Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

45 | 2010

Joseph Liouville, le bicentenaire (1809-2009)

Liouville, aujourd'hui et demain

Norbert Verdier & Alexandre Moatti

Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/sabix/722>

DOI : 10.4000/sabix.722

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 1 janvier 2010

Pagination : 43 - 46

ISBN : ISSN N° 2114-2130 -

ISSN : 0989-30-59

Référence électronique

Norbert Verdier & Alexandre Moatti, « Liouville, aujourd'hui et demain », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 45 | 2010, mis en ligne le 11 octobre 2011, consulté le 07 septembre 2020. URL : <http://journals.openedition.org/sabix/722> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.722>

Ce document a été généré automatiquement le 7 septembre 2020.

© SABIX

Liouville, aujourd'hui et demain

Norbert Verdier & Alexandre Moatti

- 1 Ce court article n'a pas pour ambition de percevoir ce que sont devenues les multiples voies ouvertes par Liouville mais simplement de « faire sentir » quelques brèches qu'il a ouvertes. Ces exemples nous montrent que la pensée multiforme de Liouville a percolé jusqu'aux mathématiques d'aujourd'hui et de demain.

La transcendance : la méthode de Liouville (1844) relue par Michel Waldschmidt

- 2 Nous avons vu avec Michel Mendès-France la démonstration de Liouville à propos de l'existence de nombres transcendants. Il y a quelques années, nous avons interrogé l'arithméticien Michel Waldschmidt sur la postérité de cette démonstration. Il nous avait alors longuement parlé des travaux de Hermite, postérieurs d'une génération à ceux de Liouville, et nous avait confié :

« Une autre voie pour démontrer la transcendance de certains nombres provient de la démonstration de Liouville, qui est le premier en 1844 à avoir construit explicitement des nombres transcendants (on ne savait pas encore qu'il en existait : la démonstration non constructive par Cantor de l'existence de nombres transcendants n'est venue qu'en 1873). La démonstration de Liouville est l'une des rares preuves de transcendance qui soit facile [cf. article de Michel Mendès-France] à exposer ; même la démonstration de l'irrationalité du nombre demande pas mal d'efforts – je n'en connais pas qui soit vraiment facile et limpide. Malgré sa simplicité, la méthode de Liouville a donné lieu à des travaux profonds, mais pas immédiatement : c'est seulement au tout début du XX^e siècle que les développements sont apparus. Les travaux de Maillet sur ce qu'il a appelé « nombres de Liouville » ne sont pas très profonds, en revanche les recherches de Thue, puis de Siegel, suivies par Roth dans les années 1950, puis par Schmidt vingt ans plus tard, conduisent à des théorèmes difficiles sur l'approximation de nombres algébriques, dont les retombées sont formidables. Les développements des travaux de Hermite d'une part, de Thue d'autre part, fournissent les deux outils les plus puissants dont on dispose actuellement sur le sujet. » [Waldschmidt, 2005]

- 3 Pour en savoir plus sur les questions (nombreuses) concernant la notion de transcendance, nous renvoyons à différents travaux de Michel Waldschmidt [Waldschmidt, 1983 & 2000].

Le problème de Waring : de Liouville (1859) à Balasubramanian, Deshouillers & Dress en 1986

- 4 Dans son cours au Collège de France de 1859, Liouville revisite le célèbre problème de Waring (1770) consistant à se demander si, pour tout entier naturel k , il existe un entier naturel s tel que tout entier soit la somme d'au plus s puissances $k^{\text{ième}}$ d'entiers.
- 5 Pour chaque k , notons le plus petit s par $g(k)$. Nous avons $g(1) = 1$. À titre d'exemple, on montre par quelques calculs élémentaires que 7 requiert 4 carrés, 23 requiert 9 cubes, et 79 requiert 19 puissances quatrièmes. Waring conjectura que ces valeurs étaient les meilleures possibles. Le théorème des quatre carrés de Lagrange – daté également de 1770 mais conjecturé par Fermat en 1640 et qu'on retrouve mentionné dès 1621 – affirme que chaque nombre naturel est la somme d'au plus quatre carrés autrement dit que $g(2) = 4$. Dans son cours au Collège de France, Liouville montre que $g(4)$ vaut au plus 53. Il n'a pas publié son résultat mais Victor-Amédée Lebesgue l'annonce dans ses *Exercices d'analyse numérique* en 1859 [Lebesgue, 1859, 112-115].
- 6 Le problème n'avance plus pendant plus de cent vingt ans. En 1984, Jean-Marc Deshouillers fait le point sur le problème de Waring pour les bicarrés [Deshouillers, 1984]. Il annonce qu'il a démontré avec deux de ses collègues que $g(4) = 19$. La démonstration paraît en 1986. [Balasubramanian ; Deshouillers & Dress, 1986a & b].

Nombre de représentations d'un nombre entier positif comme étant la somme de douze nombres triangulaires : de Liouville (1858) à McAfee & Williams en 2006.

En 1858, Liouville publie des centaines d'articles de théorie des nombres [Verdier, 2009, 322-338]. Certains sont groupés par série. C'est le cas d'une série de dix-huit articles, lancée en 1858 et soigneusement intitulée : « Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres » et achevée en 1865. Ces quelques dizaines de pages sont émaillées de résultats démontrés ou seulement annoncés. L'un d'eux, dans le sixième article [Liouville, 1858, 331], prend la forme ci-contre :

d'où l'on peut tirer un théorème sur la décomposition des nombres en douze carrés, savoir : « Soient m un entier impair, G le nombre des décompositions de $4m$ en une somme de douze carrés impairs, et H le nombre des décompositions de $8m$ en une somme de huit carrés impairs, formant un total dont le quotient par 8 soit impair, plus le produit d'une somme de quatre carrés impairs par une puissance de 2. On aura

$$8G + H = \frac{1}{24} [\zeta_3(m) - \zeta_3(4m)]$$

[Liouville, 1858, 331]

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux 18 (2006), 223-239

An arithmetic formula of Liouville

par ERIN MCAFEE et KENNETH S. WILLIAMS

En 2006, deux chercheurs d'Ottawa, Erin McAfee et Kenneth S. Williams ont démontré l'affirmation de Liouville. Leur article est dédié à la mémoire de Liouville.

Résumé. Une preuve élémentaire est donnée d'une formule arithmétique qui fut présentée mais non prouvée par Liouville. Une application de cette formule donne une formule pour le nombre de représentations d'un nombre entier positif comme étant la somme de douze nombres triangulaires.

ABSTRACT. An elementary proof is given of an arithmetic formula, which was stated but not proved by Liouville. An application of this formula yields a formula for the number of representations of a positive integer as the sum of twelve triangular numbers.

This paper is dedicated to the memory of Joseph Liouville (1802-1882).

[McAfee & Williams, 2006, 223]

Les opérateurs de Liouville en physique quantique

- 7 Le travail d'analyse qu'a mené Liouville autour de l'équation de la chaleur de Fourier (et dont A. Juhel nous montre un aperçu avec le théorème de Sturm-Liouville dans le présent *Bulletin*) est aussi utilisé dans sa plus grande généralité en physique quantique, pour certaines résolutions de l'équation de Schrödinger. Comme le rappelle Claude Cohen-Tannoudji dans son cours au Collège de France¹, l'espace des opérateurs agissant sur l'espace E des états d'un système quantique est appelé « espace de Liouville » et noté L

— Auparavant, nous allons montrer qu'on peut récrire l'équation (VIII.2) comme une équation de Schrödinger ordinaire dans un espace plus grand que l'espace des états E et appelé espace de Liouville L .

B- Généralités sur l'espace de Liouville

① Définition - Notations.

- Soit E l'espace des états d'un système quantique. Les opérateurs agissant dans E forment un espace vectoriel L appelé espace de Liouville.
- Les vecteurs de E sont notés $| \cdot \rangle$.
Les vecteurs de L , c.-à-d. les opérateurs de E , sont notés $| \cdot \rangle \rangle$
- Exemples de vecteurs de L
Opérateurs densité $| \rho \rangle \rangle$

- 8 Il est défini, dans cet espace d'opérateurs, un opérateur particulier, le Liouvillien (ou « opérateur de Liouville ») : à partir de l'opérateur hamiltonien H agissant dans l'espace des états E , on définit l'opérateur de Liouville L agissant dans l'espace L . Il permet d'écrire différemment certaines équations fondamentales de la physique quantique – comme celle de Schrödinger déjà citée ou celle des observables de Heisenberg – et d'aider à leur résolution :

(ii) Intérêt de L .

- L'équation d'évolution de ρ , VIII-2, peut être réécrite dans $\mathcal{L}$, compte tenu de (VIII-18), sous la forme

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |\rho\rangle\rangle = L |\rho\rangle\rangle} \quad (\text{VIII-19})$$

qui ressemble à une équation de Schrödinger ordinaire.

- De même l'équation d'évolution d'une observable A de E , dans le point de vue de Heisenberg

$$i\hbar \frac{d}{dt} A = [A, H] \quad (\text{VIII-20})$$

peut se réécrire

$$i\hbar \frac{d}{dt} |A\rangle\rangle = -L |A\rangle\rangle \quad (\text{VIII-21})$$

- 9 On constate ainsi la puissance des outils créés par Liouville en analyse, utilisés en physique mathématique : les apports de Liouville à la résolution de l'équation différentielle de la chaleur sont de nos jours utilisés pour la résolution des équations différentielles de la physique quantique.

(Norbert Verdier est l'auteur des trois premières parties et Alexandre Moatti de la dernière)

En guise de conclusion

- 10 Ces quelques exemples étaient là pour signifier la présence de Liouville dans nos mathématiques d'aujourd'hui. De multiples autres exemples auraient pu être choisis aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Si nous avons étendu nos choix aux résultats annoncés ou pressentis dans son *Journal* ce sont des dizaines de chemin que nous aurions pu tracer entre les mathématiques d'hier – celle du XIX^e – et celles d'aujourd'hui et de demain. Sans avoir à proprement parlé « fait école », Liouville, seul ou par les auteurs qu'il a publié, a ouvert de multiples voies en achevant certains problèmes ou en ouvrant les esprits à de nouveaux questionnements.

Bibliographie

- 11 **Balasubramanian, Ramachandran ; Deshouillers, Jean-Marc & Dress, François**
- 12 1986a. « Problème de Waring pour les bicarrés. I. Schéma de la solution », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, I, **303** (1986), n° 4, 85-88.
- 13 1986b. « Problème de Waring pour les bicarrés. II. Résultats auxiliaires pour le théorème asymptotique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, I, **303** (1986), n° 5, 161-163.
- 14 **Deshouillers, Jean-Marc**
- 15 1984. « Problème de Waring pour les bicarrés : lepointen1984 », *Théorie analytique des Nombres*, 2^e année, **33** (1984/85), 1-5.

- 16 **Lebesgue, Victor-Amédée**
- 17 1859. *Exercices d'analyse numérique*, Paris, Leiber & Faraguet.
- 18 **Liouville, Joseph**
- 19 1858. « Sur quelques formules générales qui peuvent utiles dans la théorie des nombres » (sixième article), *Journal de mathématiques pures et appliquées*, II, 3 (1858), 325-336.
- 20 **McAfee, Erin & Williams, Kenneth S.**
- 21 2006. « An arithmetic formula of Liouville », *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, **18** (2006), 223-239.
- 22 **Verdier, Norbert**
- 23 2009. *Le Journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIX^e siècle (1824 - 1885)*, Thèse de doctorat de l'université Paris-Sud 11, 2009.
- 24 **Waldschmidt, Michel**
- 25 1983. « Les débuts de la théorie des nombres transcendants (à l'occasion du centenaire de la transcendance de $\frac{7}{8}$) », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 4 (1983), Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire de mathématiques fondamentales, École des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Centre Alexandre Koyré, 93-115.
- 26 2000. « Un demi-siècle de transcendance » in *Development of mathematics 1950-2000* de Jean-Paul Pier, Jean-Paul Brasselet, Alberto Conte, Pierre Dugac, Christian Houzel, Jean-Pierre Kahane & Rémi Langevin, Birkhäuser, 2000, 1121-1180.
- 27 2005. « Au coeur des nombres » (entretien avec Norbert Verdier), *Tangente*, **103** (Mars-Avril 2005), 40-43.

Sitographie

- 28 <http://people.math.jussieu.fr/~miw/index2.html>

NOTES

1. Par exemple <http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/1975-76/1975-76.htm> Année universitaire 1975-1976, « Émission spontanée, relaxation et équation pilote », 8^e leçon. Les encarts donnés ici sont extraits du cours de Claude Cohen-Tannoudji au Collège de France.