, en faisait l'application à des exemples simples, avant d'aborder les cas pratiques du calcul des chances dans les loteries et des tables de mortalité, ainsi qu'avait pu le faire Laplace dans son cours de référence à l'Ecole normale de l'an III. Sa quatrième leçon était consacrée aux problèmes d'intérêts composés, d'escomptes et de rentes et la dernière leçon s'achevait sur les problèmes d'assurances et d'arithmétique commerciale. Certaines notions en revanche ne sont pas abordées qui pourraient pourtant sembler fondamentales : le théorème de Jacques Bernoulli, l'évaluation de l'erreur commise en utilisant la méthode des moindres carrés, l'application des méthodes analytiques aux calculs probabilistes tandis qu'aucune application n'est faite à l'astronomie, à la géodésie, aux tirs ou encore aux élections.
- 50 Ce cours, jusqu'à 1849, va évidemment évoluer mais au regard du nombre d'heures, le marge de liberté est faible. Félix Savary ajoutera en 1831 le problème dit de « l'aiguille de Buffon », en 1834, le théorème de Bernoulli. Il faut dire que l'intitulé du cours à changé pour devenir « Eléments du calcul des probabilités et arithmétique sociale ». En 1836, la leçon consacrée aux moindres carrés passe dans le cours de géodésie et sera enseignée par Chasles. Duhamel, en deuxième année, ne modifiera pas ce programme et la réforme la plus notable est proposée par Liouville et Sturm qui rendent le cours plus abstrait. Pour autant, dès 1845, le nombre de leçons se réduit, passant à deux certaines années, et on peut penser que le bénéfice pour les jeunes polytechniciens dut être bien maigre.

- 51 Le projet de cours proposé à la Sorbonne est donc à ce titre très novateur puisqu'il se développe sur 26 leçons. Lamé choisit pour sa part de consacrer ses deux premières leçons à deux problèmes de dénombrement. Il impose d'emblée sa volonté de vouloir débiter par des exemples concrets d'application. Le premier, nous l'avons dit, est consacrée au problème des dérangements de n lettres et demeure très proche du travail de Catalan daté de 1837. Le second reprend le problème de la triangulation qu'il formule de la façon suivante : En considérant un polygone de n côtés, quelle est la probabilité qu'aucune diagonale aboutissant à B ne soit activé. Il montre alors que :

$$\mu = \frac{P_{n-1}}{P_n}$$

- 52 en considérant comme cas favorable l'ensemble des triangulations qui activent le triangle ABC . Au cours des années, les notations évolueront et Lamé cherchera sans succès, à travers ce problème des triangulations, à faire apparaître une propriété qui pourrait rivaliser avec l'application célèbre du problème de l'aiguille de Buffon comme moyen d'obtenir une valeur approchée de π . Il doit se contenter de noter que probabilité demandée tend vers $1/4$ quand n tend vers l'infini mais aussi que pour $n=7$, on a

$$\frac{4n-6}{n} = \frac{22}{7} \approx \pi$$

- 53 En 1862, il prolonge ses remarques par des considérations sur la parité de P_i et conclut alors que P_m impair si $m = 2^k + 1$.
- 54 Les leçons suivantes sont consacrées aux probabilités. Se succèdent les formules de probabilités totales, le problème de l'aiguille sous la forme d'un lancer d'une pièce de forme elliptique, le théorème des probabilités composées, les formules de loteries, les factorielles et leurs applications, le théorème de Bernoulli puis la loi normale et les théorèmes limites. L'organisation du cours est marquée sur l'ensemble de la progression par la volonté d'alterner développements théoriques et applications, dans un va et vient nécessaire, tel qu'il a été annoncé par son discours préliminaire. C'est donc sans surprise qu'il achève son programme au cours de deux leçons respectivement consacrées aux moyennes absolues thermiques sur l'ellipsoïde et à la représentation physique de la formule

$$P(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

- 55 J. Bertrand, dans son éloge de Lamé, regrette que son cours n'ait pas été plus largement diffusé et rappelle qu'un étudiant, au moins, a su tirer profit de son enseignement :

Soumis à toutes les exigences de la règle, Lamé, pour obéir aux programmes réglementaires, dut enseigner d'abord la théorie des chances et le calcul des probabilités. Son esprit, généralisateur et subtil, était particulièrement propre à recueillir et à provoquer une riche moisson sur ce terrain si périlleux et si vaste. Une courte note, insérée dans le Journal des mathématiques par un de ses auditeurs les plus zélés, reste la trace unique, mais durable, de ce trop rapide enseignement²⁷. La généralisation d'un théorème classique, obtenue par Lamé avec son élégance et son habileté analytique accoutumée, est réduite à l'évidence la plus intuitive par Emile Barbier, qui, enlevé trop tôt à la science et à ses amis, a su, par ce travail très-

modeste et très-court, donner aux meilleurs juges les plus hautes espérances et accroître les vifs regrets de ses maîtres.

- 56 Gabriel Lamé n'a pas eu la réputation d'être un grand pédagogue et il est difficile de dire si, en physique comme en mathématiques, il a fait école. Le fait qu'un de ses élèves, alors qu'il est âgé, prolonge l'une des ses leçons dans un article reconnu suffit à le sauver comme professeur et la santé mentale fragile d'Emile Barbier n'y a, n'en doutons pas, aucune part...

Conclusion

- 57 Il y a peu de temps, sur un forum de mathématiciens chevronnés, animé par Norbert Verdier, professeur à l'IUT de Cachan, la question du nombre de triangulations a de nouveau été posée et aucune réponse n'a été fournie, délaissée pour d'autres plus polémiques ou plus algébriques. Au regard des commentaires laissés par les intervenants, il semble que ce soit davantage une question de pratique plus qu'un manque d'intérêt qui explique cette absence de réponse. D'ailleurs il est assez symptomatique que notre enseignement n'ait retenu des articles que nous avons parcourus que la preuve de Jacques Philippe Marie Binet tandis que les autres ont été définitivement oubliées.
- 58 Au demeurant, gageons que Gabriel Lamé serait heureux d'apprendre que le problème des triangulations possibles d'un polygone convexe est aujourd'hui choisit comme l'exemple idéal du développement des mathématiques dans leur incessant aller-retour entre pratique et théorie.
- 59 Ainsi, à l'occasion d'un cycle de conférences organisées par la Bibliothèque nationale de France et la Société mathématique de France, Xavier Viennot, combinatoricien a, en mars 2007, proposé une conférence intitulée « D'une lettre oubliée d'Euler (1707-1783) à la combinatoire et à la physique contemporaine. Autour de la Lettre de Leonhard Euler à Christian Goldbach de 1751 ». Il fait des nombres de Catalan et de leurs propriétés l'une des clés des développements les plus récents non seulement de la combinatoire, à travers la théorie des graphes, mais de l'informatique, de la « visualisation de l'information », des « bio-mathématiques » ou encore de la « physique combinatoire ».
- 60 Sa conclusion, d'une phrase, résumait le sens de son intervention :
- Les théories mathématiques s'interpellent, s'entrecroisent, renaissent, se fondent entre elles
- 61 Pour sa part, le 23 novembre 1850, Gabriel Lamé concluait son discours d'ouverture du cours de probabilité en ces termes :
- Je conclus, des différents points que j'ai traités, que le calcul des probabilités doit être enseigné ici, comme un complément indispensable et utile aux autres cours de mathématiques ; comme présentant, par la nature et la variété de ses problèmes et de leurs solutions, une sorte de résumé de toutes les ressources de l'analyse, comme mettant sur la voie de plusieurs applications, constatant la nécessité de certaines théories, indiquant les progrès qu'elles doivent faire...

NOTES

1. Euler, Leonhard. *Leonhard Euler und Chritian Goldbach, Briefwechsel 1729-1764* : Juskevic, A.P. Winter, E. (editeurs), Akademie Verlag, Berlin, 1965.
2. Nombre que nous désignerons par P_n tout au long de cet article pour plus de commodités
3. Mathématicien hongrois (1704-1777), Segner effectue la plus grande partie de sa carrière en Allemagne sous le nom de Johann Andras von Segner. Il est le premier professeur de mathématiques à l'université de Göttingen...
4. Lamé, Gabriel, « Extrait d'une lettre de M. Lamé à M. Liouville sur cette question : Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t. III, 1838, pp. 505-507.
5. Lamé note pour sa part ABCDEF... le polygone convexe et AB la base de départ.
6. Catalan, Eugène, « Note sur une équation aux différences finies », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3 (1838), pp. 508-516.
7. Rodrigues, Olinde, « Sur le nombre de manières d'effectuer un produit de n facteurs », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3 (1838), p. 549.
8. Catalan, Eugène, « Solution nouvelle de cette question : Un polygone tant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ? », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4 (1839), pp. 91-94.
9. Binet, Jacques, « Réflexions sur le Problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut être partagée en triangles au moyen de ses diagonales », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4 (1839), pp. 79-90.
10. Binet, Jacques op. cit, p. 80.
11. Liouville, Joseph, « Discours de M. Liouville prononcé aux funérailles de M. Sturm », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 20 (1855), pp. 395-396.
12. Crépel, Pierre, « De Condorcet à Arago : L'enseignement des probabilités en France de 1786 à 1830 », *bulletin de la Sabix*, n° 4, disponible en ligne à l'adresse : www.sabix.org/bulletin/b4/probabilites.html.
13. Lacroix, Sylvestre François, *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, 1816, Paris.
14. Cet attachement durera jusqu'à la mort de Félix Savary puisqu'en mai 1841, alors qu'il est fatigué et malade, Mathieu l'accompagnera dans les Pyrénées-Atlantiques auprès de la mère d'Arago qui lui prodigua des soins avant qu'il ne s'éteigne, le 15 juillet 1841.
15. Arago, François, *Histoire de ma jeunesse*, publié par Kiessling, Schnée, 1854, p. 2
16. Daumas, Maurice, *Arago 1786-1853, la jeunesse de la science*, Paris, 1987.
17. Fourcy, Ambroise, *Histoire de l'Ecole polytechnique*, Paris, 1828, p. 335.
18. Dhombres, Jean, *Naissance d'un nouveau pouvoir : sciences et savants en France 1793-1824*, Paris, Payot, 1989, p. 267.
19. Dhombres, op.cit., p. 301.
20. Dhombres, op. cit., p. 607.
21. Duhamel, Jean M. C., *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, Paris, Gauthier-Villard, 1865.
22. Terquem, Orly, *Nouveau manuel de mécanique*, 3^{ème} édition, Paris, 1851.
23. Lamé, Gabriel, « discours prononcé dans la séance d'ouverture du cours de calcul des probabilités de la faculté des sciences, le 23 novembre 1850 », *Nouvelles annales de Mathématiques*, t.X, 1851, pp. 5-14.
24. Lamé, Gabriel « Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers », *Comptes-rendus de l'Académie des sciences*, Tome XIX, 1844, pp. 867-870.

25. Catalan, Eugène, « solution d'un problème de probabilités, relatif au Jeu de rencontre », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. 2, 1837, pp. 469-482
26. Crépel, Pierre, op. cit.
27. Barbier, Emile, « Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t. V (2è série), 1860, pp. 273-286.
-

AUTEUR

JÉRÔME LAURENTIN

Centre François Viète – Université de Nantes