Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

45 | 2010

Joseph Liouville, le bicentenaire (1809-2009)

Entretien avec Jesper Lützen : une invitation à étudier ses travaux

Norbert Verdier

Traducteur : Régine Lombard & Charles-Henri Pin

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/sabix/717>

DOI : 10.4000/sabix.717

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 1 janvier 2010

Pagination : 23 – 26

ISBN : ISSN N° 2114-2130 -

ISSN : 0989-30-59

Référence électronique

Norbert Verdier, « Entretien avec Jesper Lützen : une invitation à étudier ses travaux », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 45 | 2010, mis en ligne le 11 octobre 2011, consulté le 08 septembre 2020. URL : <http://journals.openedition.org/sabix/717> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.717>

Ce document a été généré automatiquement le 8 septembre 2020.

© SABIX

Entretien avec Jesper Lützen : une invitation à étudier ses travaux

Norbert Verdier

Traduction : Régine Lombard & Charles-Henri Pin

Interview de Jesper Lützen par Norbert Verdier¹

Norbert Verdier

- 1 Pourquoi avez-vous décidé de vous pencher sur les travaux de Liouville il y a quelques années ?

Jesper Lützen

- 2 Je venais de finir un livre sur la préhistoire de la théorie des distributions [Lützen, 1982] et un peu plus tôt, j'avais également travaillé sur la mise au point du concept de fonction. Dans ces ouvrages, c'était un concept mathématique qui était au centre de mes recherches, principalement fondées sur des publications existantes. Pour mon livre sur les distributions, j'avais réalisé une interview de Laurent Schwartz, qui avait aiguisé mon envie de faire une recherche biographique, ou du moins un travail où le thème central serait un mathématicien et ses travaux. J'ai alors entrepris une recherche approfondie dans le *Dictionary of Scientific Biography* afin de trouver le bon mathématicien. Je voulais une personnalité de premier plan du 18^{ème} ou du 19^{ème} siècle, qui ait apporté sa contribution à des domaines des mathématiques que je trouvais intéressants (y compris l'analyse et de préférence aussi la physique mathématique et mécanique), qui écrive dans une langue à ma portée (langue scandinave, anglais, allemand, français de préférence au latin), qui n'ait pas fait l'objet de trop d'études et qui ait laissé derrière elle de nombreux manuscrits et/ou lettres. J'ai trouvé un certain nombre de candidats possibles, dont Lamé et quelques allemands que j'ai oubliés. Mais finalement, la biographie de Taton du *Dictionary of Scientific Biography* m'a convaincu que Liouville était le bon choix. Non seulement Taton avait écrit qu'une biographie de

ce scientifique manquait, mais il mentionnait également le fonds de quarante mille pages qu'il avait légué à la Bibliothèque de l'Institut de France.

- 3 Lorsque je suis venu à Paris, je suis allé voir M. Taton et grâce à sa lettre de recommandation, j'ai pu avoir accès à la Bibliothèque de l'Institut de France pour commencer mes recherches dans le fonds Liouville. Heureusement, il s'est avéré que l'écriture de Liouville était lisible. C'est seulement quand j'ai eu à lire un rapport manuscrit de Poisson par la suite que j'ai compris ma chance. Les pages écrites par Poisson étaient remplies de gribouillis qui me faisaient penser à de l'arabe. Cependant, Bruno Belhoste m'a informé que les gribouillis étaient des mots français qu'il a eu l'amabilité de me traduire.
- 4 Il se trouve que le fonds Liouville contenait un trésor qui m'a permis de découvrir le fil rouge qui l'a conduit à plusieurs des théories qu'il a rendues publiques et également à quelques idées du plus haut intérêt, sur lesquelles il n'a jamais communiqué. Jeanne Peiffer avait étudié le contenu des notes traitant des fonctions doublement périodiques et dans sa thèse, elle avait fait une ébauche de sommaire. À part cela, c'était un territoire vierge que je trouvais passionnant à exploiter.

Norbert Verdier

- 5 Pour vous, quelle est la contribution la plus valable de Liouville en mathématiques ?

Jesper Lützen

- 6 La théorie de Sturm-Liouville est certainement en tête de liste. Dans le cadre de leur collaboration (1836) – peut-être la première collaboration significative dans l'histoire des mathématiques – Sturm et Liouville ont été des pionniers. Ils ont montré comment il était possible d'acquérir des données qualitatives sur les solutions d'équations différentielles sans en avoir une expression littérale. C'était une avancée très importante dans le processus qui a fait évoluer l'analyse de l'approche formelle d'Euler (fondée sur les formules) vers une approche fondée sur un concept plus qualitatif. Partant de là, Liouville a donné la première preuve de l'existence d'une équation différentielle basée sur la méthode des approximations successives et il a donné deux preuves de la convergence des séries de Fourier généralisées, relative au problème de Sturm-Liouville. [Cf. article de Alain Juhel].
- 7 Pendant les années qui ont suivi, Liouville a essayé de diffuser ses propres résultats et ceux de son ami concernant les équations différentielles d'un ordre supérieur à deux, sans grand succès. Au milieu des années 1840, il a également repris des idées similaires pour résoudre un problème théorique spectral pour un opérateur intégral qu'il avait rencontré dans la théorie du potentiel. C'était la première avancée dans ce domaine et Liouville a trouvé des résultats remarquables, dont une méthode des variations visant à établir l'existence d'une série dénombrable de valeurs propres. Il a pu prouver que les valeurs propres étaient réelles et positives et que si la série de Fourier généralisée convergeait, elle convergeait vers la fonction étendue. Ces recherches annonçaient beaucoup d'idées émises par la suite par Poincaré et Hilbert. Cependant vers 1857 au plus tard, Liouville découvrit que le principe de variation posait problème parce qu'il se pouvait qu'il n'existe pas de vrai minimum (seulement un infimum). C'était le type de problème que Weierstrass avait pointé du doigt en 1870, en relation avec le principe de

Dirichlet. Ce problème a peut être découragé Liouville de publier sa théorie. Heureusement, la plus grande partie de sa théorie est restée consignée dans ses carnets de notes. La débusquer parmi les nombreuses pages manuscrites a probablement été l'expérience la plus exaltante que j'ai jamais vécue en tant qu'historien des mathématiques.

Norbert Verdier

- 8 Dans le titre de votre livre [Lützen, 1990], vous avez écrit que Liouville était un maître des mathématiques pures et appliquées. Pensez-vous que ses contributions dans ces deux disciplines mathématiques aient été égales ou bien asymétriques ?

Jesper Lützen

- 9 Bien sûr, j'ai choisi ce titre comme référence implicite à une autre réalisation majeure de Liouville : avoir été fondateur et rédacteur en chef du *Journal des mathématiques pures et appliquées*. Comme vous l'avez démontré dans votre thèse [Verdier, 2009], ceci a probablement été sa plus grande contribution à la communauté des mathématiciens. Il a produit à la fois des mathématiques pures et appliquées. Côté mathématiques pures, on trouve ses travaux sur les formes quadratiques, qui l'ont occupé à partir de la fin des années 1850, ses contributions à la théorie des nombres transcendants [Cf. article de Michel Mendès-France], ses travaux du début sur l'intégration en termes finis et sa théorie sur les fonctions doublement périodiques, dont la plus grande partie n'a jamais été publiée. Du côté des mathématiques appliquées, on trouve ses travaux sur la mécanique, dont ses recherches sur la forme d'équilibre d'une masse fluide en rotation et sur la théorie du potentiel. Tous ses écrits sur les mathématiques appliquées traitent de sujets scientifiques très théoriques, jamais de mécanique ou d'autres applications pratiques. Si l'on regarde de plus près ses travaux, on note davantage de mathématiques pures. Cependant, ce décompte ne donne pas toute leur importance aux applications, dans les recherches de Liouville. En fait, beaucoup de ses recherches en mathématiques pures prennent leur source dans des théories physiques. C'est évident pour la théorie de Sturm-Liouville, elle-même inspirée de la théorie de Fourier sur la conduction de la chaleur, et également pour sa théorie de la dérivation d'ordre non entier. Cette dernière théorie semble avoir été énoncée par Liouville après qu'il eut suivi un cours d'Ampère sur l'électrodynamique. Liouville lui-même soulignait que les avancées majeures en mathématiques sont à mettre au crédit de la physique, et en particulier de la mécanique.

Norbert Verdier

- 10 Parlez-vous de Liouville dans votre dernier livre ? [Lützen, 2005] Y joue-t-il un rôle important ?

Jesper Lützen

- 11 J'évoque brièvement Liouville dans ce livre également. En fait, l'une des nouveautés majeures de la théorie mécanique de Hertz était sa formulation en géométrie différentielle. Il a reconnu que des mathématiciens tels que Darboux et Lipschitz

l'avaient précédé dans cette voie. Darboux, en retour, a mentionné quelques-uns des travaux de Liouville. Cependant, ni Darboux ni Hertz ne pouvaient avoir eu connaissance de quelques-unes des idées les plus avant-gardistes de Liouville sur la géométrisation de la mécanique. Dans un cours au Collège de France il a montré comment on pouvait transformer un problème mécanique donné concernant le déplacement d'une particule sur une surface en un autre problème, en modifiant simultanément les forces (le potentiel) et la géométrie (la métrique riemannienne) de la surface. En particulier, on peut modifier l'élément linéaire de telle façon qu'il inclue la fonction force. De cette façon, on peut traiter un système de forces comme un déplacement géodésique sur une surface adaptée. L'idée de Liouville d'inclure les forces dans la géométrie n'a été publiée que de façon implicite dans une version analytique à plusieurs dimensions et a été approfondie par Lipschitz et Darboux. On peut affirmer qu'elle annonce l'une des idées de la relativité générale. La géométrisation de Hertz était similaire à celle de ces mathématiciens par certains côtés, mais aussi totalement différente vue sous d'autres angles. Par exemple, Hertz n'a pas traité les forces en les incluant dans la métrique géométrique (à travers le potentiel), mais en postulant qu'un système caché de masses caché était relié au système visible.

Norbert Verdier

- 12 Dans votre dernier article [Lützen, 2009], vous expliquez pourquoi le théorème de Wantzel, publié par Liouville dans son journal en 1837, avait été négligé pendant un siècle. Pour vous, en fait c'est parce que le théorème de Wantzel n'était pas considéré comme un théorème important *en* mathématiques mais plutôt comme un théorème global *au sujet* des mathématiques. Pouvez-vous commenter le théorème de Wantzel en quelques mots et expliquer la distinction que vous faites entre « *en* mathématiques » et « *au sujet* des mathématiques ».

Jesper Lützen

- 13 Pendant une longue période de leur histoire, les mathématiques ont d'abord été considérées comme une machine à résoudre les problèmes. C'était leur objectif principal, que ces problèmes soient de nature mathématique ou pas. Dans ce paradigme des mathématiques, dire qu'un problème donné ne peut pas être résolu par certains moyens n'est pas vraiment un résultat mathématique. C'est une démonstration *concernant* la résolution du problème concluant que l'on devrait cesser d'en chercher la solution.
- 14 On peut donc appeler ce résultat un résultat métamathématique. Le théorème de Wantzel démontrant l'impossibilité de construire avec la règle et le compas la trisection d'un angle quelconque et deux moyennes proportionnelles entre deux segments de droite est un résultat de ce type. Bien que les problèmes aient été posés depuis l'antiquité grecque, Descartes a été le premier à penser qu'il était souhaitable et même possible de prouver leur impossibilité. Au moment où Wantzel a publié son travail, le paradigme sur la résolution des problèmes, qui avait été d'actualité au 18^{ème} siècle, était progressivement détrôné par un paradigme plus conceptuel sur la démonstration des théorèmes. En fait, l'impossibilité de nombreux problèmes a été démontrée pour la première fois à cette époque, y compris les théorèmes de Liouville

sur l'impossibilité d'exprimer certaines intégrales en termes finis, ou d'exprimer certaines solutions d'équations différentielles par la quadrature. À propos de son théorème sur l'impossibilité de résoudre la quintique par des radicaux, Abel a souligné qu'afin de considérer les démonstrations d'impossibilité comme des solutions aux problèmes, il y avait lieu de reformuler les problèmes. Au lieu de demander : « résolvez le problème », on devrait d'abord demander « est-il possible de résoudre ce problème ? », et c'est seulement si la réponse était oui que l'on pouvait prétendre lui trouver une solution. De cette manière, Abel a prétendu que l'on pourrait résoudre tous les problèmes, soit en démontrant qu'il était impossible de les résoudre, soit en leur trouvant une solution. En fait, Hilbert a argumenté exactement dans le même sens, en disant que si les démonstrations d'impossibilité étaient acceptées comme des solutions aux problèmes, il n'y aurait pas d'ignorabimus en mathématiques. Gödel a montré qu'il avait tort.

- 15 Mais bien que l'opinion concernant les démonstrations d'impossibilité semble avoir évolué dans les années 1830, la majorité des mathématiciens n'ont pas été jusqu'à les considérer comme des démonstrations positives. Quoi qu'il en soit, la preuve apportée par Wantzel a été mise sous le boisseau pendant un siècle, ceci en partie à cause du scepticisme quant aux démonstrations d'impossibilité.

Norbert Verdier

- 16 Dans votre chapitre : « Participation internationale au Journal de mathématiques pures et appliquées de Liouville », [Lützen, 2002] vous étudiez les sources d'inspiration de Liouville. De qui Liouville a-t-il été lui-même source d'inspiration ?

Jesper Lützen

- 17 Lorsque j'ai étudié les ouvrages publiés et non publiés de Liouville, j'ai évidemment bien perçu de qui il s'était inspiré. En revanche, j'ai eu une idée moins nette des travaux mathématiques que l'œuvre de Liouville avait inspirés. Aujourd'hui, les nombreuses théories et théorèmes qui portent le nom de Liouville en mathématique ou en mécanique reflètent l'influence de ses travaux. Quelques uns d'entre eux ont eu une influence immédiate : les quelques remarques que Liouville a publiées sur sa nouvelle théorie des fonctions doublement périodiques ont été reprises immédiatement par Cauchy, et ses conférences ont été l'une des sources du livre de Briot et Bouquet sur les fonctions elliptiques. Ses conférences sur la théorie de Galois ont inspiré Serret et ses écrits sur la théorie du potentiel et la géométrie ont fait partie intégrante de la recherche en France dans ces domaines. Parmi ses autres idées les plus significatives, certaines ont dû attendre plusieurs générations pour être reprises. Ceci est vrai de la théorie de Sturm-Liouville, de la dérivation d'ordre arbitraire et de quelques rares publications concernant les fonctions de Lamé et les masses fluides en rotation.

Norbert Verdier

- 18 Dans votre article avec Bruno Belhoste : « Joseph Liouville et le Collège de France » [Belhoste & Lützen, 1984], vous étudiez les conférences de Liouville dans cette

institution. Ses conférences étaient-elle un moyen de faire circuler les mathématiques parmi les jeunes mathématiciens partout en Europe ?

Jesper Lützen

- 19 Ses conférences n'avaient pas autant d'influence que celles de Weierstrass à Berlin par exemple, un demi-siècle plus tard, mais les étudiants étrangers qui passaient par Paris assistaient souvent aux conférences de Liouville au Collège de France. Dans cette institution (contrairement à l'École polytechnique) Liouville a pu présenter ses propres théories, ce qu'il ne s'est pas privé de faire. Parmi ses étudiants étrangers les plus connus, on compte Borchardt et Joachimsthal qui ont suivi ses conférences sur les fonctions doublement périodiques en 1847, ce dernier les ayant publiées dans le journal de Crelle en 1880. Parmi les autres étrangers qui ont assisté aux conférences de Liouville au Collège de France, on compte Thomson (Lord Kelvin), Bjerknes, Hj. Holmgren, Hirst, Tchebychef, et Mittag-Leffler.

Bibliographie

- 20 **Belhoste Bruno & Lützen Jesper**
- 21 1984. « Joseph Liouville et le Collège de France », *Revue Histoire des Sciences*, XXXVII/3-4 (1984), 255-304.
- 22 **Lützen Jesper**
- 23 1982. *The prehistory of the theory of distributions*, New York Springer Verlag
- 24 1990. *Joseph Liouville (1809-1882), a master of pure and applied mathematics*, Ed. Springer-Verlag, 1990.
- 25 2002. *International Participation in Liouville's Journal de mathématiques pures et appliquées*, dans *Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community 1800-1945*, Karen Hunger Parshall, Adrian C. Rice, *History of mathematics*, vol. 23, American Mathematical Society & London Mathematical Society, 2002, 89-104.
- 26 2005. *Mechanistic Images in Geometric Form : Heinrich Hertz's Principles of Mechanics*. Oxford : Oxford University Press, 2005.
- 27 2009. « Why was Wantzel overlooked for a century ? The changing importance of impossibility », *Historia Mathematica*, **36** (2009), 374-394.
- 28 **Verdier Norbert**
- 29 2009. *Le Journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIX^e siècle (1824 - 1885)*, Thèse de doctorat de l'université Paris-Sud 11, 2009.

NOTES

1. Cet entretien a été effectué à distance en anglais au cours des mois de septembre et d'octobre 2009. La traduction a été effectuée au cours du mois de novembre 2009. Au final, elle a été relue et approuvée par Jesper Lützen.